$$\left(\operatorname{gr} V_{\varkappa_c}(\mathfrak{g})\right)^{\mathfrak{g}[[t]]}$$

$$\deg P_i = d_i$$

$$\sigma: \operatorname{gr} \mathfrak{z}(\hat{\mathfrak{g}}) \hookrightarrow \left(\operatorname{Fun} \mathfrak{g}^*[[t]]\right)^{\mathfrak{g}[[t]]} = \mathbb{C}[\bar{P}_{i,n}]_{i=\overline{1,\ell},\, n<-d_i}$$

$$\operatorname{gr}\left(V_{\varkappa_c}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}[[t]]}\right)$$

хотим показать, что здесь есть изоморфизм

Слава

<u>Идея</u>

$$\mathbb{M}_{0,\varkappa_c} \longrightarrow V_{\varkappa_c}(\mathfrak{g}) \qquad \tilde{\mathfrak{b}}_+ = \mathfrak{b}_+ \oplus t\mathfrak{g}[[t]]$$

$$\phi: (\mathbb{M}_{0,\varkappa_c})^{\tilde{\mathfrak{b}}_+} \to V_{\varkappa_c}(\mathfrak{g})^{\tilde{\mathfrak{b}}_+} \simeq V_{\varkappa_c}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}[[t]]} \qquad \mathfrak{g}\cdot t^0 \quad V_{\varkappa_c}(\mathfrak{g})$$

$$\phi_{cl}: (\operatorname{gr} \mathbb{M}_{0,\varkappa_c})^{\tilde{\mathfrak{b}}_+} \to (\operatorname{gr} V_{\varkappa_c}(\mathfrak{g}))^{\tilde{\mathfrak{b}}_+} \simeq (\operatorname{Fun} \mathfrak{g}^*[[t]])^{\mathfrak{g}[[t]]} \qquad U(t^{-1}\mathfrak{g}[[t^{-1}]])$$

$$U(t^{-1} \quad \mathbb{M}_{0\varkappa_c}$$

$$\operatorname{gr} \mathbb{M}_{0,\varkappa_c} = \operatorname{Fun}\big(\underbrace{\mathfrak{g}^*[[t]] \oplus \mathfrak{n}_-^* \otimes t^{-1}}_{= \mathfrak{g}^*[[t]]_{(-1)}}\big)$$

$$\operatorname{gr} V_{\varkappa_c} = \operatorname{Fun}\left(\mathfrak{g}^*[[t]]\right)$$

<u>Утв</u> $\phi_{cl}: \operatorname{Fun} \mathfrak{g}^*[[t]]_{-1} \to \operatorname{Fun} \mathfrak{g}^*[[t]]$

индуцирован вложением $\mathfrak{g}^*[[t]] \overset{i}{\hookrightarrow} \mathfrak{g}^*[[t]]_{(-1)}$

т.е. $\phi_{cl} = i^*$

Зафиксируем базис $J_a \in \mathfrak{g}$ так, чтоб $J_a \in \mathfrak{b}_+$, $a \in \overline{1,s}$; $J_{a>s} \in \mathfrak{n}_-$

Зафиксируем базис $J_a \in \mathfrak{g}$ так, чтоб $J_{a \le s} \in \mathfrak{b}_+$, $J_{a>s} \in \mathfrak{n}_-$

тогда

$$\phi_{cl}\left(J_{a\le s}\otimes t^0\right) = 0$$
$$\phi_{cl}\left(J_a \otimes t^{n<0}\right) = J_a \otimes t^{n<0}$$

$l = \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$

Утв (Доказано Славой) 1) $(\mathrm{Fun}\ \mathfrak{g}^*[[t]])^{\mathfrak{g}[[t]]} = \mathbb{C}[\bar P_{i,n}]_{i=\overline{1,l},\ n<-d_i}$ $\boxed{\deg P_i = d_i}$

2) $(\mathrm{Fun}\ \mathfrak{g}^*[[t]]_{(-1)})^{\tilde{\mathfrak{b}}_+} \cong \mathbb{C}[\tilde P_{i,n}]_{\substack{i\in\overline{1,l}\\ n<0}}$ $\rightarrow$ $J_a(z) = \sum_{n<0}$

$P(J_a(z)) = \sum$

$$J_a(z) = \sum_{n<0} J_a[n]z^{-n-1}$$

$J_a(z) = \sum_{n\le 0}$

Замечание $\bar P_{i,n} \ne \tilde P_{i,n}$

$$\tilde P_{1,-1} = \underbrace{e_{-1}f_0}+\underbrace{\cancel{e_0 f_{-1}} + f_{-1}\cancel{e_0}} + f_0 e_{-1} + \frac{1}{2}\left(\cancel{h_0 h_{-1}} + h_{-1}h_0\right) =$$
$$= 2e_{-1}f_0 + \cancel{h_0 h_{-1}}$$

$$\bar P_{1,-1} = 0$$

$$P_{1,-2} = 2e_{-1}f_{-1} + \frac{1}{2}h_{-1}^2$$

Утв

$$\phi_{cl}: \mathrm{Fun}\left(\mathfrak{g}^*[[t]]_{(-1)}\right)^{\tilde{\mathfrak{b}}_+} \longrightarrow \mathrm{Fun}\left(\mathfrak{g}^*[[t]]\right)^{\tilde{\mathfrak{b}}_+}$$

$P_{1,-2} = 2e_{-1}f_{-1} + \frac{1}{2}h_{-1}$

Утв $\phi_{\mathfrak{a}}: \mathrm{Fun}(\mathfrak{g}^*[[t]]_{(t)})^{\tilde{\mathfrak{b}}_+} \to \mathrm{Fun}(\mathfrak{g}^*[[t]])^{\tilde{\mathfrak{b}}_+}$

сюръекция!

$\tilde{P}_{i,n} \longrightarrow \bar{P}_{i,n}$

Теперь найдем размеры $(M_{0,\varkappa_c})^{\tilde{\mathfrak{b}}_+}$.

Для этого заметим, что

Утв $M_{0,\varkappa_c} \cong W^+_{0,\varkappa_c}$ (где $W^+_{0,\varkappa_c}$ - это модуль Вакимото, в котором e и f поменялись ролями, т.е. f действуют просто, e сложно)

$f = a_+$
h

Утв $(W^+_{0,\varkappa_c})^{\tilde{\mathfrak{b}}_+} \supset \Pi_0$

$f = a$

$e = -a^{*2}a + e^{*}b + \partial a^*$

По это напряжено b.

Утв $\underbrace{\left(W^{+}_{0,\varkappa_c}\right)^{\tilde{b}_+} \supset \underline{\Pi_0}}$

в, что порождено b.

$$f = a$$
$$e = -a^{*2} a + a^* b + \partial a^*$$
$$h = 2a^* a + b$$

Мы имеем

$$\mathrm{ch}\, \Pi_0 = \underbrace{\prod_{i=1}^{\ell} \prod_{n_i \geq 0} \frac{1}{(1-q^{n_i})}}_{} = \underbrace{\mathrm{ch}\left(F_{un}\ g^*[[t]]_{(-1)}\right)^{g[[t]]}}_{}$$

$$\mathrm{ch}\, M^{\tilde{b}_+}_{0,\varkappa_c} \qquad M^{\tilde{b}_+}_{0,\varkappa_c} \to V^{\tilde{b}_+}_{\varkappa_c} \qquad \mathrm{ch}\left(gr\, M_{0,\varkappa_c}\right)^{\tilde{b}_+}$$

Имеем:

$$\begin{array}{ccc} gr\left(M^{\tilde{b}_+}_{0,\varkappa_c}\right) & \longrightarrow & gr\left(V^{\tilde{b}_+}_{\varkappa_c}\right) \\ \cong & & \downarrow \\ \left(gr\, M_{0,\varkappa_c}\right)^{\tilde{b}_+} & \xrightarrow[\phi_{ce}]{} & \left(gr\, V_{\varkappa_c}\right)^{\tilde{b}_+} \end{array}$$

это отобр. уже было

только что доказали

Теорема

Вывод $\quad gr\,\mathcal{g}(\hat{\mathfrak{g}}) \cong \mathrm{Fun}\left(\mathfrak{g}^*[[t]]\right)^{\mathfrak{g}[[t]]}$

Осталось понять, почему

$$\mathcal{g}(\hat{\mathfrak{g}}) = \bigcap_{i=1}^{e} \overline{V}_i[1] \subset \underline{\Pi_0^{\hat{\mathfrak{z}}_\varkappa}} \qquad \hat{\mathfrak{z}}; \varkappa \quad \varkappa = \epsilon\varkappa_0$$

(вложение $\mathcal{g}(\hat{\mathfrak{g}}) \subset \bigcap \overline{V}_i[1]$ мы уже знаем)

Это утверждение доказывается след образом:

мы знаем размер $\mathcal{g}(\hat{\mathfrak{g}})$ и сейчас узнаем размер $\bigcap_{i=1} \overline{V}_i[1]$

они одинаковы $\Rightarrow$ победа.

Часть 2

Часть 2

Опр W алгебра — это верш. алгебра роз. как

$$\bigcap \underline{\mathrm{Ker}\, V^{\nu}_{-\alpha_i}[1]} \subset \Pi_0^{\hat{\mathfrak{h}}_\nu}$$

Напомним, что $\Pi_0^{\hat{\mathfrak{h}}_\nu}$ — это Фоковский модуль для алгебры Гейзенберга $\hat{\mathfrak{h}}_\nu$ построенной по комм. алг $\mathfrak{h}$ со скал. пр-ем ν

$V^{\nu}_{-\alpha_i}(z)$ — вертексные операторы

$$\oint_0 dz\, V^{\nu}_{-\alpha_i}(z) = V^{\nu}_{-\alpha_i}[1]$$

Классический предел

$$\bar{V}_i[1] = \sum_{m\le 0} \bar{V}_i[m] D_{b'_{i,m-1}}$$

$$D_{b'_{i,m}} \cdot b'_{j,n} = \underline{a_{ij}}\, \delta_{n,m}$$

1) $\sum_{n\le 0} V_i[n] z^{-n} =$

$$= \exp\left(-\sum_{m>0} \frac{b'_{i,m}}{m} z^m\right)$$

Опр

e

Опр $W_{ce} = \bigcap_{i=1}^{\ell} \overline{V_i[1]}$

$$\Pi_0 \cong Fun(MOp^{gen})$$

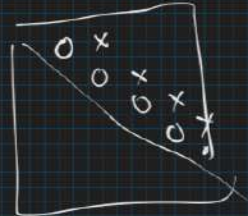
$$W_{cl} \cong Fun(Op)$$

$MOp^{gen} \supset N$ $\quad \boxed{ch(\Pi_0) = ch(W_{cl}) \cdot ch(Fun\, N)}$

$$Fun(MOp^{gen}) = Fun(Op) \otimes Fun(N)$$

$$MOp^{gen} \downarrow Op$$

$MOp^{gen}_p / N = Op$ $\qquad sl(n)$



$\mathfrak{g} = sl_{\ell+1}$ $\qquad ch(Fun\, N) = \frac{1}{(1-q)^{n-1}} \cdot \frac{1}{(1-q^2)^{n-2}} \cdots \frac{1}{1-q^{n-1}}$

$$ch(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})) = \prod_{i=1}^{\ell} \prod_{n_i \geq d_i}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{n_i})}$$

$\boxed{d_i = i+1}$

$$\Pi_0 \cong Fun(MOp^{gen})$$

$$ch(\Pi_0) = \prod^{\ell} \prod_{n_i = 0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{n_i})}$$

Теорема $\quad \mathfrak{z}(\hat{\mathfrak{g}}) \cong W_{ce}^{{}^L\mathfrak{g}} \cong Fun(Op(D, {}^L\mathfrak{g}))$