Screenings:

1) $[\varphi(z), \Psi(w)] = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{i!} \gamma_i(w)\, \partial_w^i \delta(z-w)$

2) $\varphi(z)\Psi(w) = \sum_{i=0}^{N-1} \gamma_i(w) \left.\frac{1}{(z-w)^{i+1}}\right|_{|z|>|w|} + :\varphi(z)\Psi(w):$

$a(z),\ a^*(z),\ b(z)$

$[a_n, a^*_m] = \delta_{n+m,0}\ ;\ [a,a] = [a^*, a^*] = 0$

$[b_n, b_m] = 2kn\,\delta_{n+m,0}$

$a(z)\,a^*(w) = \frac{1}{z-w} + \text{reg}$

M - Fock module (a, a^*) $\begin{cases} a_n|0\rangle = 0, & n \geq 0 \\ a^*_n|0\rangle = 0, & n > 0 \end{cases}$

π^k_λ - Fock module $\begin{cases} b_n|\lambda\rangle = 0, & n > 0 \\ b_0|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \end{cases}$

$$W_{\lambda,k} = M \otimes \pi^{k+2}_\lambda \longrightarrow \left([b_n, b_m] = 2n(k+2)\delta_{n+m,0} \right)$$

$$e(z) = a(z)$$

$$h(z) = -2 :a^*(z)a(z): + b(z)$$

$$f(z) = - :a^{*2}(z)\, a(z): + \partial_z a^*(z) + a^*(z)b(z)$$

$$S_k(z) = a(z)\, T_{-2} \exp\Big(\frac{1}{k+2} \sum_{n<0} \frac{b_n}{n} z^{-n}\Big) \exp\Big(\frac{1}{k+2} \sum_{n>0} \frac{b_n}{n} z^{-n}\Big).$$

$$S_k(z) : W_{0,k} \longrightarrow W_{-2,k} \;;$$

$$T_{-2}|0\rangle = |-2\rangle \quad , \quad [T_{-2}, b_n] = 0, \; n \neq 0$$

$$V_{-2}(z) = T_{-2} \exp\Big(\frac{1}{k+2} \sum_{n<0} \frac{b_n}{n} z^{-n}\Big) \exp\Big(\frac{1}{k+2} \sum_{n>0} \frac{b_n}{n} z^{-n}\Big).$$

1) $(k+2)\, \partial_z V_{-2}(z) = -:b(z) V(z):$

2) $[b_n, V_{-2}(z)] = -2 z^n V_{-2}(z)$

$$b(z) V_{-2}(w) = \frac{-2 V_{-2}(w)}{z-w} + \text{reg}$$

1) $e(z)\, S_\kappa(w) = reg \Rightarrow [e(z), S_\kappa(w)] = 0$

2) $h(z) = -2 :a^*(z)a(z): + b(z)$

$$h(z)\, S_\kappa(w) = \frac{2:a(w)V_{-2}(w):}{z-w} - \frac{2:a(w)V_{-2}(w):}{z-w} = 0$$

$[h(z), S_\kappa(w)] = 0$

3) $f(z) = -:a^{*2}(z)a(z): + k\,\partial_z a^*(z) + a^*(z)b(z)$

$$f(z)\, S_\kappa(w) = \frac{2:a^*(w)\cancel{a(w)}V_{-2}(w):}{\cancel{z-w}} + \frac{k:V_{-2}(w):}{(z-w)^2} -$$

$S_\kappa = a\, V_{-2}^{\hat{a}\, e^b}$

$$-\frac{:b(w)V_{-2}(w):}{z-w} - \cancel{\frac{2\;:a^*(w)\,a(w)V_{-2}(w):}{z-w}} +$$

$$+\frac{2\;:V_{-2}(w):}{(z-w)^2} = (k+2)\frac{V_{-2}(w)}{(z-w)^2} - \frac{:b(w)V_{-2}(w):}{z-w} =$$

$$=(k+2)\frac{V_{-2}(w)}{(z-w)^2} + \frac{(k+2)\,\partial_w V_{-2}(w)}{z-w} = (k+2)\,\partial_w\left[\frac{V_{-2}(w)}{z-w}\right]$$

Опр: Скрининг $S_k := \int S_k(z)\,dz$

Теорема: Скрининг S_k - сплетающий оператор двух модулей Вакимото.

$$\begin{tikzcd}
W_{0,k} \arrow[r, "S_k"] \arrow[d, "\hat{sl}_2"] & W_{-2,k} \arrow[d, "\hat{sl}_2"] \\
W_{0,k} \arrow[r, "S_k"] & W_{-2,k}
\end{tikzcd}$$

Предложение: Для $k \notin -2+\mathbb{Q}$ последовательность

$$0 \longrightarrow V_k(\hat{sl}_2) \xrightarrow{w_k} W_{0,k} \xrightarrow{S_k} W_{-2,k} \longrightarrow 0$$

точна.

$$\begin{array}{ccc}
f_1 & h_1 & e_1 \\
f_0 & h_0 & e_0 \\
\multicolumn{3}{c}{\boxed{f_{-1} \qquad h_{-1} \qquad e_{-1}}}
\end{array}$$

Док-во: w_k - инъективно (для общего k $V_k(\hat{sl}_2)$ - неприводим).

1) $|0\rangle \in V_k(\hat{sl}_2) \xmapsto{w_k} |0\rangle \otimes |0\rangle \in W_{0,k}$

$S_k(|0\rangle \otimes |0\rangle) = 0$; S_k коммутирует с действием $\hat{sl}_2$, а $V_k(\hat{sl}_2)$ - порожден действиями $J^a_{-1,-2,-3,\dots}$, т.е. мы доказали $\ker(S_k) \supset \operatorname{Im}(w_k)$

$q = e^{\alpha}$

$q = e^{-\delta}$

2) $$ch(V_k(\hat{sl}_2)) = \prod_{n>0} \frac{1}{(1-q^n)(1-uq^n)(1-u^{-1}q^n)}$$

$$ch\, W_{\lambda,k} = u^{\frac{\lambda}{2}} \prod_{n>0} \frac{1}{(1-q^n)(1-uq^n)(1-u^{-1}q^{n-1})} = ch\, M_{\lambda,k}$$

Если $k \notin -2+\mathbb{Q}$, то $M_{-2,k}$ - неприводим (Кац - Каждан)

Verma module (λ, k)

Тогда $W_{-2,k}$ - неприводим.

$\left[S_k \neq 0 \quad \left(S_k\, a_0^* |0\rangle = |-2\rangle \right) \right] \Rightarrow S_k$ - сюръекция.

$$\mathrm{Ch}\,(\ker(S_k)) = \mathrm{Ch}\, W_{0,k} - \mathrm{Ch}\, W_{-2,k} =$$

$$= (1-u^{-1}) \prod_{n\geq 1} \frac{1}{(1-q^n)(1-uq^n)(1-u^{-1}q^{n-1})} = \prod_{n>0} \frac{1}{(1-q^n)(1-uq^n)(1-u^{-1}q^n)} =$$

$$= \mathrm{ch}\, V_k(\hat{sl}_2) \Rightarrow \ker(S_k) = V_k(\hat{sl}_2).$$

Friedan-Martinec-Shenker bosonization

$$[p_n, p_m] = n\delta_{n+m,0}$$

$$[q_n, q_m] = -n\,\delta_{n+m,0}$$

$$[p, q] = 0$$

$$p(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} p_n z^{-n-1}$$

$$q(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q_n z^{-n-1}$$

$$\overset{\text{Fock}}{\Pi_{\lambda,\mu}} : \begin{cases} p_n|\lambda,\mu\rangle = \delta_{n,0}\lambda|\lambda,\mu\rangle \\ q_n|\lambda,\mu\rangle = \delta_{n,0}\mu|\lambda,\mu\rangle \end{cases}, \ n \geq 0$$

$$V_{\lambda,\mu}(z) = T_{\lambda,\mu}\, z^{\lambda\lambda'-\mu\mu'} \exp\Big(-\sum_{n<0} \frac{\lambda p_n + \mu q_n}{n} z^{-n}\Big) \exp\Big(-\sum_{n>0} \frac{\lambda p_n + \mu q_n}{n} z^{-n}\Big)$$

$$T_{\lambda,\mu} : \Pi_{\lambda',\mu'} \longrightarrow \Pi_{\lambda+\lambda',\mu+\mu'}$$

Введем $p(z) = \partial_z u(z)$, $q(z) = \partial_z v(z)$. | $V_{\lambda,\mu}(z) = e^{\lambda u + \mu v}(z)$

$$u(z) = Q + p_0 \log z - \sum_{n \neq 0} \frac{z^{-n}}{n} p_n$$

$$\Pi_\gamma = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \Pi_{\gamma+n,\gamma+n}$$

Теорема: $\hat{a}(z) = e^{u+v}(z)$; $\tilde{a}^*(z) = (\partial_z e^{-u}) e^{-v} =$

$$= - :p(z)\, e^{-u-v}(z):.$$

fermionic

$\bar{S} = \int e^{u(z)} dz.$ $\quad M \hookrightarrow \Pi_0 = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \Pi_{n,n}$

Образ этого вложения в точности есть ядро $\overline{S} = \int e^{u(z)} dz$.

$$0 \to M \overset{i}{\hookrightarrow} \Pi_0 \xrightarrow{\overline{S}} \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Pi_{n+1,n} \qquad \Pi_0 = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Pi_{n,n}$$

M $\Downarrow$ Fock module (a, a^*)

Мы можем написать $\tilde{a}^{\gamma}(z)$ для любого γ

$$\tilde{W}_{\gamma,\lambda,k} = \Pi_\gamma \otimes \mathbb{L}_\lambda^{k+2}$$

$$V_{2(k+2)}(z) = T_{2(k+2)} \exp\left(-\sum_{n<0} \frac{b_n}{n} z^{-n}\right) \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{b_n}{n} z^{-n}\right)$$

Screening (current) of the second kind:

$$\tilde{S}_k(z) = \tilde{a}^{-(k+2)}(z)\, V_{2(k+2)}(z) : \tilde{W}_{0,0,k} \to \tilde{W}_{-(k+2),2(k+2),k}$$

Теорема: Скрининг $\tilde{S}_k = \int \tilde{S}_k(z)\,dz$ коммутирует с действием $\widehat{sl}_2$.

$$\boxed{W_{0,k} \subset \tilde{W}_{0,0,k}}$$

$$b(z) = \partial_z \varphi(z)$$

$$S_k(z) = e^{u+v+\frac{\varphi}{k+2}}(z)\,; \quad \tilde{S}_k(z) = e^{-(k+2)u-(k+2)v-\varphi}(z)$$

Пред: Для общих k: $\ker(\tilde{S}_k)\big|_{W_{0,k}} = V_k(\widehat{sl}_2)$.

"Замечание": Связано с тем, что ядра Гейзенберговых "скринингов это Вирасора.

1) $p(z)=\partial_z u(z)$, $q(z)=\partial_z v(z)$

$$\tilde{a}(z)=:e^{u+v}(z):\ ;\quad \tilde{a}^*(z)=:(\partial_z e^{-u(z)})e^{-v(z)}:$$

$S^{(f)}=\int e^{u}dw$, Хотим показать, что $S^{(f)}$ коммутирует с $\tilde{a}(z)$ и $\tilde{a}^*(z)$.

$\tilde{a}(z)e^{u+v}(z)$.

$$u(z)\cdot u(w)=\log(z-w)\Rightarrow :e^{u(z)}::e^{u(w)}:=:e^{u(z)+u(w)}:(z-w)$$

не сингулярно

$$[e^{u(z)+v(z)},S^{(f)}]=0$$

$$\tilde{a}^*(z) = :\partial_z e^{-u(z)} e^{-v(z)}:$$

$$(\partial_z e^{-u(z)}) \cdot e^{u(w)} = \partial_z \frac{:e^{-u(z)+u(w)}:}{z-w} = -\partial_w \frac{:e^{-u(z)+u(w)}:}{z-w}$$

$$[S^{(f)}, \tilde{a}^*(z)] = 0$$

Бозон-фермионное соответствие $\psi(z) = e^{u(z)}$, $\psi^*(z) = e^{-u(z)}$

$$S^{(f)} = \psi_0 \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_n z^{-n-1}$$

$\psi^*(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi^*_n z^{-n}$; $\partial_z \psi^*(z)$ – не имеет ψ^*_0

2) Про $\mathrm{Ker}(\tilde{S}_k)$.

$$S_k(z) = e^{u+v-\frac{1}{k+2}\varphi}\,, \quad \tilde{S}_k(z) = e^{-(k+2)u-(k+2)v+\varphi}$$

Мы хотим доказать, что для общих k: $\mathrm{Ker}(S_k) = \mathrm{Ker}(\tilde{S}_k)$

Рассмотрим общую ситуацию:

$\mathfrak{h}$ - абелева алгебра Ли

$\varkappa(\cdot,\cdot)$ - невырожденная билинейная форма на ней.

Алгебра Гейзенберга $\hat{\mathfrak{h}}_\varkappa$: $[h_{1,n}, h_{2,k}] = n\varkappa(h_1,h_2)\delta_{n+k,0}$

$\hat{\mathfrak{h}}_\varkappa$ состоит из элементов $\underset{\substack{\parallel \\ h_n}}{h\otimes t^n}$; $n\in\mathbb{Z}$; $h\in\mathfrak{h}$

Пусть $\chi \in \mathfrak{h}^* \cong \mathfrak{h}$, такой что $\varkappa(\chi,\chi) \neq 0$ и

$$\check{\chi} = -\frac{2\chi}{(\chi,\chi)}$$

Модуль Фока: Вакуум $|\lambda\rangle$

$$h_n|\lambda\rangle = 0, \quad n>0 \qquad \Pi_\lambda$$

$$h_0|\lambda\rangle = \lambda(h)|\lambda\rangle$$

Рассмотрим скрининги

$$V_\chi^{\varkappa}(z) = T_\chi \exp\Big(-\sum_{n<0}\frac{\chi_n}{n}z^{-n}\Big)\exp\Big(-\sum_{n>0}\frac{\chi_n}{n}z^{-n}\Big) : \Pi_0 \to \Pi_\chi$$

$$\chi = u + v - (k+2)^{-1}\varphi$$

$$\check{\chi} = \frac{1}{k+2}u + \frac{1}{k+2}v + \varphi$$

Скрининги:

$$V_\chi^{\varkappa} = \int V_\chi^{\varkappa}(z)\,dz, \quad V_{\check{\chi}}^{\varkappa} = \int V_{\check{\chi}}^{\varkappa}(z)\,dz.$$

Общее утверждение: $\operatorname{Ker}(V_\chi^{\varkappa}) = \operatorname{Ker}(V_{\check{\chi}}^{\varkappa})$; χ - общее

$\hat{\eta}^{\chi}_{\varkappa}$ - элементы $\chi_n, n \in \mathbb{Z}$

$\hat{\eta}^{\perp}_{\varkappa} = \{ h_n, n \in \mathbb{Z} \mid \varkappa(h, \chi) = 0 \}$

Тогда $\hat{\eta}_{\varkappa} = \hat{\eta}^{\chi}_{\varkappa} \oplus \hat{\eta}^{\perp}_{\varkappa}$

$\varkappa(u,u) = -\varkappa(v,v) = 1$

$\varkappa(\varphi,\varphi) = 2(k+2)$

$[\hat{\eta}^{\perp}_{\varkappa}, V_\chi] = 0 \Rightarrow \ker(V_\chi) = \Pi(\hat{\eta}^{\perp}_{\varkappa}) \otimes \ker(V_\chi)\big|_{\Pi^{\chi}_{0}}$

Из $\chi(z)$ можно собрать тензор энергии-импульса:

$$T(z) = \frac{1}{2}\frac{:\chi(z)^2:}{(\chi,\chi)} + \alpha\frac{\partial_z \chi(z)}{\sqrt{(\chi,\chi)}}$$

$c = 1 - 12\alpha^2$

$$\chi(z) = \partial_z I(z)$$

$$:e^{\frac{I(w)}{\gamma}}:$$

мы хотим $T(z):e^{\frac{I(w)}{\gamma}}: = \dfrac{\partial_w :e^{\frac{I(w)}{\gamma}}:}{z-w} + \left(\frac{1}{2}\frac{(\chi,\chi)}{\gamma^2} - \frac{\alpha\sqrt{(\chi,\chi)}}{\gamma}\right) \times$

$\times \dfrac{:e^{\frac{I(w)}{\gamma}}:}{(z-w)^2}$ – хочу полную производную

$$\frac{1}{2}\frac{(\chi,\chi)}{\gamma^2} - \frac{\alpha\sqrt{(\chi,\chi)}}{\gamma} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{(\chi,\chi)}}{\gamma} - \frac{\gamma}{\sqrt{(\chi,\chi)}}$$

$\gamma \to -\dfrac{(\chi,\chi)}{2\gamma}$: $\alpha \to \alpha$ (возьмем $\gamma = 1$)

Утв: Для V_χ и $V_{\check{\chi}}$ есть одна и та же Вирасора, коммутирующая с ними.

Теорема: Для общих χ : $\mathrm{Ker}(V_\chi) = \mathrm{Ker}(V_{\check{\chi}}) = \mathrm{Vac}_{vir}$ (в одномерном случае)

$$\left.\begin{array}{l} 0 \longrightarrow \mathrm{Vac}_{vir} \longrightarrow \Pi_0 \xrightarrow{V_\chi} \Pi_\chi \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow \mathrm{Vac}_{vir} \longrightarrow \Pi_0 \xrightarrow{V_{\check{\chi}}} \Pi_{\check{\chi}} \longrightarrow 0 \end{array}\right\} \text{ точны.}$$

В нашем случае

$$\varkappa(u,u) = -\varkappa(v,v) = 1$$

$$\varkappa(\varphi,\varphi) = 2(k+2).$$

∎

Screenings on critical level.

$$S_k(z) = a(z)T_{-2} \exp\Big(\sum_{n<0} \frac{1}{k+2} \frac{b_n}{n} z^{-n}\Big) \exp\Big(\frac{1}{k+2} \sum_{n>0} \frac{b_n}{n} z^{-n}\Big).$$

$$\tilde{S}_k(z) = \tilde{a}(z)^{-k-2}\, T_{2(k+2)} \exp\Big(-\sum_{n<0} \frac{b_n}{n} z^{-n}\Big) \exp\Big(-\sum_{n>0} \frac{b_n}{n} z^{-n}\Big)$$

Хотим $S_{-2}(z)$ или $\tilde{S}_{-2}(z)$.

Будем считать $\tilde{S}_{-2}(z)$

Общая логика: Мы хотим рассматривать $\tilde{S}_k(z)$, как „функцию" от $\beta = k+2$ и изучаем

$$\tilde{S}_k = \beta\, \bar{S} + O(\beta^2)^{(*)},$$ мы назовем $\bar{S}$-скринингом на критическом уровне.

$\bar{S}$ - действует сам в себя

$[b_n, b_m] = 2n(k+2)\,\delta_{n+m,0} = 2n\beta\,\delta_{n+m,0}$

Разложение (*) надо понимать в том смысле, что мы действуем $\tilde{S}_k$ на вектор

$$\tilde{S}_k^{(z)}|0\rangle = \tilde{a}(z)^{-\beta} \exp\Big(-\sum_{n<0} \frac{b_n}{n} z^{-n}\Big)|0\rangle$$

$$\tilde{S}_{k(z)} b_{-1}|0\rangle = \tilde{a}(z)^{-\beta} \exp\Big(-\sum_{n<0} \frac{b_n}{n} z^{-n}\Big) b_{-1}|0\rangle +$$

$$+\tilde{a}(z)^{-\beta} \exp\Big(-\sum_{n<0} \frac{b_n}{n} z^{-n}\Big)(-b_1 z^{-1})\, b_{-1}|0\rangle =$$

$=$

$$= \tilde{a}(z)^{-\beta} \exp\left(-\sum_{n<0} \frac{b_n}{n} z^{-n}\right) b_{-1}|0\rangle \; +$$

$$+ \tilde{a}(z)^{-\beta} \exp\left(-\sum_{n<0} \frac{b_n}{n} z^{-n}\right) \left(-2\beta z^{-1}\right) \quad |0\rangle$$

$$\tilde{S}_K(z)\, b_{-i_1} b_{-i_2} |0\rangle = \tilde{a}(z)^{-\beta} \exp\left(-\sum_{n<0} \frac{b_n}{n} z^{-n}\right) b_{-i_1} b_{-i_2} |0\rangle$$

$$+ \beta(\ldots)\, b_{-i_1}|0\rangle + \beta(\ldots)\, b_{-i_2}|0\rangle + \beta^2(\ldots)\, |0\rangle$$

$$\tilde{S}_K(z) = \tilde{a}(z)^{-\beta}\; V_{2\beta}(z)$$

Утв: $\bar{S} = \bar{V}[1] + \sum_{n>0} \frac{1}{n} \bar{V}[-n+1](p_n + q_n)$, где

$$\bar{V}[1] = -2 \sum_{m \le 0} \bar{V}[m] \frac{\partial}{\partial b_{m-1}}$$

$$\sum_{n \le 0} \bar{V}[n] z^{-n} = \exp\left(\sum_{m>0} \frac{b_{-m}}{m} z^m\right)$$

Утв: $V_{\underset{-2}{\overset{\shortparallel}{k_c}}}(\hat{sl}_2) \subset \ker(\bar{S})$.

Утв: центр $Z(\hat{g})$ содержится в $\ker(\overline{V[1]})$.

Ващмота $W_{0,-2}$