Модель Годена и центр на критическом уровне.

§1. Метод сдвига аргумента.

R – коммутативная алгебра и на ней есть согласованные скобки Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_1$ и $\{\cdot,\cdot\}_2$:

$\{\cdot,\cdot\}_t = (\{\cdot,\cdot\}_1 + t\{\cdot,\cdot\}_2)$ – тоже скобка Пуассона.

Факт 1: Алгебра порожденная центрами скобок $\{\cdot,\cdot\}_t$ коммутативна относительно $\{\cdot,\cdot\}_{\tilde t}$ $\forall \tilde t$

Следствие 1: $Z(S(\mathfrak{g}))$ – центр относительно скобки Пуассона Ли и $\mu \in \mathfrak{g}^*$. Тогда $A_\mu \subset S(\mathfrak{g})$ порожденная $\partial_\mu^n \Phi$ $(\Phi \in Z(S(\mathfrak{g}))$ сдвинутые на $t\mu$. коммутативная отн. Пуассона-Ли.

(коцикл-инвариант)

($\{\cdot,\cdot\}_1$ – скобка Пуас.-Ли

$\{x,y\}_2 = \mu([x,y])$)

Факт 2: Если $\mu \in \mathfrak{g}$ -регулярный полупростой, то $A_\mu \subset S(\mathfrak{g})$ – свободная коммутативная подалгебра с числом образующих $\frac{1}{2}(\dim\mathfrak{g} + \mathrm{rk}\,\mathfrak{g})$. В качестве образующих можно брать $\partial_\mu^n \Phi_k$, $k = 1,\dots,\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$; $n = 0,1,\dots,\deg(\Phi_k)$

§2. Центр на критическом уровне.

$\mathfrak{g}$ - комплексная полупростая алгебра Ли.

$\hat{\mathfrak{g}}$ - аффинная алгебра Ли.

$\mathfrak{g}((t))$ - ряды со значениями в $\mathfrak{g}$.

Центральное расширение $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}((t)) \oplus \mathbb{C}K$

K - централен.

Скобка на $\hat{\mathfrak{g}}$:

$$[g_1 \otimes x(t), g_2 \otimes y(t)] = [g_1, g_2]\, x(t) \cdot y(t) + \varkappa_c(g_1, g_2) \cdot \operatorname*{Res}_{t=0}(x(t)\, dy(t)) \cdot K \quad (g_1, g_2 \in \mathfrak{g};\ x(t), y(t) \in \mathbb{C}((t)))$$

$g_n := g \otimes t^n$, тогда

$$[g_n, \tilde{g}_m] = [g, \tilde{g}]_{n+m} + n\, \delta_{n+m,0}\, \varkappa_c(g, \tilde{g}) K$$

$$\varkappa_c(g_1, g_2) = -\frac{1}{2} \operatorname{Tr}_{\mathfrak{g}} (\operatorname{ad} g_1 \cdot \operatorname{ad} g_2)$$

Есть специальное значение $K = 1$ при котором центр $U(\hat{\mathfrak{g}})$ достаточно большой.

$$U(\hat{\mathfrak{g}}) / (U(\hat{\mathfrak{g}})\, t^n \mathfrak{g}[[t]]) = A_n, \quad n > 0$$

$$\tilde{U}(\hat{g}) = \varprojlim U(\hat{g}) / \left(U(\hat{g})\, t^n g[[t]] \right)$$

пополнение $U(\hat{g})$

$$\hat{g}_+ = g[[t]] \quad ; \quad \hat{g}_- = t^{-1} g[t^{-1}]$$

$$e_1 h_0 \neq e_0 h_1$$

$$\begin{array}{cccc}
2 - & f_2 & h_2 & e_2 \\
1 - & f_1 & h_1 & e_1 \\
0 - & f_0 & h_0 & e_0 \\
-1 - & f_{-1} & h_{-1} & e_{-1} \\
-2 & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

$$L_1 = \left(\sum_{l \geq 0} x^a_{1-l} x^a_l + \sum_{l<0} x^a_l x^a_{1-l} \right) \in \tilde{U}(\hat{g})$$

При $K = 1$ $\tilde{U}(\hat{g})$ имеет нетривиальный центр.

Какие есть центральные элементы в $\tilde{U}(\hat{g})$?

$Z(\hat{g})$ - центр $\tilde{U}(\hat{g})$:

$$L_n = \sum_{l \geq 0} x^a_{n-l} x^a_l + \sum_{l<0} x^a_l x^a_{n-l}$$

Выберем специальный базис в g:

$\mathcal{K}_c(g_1, g_2) = -\frac{1}{2} \mathrm{Tr}_g(\mathrm{ad}\, g_1 \cdot \mathrm{ad}\, g_2)$

Выберем ортонормированный базис отн. нее $\mathcal{K}_c(x^a, x^b) = -\delta^{ab}$

$\mathrm{Tr}_g(\mathrm{ad}\, x^a \cdot \mathrm{ad}\, x^b) = 2\delta^{ab}$

<u>Утверждение:</u> $[L_n, x^a_m] = 2m(k-1)\, x^a_{n+m}$

<u>Док-во:</u> $[x^a, x^b] = f^{ab}{}_c\, x^c$

$$x^a \longmapsto f^{a\gamma}{}_\delta$$

$$f^{a\gamma}{}_\delta \cdot f^{b\delta}{}_\gamma = 2\delta^{ab}$$

$$L_n = \sum_{e \geq 0} x^b_{n-e} x^b_e + \sum_{e<0} x^b_e x^b_{n-e}$$

$$[L_n, x^a_m] = 2m \cdot x^a_{m+n} \cdot K +$$

$$+ \sum_{e \geq 0} f^{ba}{}_c\, x^c_{n-e+m} x^b_e + \sum_{e \geq m} f^{ba}{}_c\, x^b_{n-e+m} x^c_e +$$

$$+ \sum_{e \leq m-1} f^{ba}{}_c\, x^c_e x^b_{n-e+m} + \sum_{e<0} f^{ba}{}_c\, x^b_e x^c_{n-e+m} =$$

$$= -\sum_{l=0}^{m-1} f^{ba}{}_c \, X^b_{n-l+m} X^c_l + \sum_{l=0}^{m-1} f^{ba}{}_c X^c_l X^b_{n-l+m} +$$

$$+ 2mK X^a_{m+n} = 2mK X^a_{m+n} +$$

$$+ \sum_{l=0}^{m-1} f^{ba}{}_c [X^c_l, X^b_{n-l+m}] =$$

$$= 2mK X^a_{m+n} + \sum_{l=0}^{m-1} \left(f^{ba}{}_c \left(f^{cb}{}_\gamma X^\gamma_{n+m} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + l \, \delta_{n+m,0} \, \delta^{cb} K \right) \right) =$$

$$= 2mK X^a_{m+n} - 2m X^a_{m+n} =$$

$$= 2m(K-1) X^a_{m+n} \quad \blacksquare$$

$$[L_n, X^a_m] = 2m(K-1) X^a_{m+n}$$

Поэтому при $K=1$ $\quad L_n \in Z(\hat{g})$

Утверждение:

$$Z(\hat{g}) \xrightarrow{f_1} \left(U(\hat{g}) \big/ U(\hat{g})\left(\hat{g}_+ \oplus \mathbb{C}(K-1)\right)\right)^{\hat{g}_+} \xrightarrow{f_2} U(\hat{g}_-)$$, существует цепочка гомоморфизмов алгебр.

$\mathbb{V}_0$ - вакуумный модуль

$|0\rangle$ - старший вектор.

$\hat{g}_+|0\rangle = 0$ $\qquad \hat{g}_+ = g[[t]]$

$K|0\rangle = 1|0\rangle$ $\qquad \hat{g}_- = t^{-1}g[t^{-1}]$

$U(\hat{g}_-)$ - порождает свободно

Заметим, что $U(\hat{g}) \big/ U(\hat{g})\left(\hat{g}_+ \oplus \mathbb{C}(K-1)\right) \simeq \mathbb{V}_0$

$$Z(\hat{g}) \xrightarrow{f_1} \mathbb{V}_0^{\hat{g}_+} \xrightarrow{f_2} U(\hat{g}_-)$$

$z \in Z(\hat{g})$

$Z(\hat{g}) \longrightarrow \mathrm{End}_{U(\hat{g})}(\mathbb{V}_0) \simeq$

$\simeq \mathrm{Hom}_{U(\hat{g})}\left(\mathrm{Ind}_{U(\hat{g}_+)\oplus \mathbb{C}K}^{U(\hat{g})} \mathbb{C}, \mathbb{V}_0\right) \simeq$

$\simeq \mathrm{Hom}_{U(\hat{g}_+)}(\mathbb{C}, \mathbb{V}_0) = \mathbb{V}_0^{\hat{g}_+}$

$\mathbb{V}_0^{\hat{g}_+} = \mathrm{End}_{U(\hat{g})}(U(\hat{g}_-)) \hookrightarrow \mathrm{End}_{U(\hat{g}_-)}(U(\hat{g}_-))$

Далее $\mathrm{End}_A(A^e) \simeq A^{opp}$

A - алгебра, A^e - левый модуль

$a \cdot b \to a \cdot b$

A^{opp}: $a * b = b \cdot a$

$\mathbb{V}_0^{\hat{g}_+} = \mathrm{End}_{U(\hat{g})}(U(\hat{g}_-)) \hookrightarrow \mathrm{End}_{U(\hat{g}_-)}(U(\hat{g}_-)) =$

$= U(\hat{g}_-)^{opp}$

Таким образом, мы определили сквозной гомоморфизм алгебр:

$$\begin{tikzcd} i: Z(\hat{g}) \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & \mathbb{V}_0^{\hat{g}_+} \arrow[r] & U(\hat{g}_-) \end{tikzcd}$$

$U(\hat{g}_-) \supset \mathrm{Im}(i)$ - коммутативная подалгебра.

$$A^{univ} = \mathrm{Im}(i) \subset U(\hat{g}_-)$$

<u>Пример!</u> $\widehat{s\ell}(2)$: e_n, f_n, h_n

$$L_n = \sum_{\ell \geq 0} \left(\frac{1}{2} h_{n-\ell} h_\ell + e_{n-\ell} f_\ell + f_{n-\ell} e_\ell\right) +$$

$$+ \sum_{\ell < 0} \left(\frac{1}{2} h_\ell h_{n-\ell} + e_\ell f_{n-\ell} + f_\ell e_{n-\ell}\right)$$

$$L_n \longmapsto L_n|0\rangle \quad \begin{cases} L_n \to 0, & n \geq 0 \\ L_{-1} \to 0 \end{cases}$$

$$L_{1n} = \sum_{e=-1}^{n+1} \left(\tfrac{1}{2} h_e h_{n-e} + e_e f_{n-e} + f_e e_{n-e}\right), \quad n \leq -2$$

$$L_{1-2} = \tfrac{1}{2} h_{-1} h_{-1} + e_{-1} f_{-1} + f_{-1} e_{-1}$$

$$i: Z(\hat{g}) \to U(\hat{g}_-) \qquad i_{-1}: S(g) \to S(\hat{g}_-)$$

$$i_{-1}(x) = x \otimes t^{-1}$$

$$U(\hat{g}_-) \supset \mathrm{Im}(i) = A^{univ}$$

Напоминание: В докладе Славы было $\underline{A^{univ}}$ и в нем были образующие $\overline{S}_K = i_{-1}(\Phi_K)$, и со свободными образующими $\{\partial_t^{n'} \overline{S}_K\}$

Факт 7: 1) $\exists$ S_K - такие образующие алгебра A^{univ}, более того $gr\, S_K = \overline{S}_K = i_{-1}(\Phi_K)$

2) A^{univ} свободно порождается $\{\partial_t^n S_K\}$; Про S_K известно, что они однородны отн. $t\partial_t$

§ 4. Коммутативные подалгебры в $U(\mathfrak{g})$

Мы имеем $A^{univ} \subset U(\hat{\mathfrak{g}}_-)$

$\hat{\mathfrak{g}}_- = t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]$

Фиксируем $z \neq 0$

$$\varphi_z : U(\hat{\mathfrak{g}}_-) \to U(\mathfrak{g}), \quad \varphi_z(x_m) = z^m x \in U(\mathfrak{g})$$

$$\varphi_\infty : U(\hat{\mathfrak{g}}_-) \to S(\mathfrak{g}) \quad \varphi_\infty(x_m) = \delta_{-1,m} x$$

$$\varphi_{z,\infty} : U(\hat{\mathfrak{g}}_-) \to U(\mathfrak{g}) \otimes S(\mathfrak{g})$$

$$\varphi_{z,\infty} = (\varphi_z \otimes \varphi_\infty) \circ \Delta$$

Обозначим $\underset{U(\mathfrak{g}) \otimes S(\mathfrak{g})}{\underset{\cap}{A(z,\infty)}} = \varphi_{z,\infty}(A^{univ})$

Утверждение 1: $A(z,\infty)$ порождена коэфф. Лорановского разложения (около $w = z$) и значением в бесконечности функции

$$\varphi_{w-z,\infty}(S_k) = S_k(w)$$

($A(z,\infty)$ не зависит от z)

Док-во:

Элементы $\varphi_{-z,\infty}(\partial_t^n S_k)$ порождают $A(z,\infty)$. Элементы $\varphi_{-z,\infty}(\partial_t^n S_k)$ есть коэфф. Тейлоровского разложения $\varphi_{w-z,\infty}(S_k) = S_k(w)$ в $w=0$.

$$S_k(w) = a_0 + \frac{a_1}{w-z} + \frac{a_2}{(w-z)^2} + \dots + \frac{a_l}{(w-z)^k}$$

<u>Следствие</u>: $A(z,\infty)$ не зависит от z.

$$L_{-2} = \sum_{a=1}^{\dim g} X_{-1}^a X_{-1}^a$$

$$\Delta(L_{-2}) = \sum_{a=1}^{\dim g} X_{-1}^a X_{-1}^a \otimes 1 + 2\sum_{a=1}^{\dim g} X_{-1}^a \otimes X_{-1}^a + \sum_{a=1}^{\dim g} 1 \otimes X_{-1}^a X_{-1}^a$$

$$\varphi_{w-z,\infty} \circ \Delta(L_{-2}) = \frac{1}{(z-w)^2} \sum_{a=1}^{\dim g} X^a X^a \otimes 1 + \frac{2}{w-z} \sum_{a=1}^{\dim g} X^a \otimes X^a + \sum_{a=1}^{\dim g} 1 \otimes X^a X^a$$

Добавляем характер $\mu \in g^*$

$$\underset{\displaystyle U(g)}{A_\mu \cap} = (id \otimes \mu)\, \underset{\displaystyle U(g)\otimes S(g)}{A(z,\infty) \cap}$$

Теорема 1: $gr A_\mu = A_\mu$

$$\begin{tikzcd} U(g) \arrow[r, "gr"] & S(g) \\ A_\mu \arrow[u, phantom, "\cup" description] \arrow[r, "gr"] & A_\mu \arrow[u, phantom, "\cup" description] \end{tikzcd}$$

Док-во:

E - дифференцирование $U(\hat{g}_-)\otimes S(g)$

$E(g_m \otimes 1) = \delta_{-1,m} \otimes g$

$E(1 \otimes g) = 0$

Лемма: $A(z,\infty) \subset U(g)\otimes S(g)$ порождены $(\varphi_z \otimes id)(E^j(S_k \otimes 1))$.

На самом деле это те же коэфф. Лорановского разложения $S_k(w) = \varphi_{w-z,\infty}(S_k)$ в точке $w = z$.

$(\varphi_z \otimes \varphi_\infty) \circ \Delta(S_k)$

S_k однородно относительно $t\partial_t$.

$(\varphi_z \otimes id)\left(E^j(S_k \otimes 1)\right)$

$(\varphi_{w-z} \otimes id)(S_k \otimes 1) = \frac{\#}{(w-z)^k}$

$(\varphi_{w-z} \otimes id)\left(E(S_k \otimes 1)\right) = \frac{\#}{(w-z)^{k-1}}$

$(\varphi_{w-z} \otimes id)\left(E^j(S_k \otimes 1)\right) = \frac{\#}{(w-z)^{k-j}}$

e - дифференцирование $S(g) \otimes S(g)$

$e(g \otimes 1) = 1 \otimes g$, $e(1 \otimes g) = 0$

$(id \otimes \mu)\, e^j(f \otimes 1) = \partial_\mu^j f$, где $f \in S(g)$

$\partial_\mu X = \mu(x)$ $(\mu \in g^*, x \in g)$

$gr(\varphi_z \otimes id)\left(E^j(S_k \otimes 1)\right) = z^{-\deg \Phi_k + j} e^j(\Phi_k \otimes 1)$

Φ_k - казимиры $U(g)$

$$\operatorname{gr} S_k = \overline{S}_k = i_{-1}(\Phi_k)$$

$$\operatorname{gr}(id \otimes \mu)(\varphi_z \otimes id)(E^j(S_k \otimes 1)) =$$

$$= z^{-\deg \Phi_k + j}(id \otimes \mu)\, e^j(\Phi_k \otimes 1) =$$

$$= z^{-\deg \Phi_k + j}\, \partial_\mu^j \Phi_k$$

но $\partial_\mu^j \Phi_k$ - образующие $A_\mu \subset S(g)$

Тогда $\operatorname{gr} A_\mu \supset A_\mu$

Так как A_μ - максимально, то верно и $\operatorname{gr} A_\mu = A_\mu$.

§ 5 Коммутативные подалгебры $U(g)^{\otimes n}$

$$u^{(i)} = 1 \otimes \ldots \otimes u \otimes \ldots \otimes 1 \in U(g_-)^{\otimes n}$$

i-ое место

$$\mathrm{diag}_n : U(\hat{g}_-) \to U(\hat{g}_-)^{\otimes n}$$

$$\mathrm{diag}_n(u) = \sum_{i=1}^{n} u^{(i)}$$

$$\varphi_{z_1,\dots,z_n,\infty} : U(\hat{g}_-) \longrightarrow U(g)^{\otimes n} \otimes S(g)$$

$$\varphi_{z_1,\dots,z_n,\infty} = (\varphi_{z_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{z_n} \otimes \varphi_\infty) \circ \mathrm{diag}_{n+1}$$

$$\varphi_{z_1,\dots,z_n,\infty}(g_m) = \sum_{i=1}^{n} z_i^m g^{(i)} + \delta_{-1,m}\, g^{(n+1)}$$

$$A(z_1,\dots,z_n,\infty) = \varphi_{z_1,\dots,z_n,\infty}(A^{univ})$$

Утверждения: 1) $A(z_1,\dots,z_n,\infty)$ порождена Лорановскими коэффициентами функций $S_k(w) = \varphi_{w-z_1,\dots,w-z_n,\infty}(S_k)$ в точках $w = z_i$, $i = 1,\dots,n$ и значением в бесконечности.

2) $A(z_1, \dots, z_n, \infty)$ не изменяется при одновременной замене $z_i \longrightarrow a z_i + b$

$$A_\mu(z_1, \dots, z_n) = (id \otimes \mu) A(z_1, \dots, z_n, \infty)$$

<u>Утверждение</u>: Алгебра $A_\mu(z_1, \dots, z_n)$ содержит Гамильтонианы Година.

$$H_i = \sum_{k \neq i}^{n} \sum_{a=1}^{\dim g} \frac{(x^a)^{(i)} (x^a)^{(k)}}{z_i - z_k} + \sum_{a=1}^{\dim g} \mu(x_a) x_a^{(i)}$$

<u>Док-во</u>: $L_{-2} = \sum_{a=1}^{\dim g} x^a_{-1} x^a_{-1} \in U(\hat{g}_-)$

$$\varphi_{w-z_1, \dots, w-z_n, \infty}(L_{-2}) = (\varphi_{w-z_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{w-z_n} \otimes \varphi_\infty) \sum_{a=1}^{\dim g} \sum_{i,j=1}^{n+1} (x^a_{-1})^{(i)} \cdot (x^a_{-1})^{(j)} = \sum_{a=1}^{\dim g} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{(x^a)^{(i)} (x^a)^{(j)}}{(w-z_i)(w-z_j)} + C^{(n+1)} +$$

$$+2\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x^a)^{(i)}}{w-z_i}(x^a)^{(n+1)}$$

$$(id\otimes\mu)\,\varphi_{w-z_1,\dots,w-z_n,\infty}(L_{-2})=$$

$$=\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{(x^a)^{(i)}(x^a)^{(j)}}{(w-z_i)(w-z_j)}+\mu\left(C^{(n+1)}\right)$$

$$2\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x^a)^{(i)}}{w-z_i}\mu(x^a)$$

Берем вычет в $w=z_i$

$$H_i=\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}}\sum_{j\neq i}\frac{(x^a)^{(i)}(x^a)^{(j)}}{z_i-z_j}+\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}}\sum_{i=1}^{n}(x^a)^{(i)}\mu(x^a)$$

Теорема 2: $\lim\limits_{s\to\infty}A_\mu(sz_1,\dots,sz_n)=$

$$=A_\mu^{(1)}\otimes\dots\otimes A_\mu^{(n)}$$

Следствие: Степень трансцендентности $A_\mu(z_1, \ldots, z_n)$ равна $\frac{n}{2}(\dim \mathfrak{g} + \mathrm{rk}\, \mathfrak{g})$ при параметрах $z_1, \ldots, z_n$ общего положения (μ - регулярный).