$$\begin{array}{cc} \mathcal{F} & \mathcal{F}_1 \\ \downarrow G & \downarrow B \\ \mathcal{D} & \mathcal{D} \end{array}$$

$$\nabla = d_t + g\,dt$$

$\mathfrak{g}/_{\mathfrak{b}} \in \mathcal{O}$. $\quad \mathcal{O} \subset [\mathfrak{n}_+, \mathfrak{n}_+]^{\perp}/\mathfrak{b}$

$\sum c_i f_i \quad c_i \neq 0$.

$sl_2 \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ $\quad C(t)$ нигде не зануляется $\leftrightarrow$. f_i — элементы соотв простым корням в $\mathfrak{n}_-$.

$$sl_n \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots \\ x_1 & \ddots & \cdots & \cdots \\ & x_2 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & x_{n-1} \end{pmatrix}$$

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ нигде не зануляются.

Утв. 1
Пр-во G опер. на $D^\times$ $Op_g(D^\times)$ изоморфно
$\mu^{-1}(\mathbb{O}_\chi)//LN_+$ и имеет Пуасс. структуру как гамильт. редукция.
коприс.
μ – это нек. отобр. моментов, $\mathbb{O}_\chi$ – орбита нек. элемента $\chi \in \hat{g}^*$
LN_+ – унипот. группа петель с алг. Ли $n_+((t))$.

калибр.
оу опер на $D(D^\times)$ приводятся к стандартной форме (действием B) в сл. sl_n, gl_n – Фробениус. норм. форма, в общем случае норм. форма Костанта. (Утв. 2.)

ад-опер. можем подейств. калибр. действием H, $h(t)$

$$\mathrm{Ad}_{h(t)}(d_t + A\,dt) = d_t + h(t)Ah(t)^{-1}\,dt - h(t)^{-1}\,dh(t). \qquad + h\,dh^{-1}$$

$A|_b \in \mathcal{O}$, действ. H подгр. в B мы можем привести к-ты A у f_i к 1. можно считать, что $A|_b = \sum f_i$.

$$\begin{pmatrix} c^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & c^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & c^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & bc \\ 1 & -a \end{pmatrix}.$$

$c \ne 0$.

$$+h(t)^{-1}\,dh(t)_{c^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}c'(t) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}c' \end{pmatrix} dt$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}c^{-1}c'(t) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}c^{-1}c'(t) \end{pmatrix} dt.$$

$$N_+ = [B, B]$$

$\mathfrak{gl}_n, \mathfrak{sl}_n$ $\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ 1 & 0 & & 0 \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} dt$. $q_1 = 0$ в случае $\mathfrak{sl}_n$.

Фроб. норм. форм.

$\cancel{\Sigma} q_1 E_{12} + q_2 E_{23} + \dots q_n E_{n-1\, n}$. $\exp(e_1) \curvearrowright A$. $\dots E_{13} + \dots E_{24} + \dots$

$e_1 =$

норм. форма Костанта. $d_t + \underline{p_{-1}\, dt + v(t) dt}$ $\quad p_{-1} = \sum f_i$

$v(t) \in \mathfrak{b}[[t]]$
$((t))$

$\cancel{\exp}\, Ad_{\exp(u)} (d_t + p_{-1} dt + c(t)\, dt)$,

$\exists!\, u \in \mathfrak{n}_+[[t]]$ и $\exists!\, c(t)$, где $c(t) \in \bigoplus V_i\, \mathbb{C}[[t]]$

i - экспоненты

$v(t) = \sum_j v_j(t)$ $\quad \in \mathfrak{g}_j[[t]]$

$p_{-1} \in \mathfrak{g} \rightsquigarrow h, p_1$. $\frac{h}{2}$ задаёт градуировку на $\mathfrak{g}$.

$p_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $p_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\mathfrak{g} = \oplus \mathfrak{g}_i$ $i \in \mathbb{Z}$.

где $ad_{\frac{h}{2}}$ действ. i

в $\mathfrak{g}_i$ для $i \geq 0$ мы можем зафикс. в.п. V_i $\quad$ $|$ н.з. $(V_i \neq 0)$

$$\underbrace{\mathfrak{g}_i = V_i \oplus ad_{p_{-1}} \mathfrak{g}_{i+1}}$$

набор таких i наз. экспонентами.

$$\sum_{j \geq 0} V_j(t) = -\underline{u'(t)} + \sum_{n \geq 0} \frac{ad^n_{u(t)}(p_{-1} + c(t))}{n!} \qquad c(t) = \sum_{j \in E} c_j(t)$$

для выбр. i $\underbrace{\overbrace{c_i} + [\overbrace{u_{i+1}, p_{-1}}]}$ выражается через V_i, c_j $j < i$ и u_j' $j \leq i$. $\square$.

$(M, \{\cdot,\cdot\})$ Пуасс. $G \curvearrowright M$ $\quad g\cdot\{f_1, f_2\} = \{g\cdot f_1, g f_2\}$.

действ. G пуасс.

$\mathrm{Lie}(G)$
$\parallel$
$\mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Vec}(M)$ $\quad \xi \mapsto X_\xi$:

$\mu^{-1}(\mathbb{O})/\!/G = \mathrm{Spec}\left(\left(\mathbb{C}[M]/I_{\mathbb{O}}\mathbb{C}[M]\right)^G\right)$

$G \curvearrowright M$ Гамильт., если $\exists$ G – эквивариантный гомоморфизм $\mu^* : S\mathfrak{g} \to \mathbb{C}[M]$

$\{\mu^*(\xi), f\} = X_\xi(f) \ (= df(X_\xi))$ $\quad \mu$ – отобр. моментов.

$\xi \in \mathfrak{g}$ $\quad \mu : M \to \mathfrak{g}^*$.

$\mathbb{O} \subset \mathfrak{g}^*$ $\quad \mathbb{C}[\mu^{-1}(\mathbb{O})] = \mathbb{C}[M]/I_{\mathbb{O}}\mathbb{C}[M]$.

$\mu^{-1}(\mathbb{O})/\!/G$ – это по опр. Гам. редукция $(M, \{\cdot,\cdot\})$

$\underline{\mathfrak{g}^*}$ на ней есть скобка $S(\mathfrak{g})$ $\{f, g\} = [f, g]$ $f, g \in \mathfrak{g}$.

ост. прод. по правилу Лейбница.

скобка Кост.-Кириллова.

$\underline{\mathcal{D}^\times}$ $L\mathfrak{g}$ ~~$\ni$~~ $g \otimes t^n$ $n \in \mathbb{Z}$.

$$[g \otimes t^n, h \otimes t^m] = [g, h] \otimes t^{n+m}.$$

$$0 \to \mathbb{C}K \to \hat{\mathfrak{g}} \to L\mathfrak{g} \to 0$$

$$\hat{\mathfrak{g}} \rightsquigarrow [g \otimes t^n, h \otimes t^m] = [g, h] \otimes t^{n+m} + (g, h) \cdot n \, \delta_{n+m,0} K.$$

$\hat{\mathfrak{g}}^*$ (топ. двойств.).

$$0 \to (Lg)^* \to \hat{g}^* \to \mathbb{C}d \to 0 \qquad d(\mathbb{K}) = 1$$

зафикс. ~~подпр.~~ в $\hat{g}^*$ где лин. функц. действ. 1 на $\mathbb{K}$

афф. гиперпл.

1. $\hat{g}^*_1 = \underbrace{d + (Lg)^*}$ $\longrightarrow$ $\nabla = d + Adt$, $A \in \hat{g} \otimes \Omega_K$

есть спар. $(Lg)^* \overset{\varphi}{\cong} g \otimes \Omega_K$ $\quad K = \mathbb{C}((t))$ раз. ф-ции 1-н $D^\times$

$g^\vee \otimes t^n \quad g^\vee \in g. \qquad g \otimes t^m dt$

$(g^\vee, g) \cdot \mathrm{Res}(t^{n+m} dt)$.

$$L\mathfrak{g} \xrightarrow{\text{коприс.}} \hat{\mathfrak{g}}^*_1 \quad \text{(действ. Гамильт.)} \qquad x \in L\mathfrak{g}, \quad d + f \in \hat{\mathfrak{g}}^*_1,$$

$$\bar{y} = y_0 k + y \in \hat{\mathfrak{g}} \qquad y \in L\mathfrak{g}$$

$$\langle x \cdot (d+f), \bar{y} \rangle = \langle d + f, [x, \bar{y}] \rangle =$$

$$= \langle d, -\mathrm{Res}(dx, y) k \rangle + \langle f, [x, y] \rangle =$$

$$= (-dx + [x, \varphi(f)], \bar{y}).$$

$$x \cdot (d + \varphi(f)) = d + [x, \varphi(f)] - dx = [x, d + \varphi(f)]$$

$\chi \in (L\mathfrak{n}_+)^*$ $\quad \chi(e^\alpha \otimes t^n) = -1$ $\quad \alpha$ — простой и $n = -1$.

в ост. случаях $= 0$.

рассм $(L\mathfrak{n}_+)^*$ как фактор $\hat{\mathfrak{g}}_1^*$

$\varphi(\chi)$ соотв $\underbrace{d_t + p_{-1}\, d_t}_{LN_+}$

$\underbrace{\chi \in \hat{\mathfrak{g}}_1^*}_{LN_+}$

$\varphi|_{(L\mathfrak{n}_+)^*} := \mu(\varphi)$

$$\mu^{-1}(\chi)/LN_+ \cong \mathcal{O}p_{\mathfrak{g}}(D^\times). \quad \square$$