О чём семинар

четверг, 30 сентября 2021 г. 12:23

Физическая система

(M,ω) – фазовое пространство

↖ симплектическое (Пуассоново) многообразие

$H \in \mathcal{O}(M) = A$

↖ Гамильтониан.

Квантовая версия:

ассоциативная алгебра

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{O}(M),\{\,,\,\}) \arrow[r, squiggly] & (\mathcal{A},[\,,\,]) \\ H \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] \arrow[r, squiggly, maps to] & \mathcal{H} \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] \end{tikzcd}$$

Замечание: есть также понятие (фильтрованного) квантования классической системы (M,H), $(\mathcal{A},\mathcal{H}) \leftarrow$ квантование (A,H) если на $\mathcal{A}$ имеется фильтрация т.ч. $\mathrm{gr}\,\mathcal{A} \simeq A$

↖ из-м Пуассоновых алгебр

$\mathrm{gr}\,\mathcal{H} = H$

Часто бывает, что $(\mathcal{A},\mathcal{H})$ „квантует" (M,H), но не в этом смысле, а в том смысле, что подходящий предел $(\mathcal{A},\mathcal{H})$ есть $(\mathcal{O}(M),H)$

Интегрируемость системы:

(M,H) интегрируемая, если $\exists\, H_1 = H, H_2, \dots, H_{\frac{\dim M}{2}} \in \mathcal{O}(M)$

т.ч.

1) $\{H_i, H_j\} = 0$

2) $d_m H_i$ ← линейно независимы $\forall m \in M$

Замечание: больше $\frac{\dim M}{2}$ независимых интегралов быть не может (т.к. ω – невырождена)

Замечание: условие 2 $\Rightarrow$ H_i ← алгебраически независимы.
(алгебраическая версия интегрируемости)

Замечание: интегрируемость даёт координаты момент-угол (см. т-му Арнольда – Лиувилля)

Интегрируемость квантовой системы: считаем, что $(\mathcal{A}, H)$ ← "квантование" некоторой (M, H)

$\exists H_1 = H, H_2, \dots, H_{\frac{\dim M}{2}} \in \mathcal{A}$ т.ч.

1) $[H_i, H_j] = 0$

2) H_i ← алгебраически независимы

Замечание: иногда можно проверить, что $\langle H_i \rangle \subset \mathcal{A}$ ← максимальная коммутативная

Диагонализация квантовой системы:

$(\mathcal{A}, H)$ квантовая интегрируемая система

Можем рассматривать представления $A \curvearrowright V$

Тогда $\langle H_i \rangle \curvearrowright V$ действие коммутирующими операторами.

Вопрос: существует ли базис $v_j \in V$ т.ч.

$$\forall i, \quad H_i \cdot v_j = a_{ij} v_j$$

чему равны a_{ij}?

Модель Годена

$\mathfrak{g}$ ← полупростая алгебра Ли

$\mathfrak{g}^*$ ← Пуассоново многообразие $\left(\begin{matrix} x, y \in \mathfrak{g} \subset \mathcal{O}(\mathfrak{g}) \\ \{x, y\} := [x, y] \end{matrix} \right)$

Симплектические листы: $\mathbb{O}_x = G \cdot x, \quad x \in \mathfrak{g}^*$

Теперь $M = \mathbb{O}_1 \times \dots \times \mathbb{O}_n \subset \mathfrak{g}^* \times \dots \times \mathfrak{g}^*$

наше фазовое пространство

Замечание: $\mathbb{O}_i = \mathbb{O}_{x_i}$ максимальной разм. если x_i - регулярный

инв. полиномы

$$\mathfrak{g}^* \xrightarrow{\Phi_i} \mathbb{A}^r, \quad r = \operatorname{rk} \mathfrak{g}$$

слои - замыкания $\overline{\mathbb{O}_x}$

Гамильтониан H пишется следующим образом:

$(\, , \,) \leftarrow$ форма Киллинга, $x_a, x^a \in \mathfrak{g}$ двойственный базис

$$C := \sum x_a x^a \in S^{\circ}(\mathfrak{g})$$

$X \in \mathfrak{g}$, z - параметр

$z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$

$\chi \in \mathfrak{g}$

$$X(z) := \sum_{i=1}^{n} \frac{X^{(i)}}{z - z_i} \leftarrow$$ (мероморфная) ф-я на M, зависящая от параметра z

Теперь $$H_\chi(z) := \sum_a x_a(z) X^a(z) + \chi(z)$$

Замечание:

Иногда рассм. $$H_{i,\chi} = \sum \frac{C^{(ij)}}{z_i - z_j} + \chi^{(i)}$$

$$H_{i,\chi} = \mathrm{Res}_{z = z_i} H_\chi(z) \Rightarrow \langle H_\chi(z) \rangle = \langle H_{i,\chi} \rangle$$

Квантовая модель Годена.

$$\mathcal{O}(\mathfrak{g}^* \times \dots \times \mathfrak{g}^*) = S(\mathfrak{g})^{\otimes n} \rightsquigarrow \underset{\cup}{U}(\mathfrak{g})^{\otimes n}$$

$$H_\chi(z) \rightsquigarrow \mathcal{H}_\chi(z) := \sum_a x_a(z) X^a(z) + \chi(z)$$

Замечание: мы проквантовали $\mathfrak{g}^* \times \ldots \times \mathfrak{g}^*$, если хотим квантовать $\mathcal{O}_1 \times \ldots \times \mathcal{O}_n$, то должны взять $U(\mathfrak{g})^{\otimes n} / \langle C_i^{(j)} - c_{ij} \rangle$

Казимиры (образующие центра $Z(\mathfrak{g})$)

подходящий центральный характер

Задача:

1) Интегрируемость модели Годена и её квантового аналога?

2) Диагонализация квантовой модели Годена в представлениях $V_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes V_{\lambda_n}$.

Подалгебры Мищенко-Фоменко и связь с моделью Годена

Допустим $n = 1$ (у нас только одна точка z_1)

Тогда фазовое пространство $\mathfrak{g}^*$

и в $S^\bullet(\mathfrak{g}^*)$ лежит

$$H = \chi \in S^\bullet(\mathfrak{g}^*)$$

Хотим: Пуассоново коммутативную подалгебру в $S^\bullet(\mathfrak{g}^*)$, содержащую χ.

Содержит $\underline{\Phi_1, \dots, \Phi_r, x}$

Замечание: $\Phi_1 = \sum x_a x^a \Rightarrow \partial_x \Phi = \sum_a (x, x_a) x^a + x_a (x, x^a) = 2x$

идея доказательства: Magri-Lenart construction

Утв: $A_x := \langle \partial_x^i \Phi_j \rangle$ ← Пуассонова коммутативная!

Если x-регулярный, то $\{\partial_x^i \Phi_j\}$ алгебраически независимы.

Замечание! на самом деле $\forall x \in \mathfrak{g}$ подалгебра

$$A_x \ \underline{\text{максимальна}} \ \text{в} \ S^\bullet(\mathfrak{g})^{Z_\mathfrak{g}(x)}$$

Интегрируемость модели Годена

Цель: обобщить конструкцию $A_x \subset S^\bullet(\mathfrak{g})$

и построить алгебру $A_x(z_1, \dots, z_n) \subset S^\bullet(\mathfrak{g})^{\otimes n}$,

содержащую Гамильтонианы $H_x(z)$

Замечание: $H_x(z) = \sum_a x_a(z) x^a(z) + x(z)$

Теперь $x(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x^{(i)}}{z - z_i} = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} z^{k-1} z_i^{-k} x^{(i)}$ $(*)$

есть стандартная $\{,\}$

Рассмотрим теперь алгебру $S^\bullet(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])$, имеется вложение:

$$S^\bullet(\mathfrak{g}) \xhookrightarrow{2_{-1}[z]} S^\bullet(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])[z]$$

$$\cup \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cup$$

$$\mathfrak{g} \ni x \longmapsto -\sum_{k=1}^{\infty} z^{k-1} x[-k]$$

Замечание: $(*)$ это в точности $ev_{z_1,\dots,z_n}(2_{-1}[z](x))$

Определим подалгебру $A^{univ} \subset S^\bullet(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])$ так:

$$A^{univ} = \langle \text{Коэфф. рядов } 2_{-1}[z](\Phi_i) \rangle.$$

похоже на определение A_χ

Замечание:

$$A^{univ} = \left\langle \partial_t^k\, 2_{-1}(\Phi_i) \;\middle|\; \begin{matrix} k=0,1,\dots \\ i=1,\dots,\mathrm{rk}\,\mathfrak{g} \end{matrix} \right\rangle$$

$$(\partial_t(x \otimes t^m) = m\, x \otimes t^{m-1})$$

Здесь $2_{-1}: S^\bullet(\mathfrak{g}) \hookrightarrow S^\bullet(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])$

$$\mathfrak{g} \ni x \longmapsto x \otimes t^{-1}$$

Предложение: A^{univ}

1) Пуасс. коммут подалгебра в $S^{\bullet}(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])$

2) A^{univ} свободно порождена $\partial_t^n \tau_{-1}(\Phi_i)$, $n=0,1,\dots$

$\Updownarrow$

свободно порождена коэфф $\tau_{-1}[z](\Phi_i)$

$\forall z \neq 0$ имеется

$$ev_z : S^{\bullet}(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]) \longrightarrow S^{\bullet}(\mathfrak{g})$$

$$x \otimes t^m \longmapsto z^m x$$

$$ev_\infty : S^{\bullet}(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]) \longrightarrow S^{\bullet}(\mathfrak{g})$$

$$x \otimes t^m \longmapsto \delta_{-1,m} \cdot x$$

Наконец $\chi \in \mathfrak{g}$ индуцирует характер $S^{\bullet}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\chi} \mathbb{C}$

$$x \longmapsto (\chi, x)$$

Беря эвалюэйшн в $z_1, z_2, \dots, z_n, \infty$:

$$\begin{tikzcd}
ev_{z_1,\dots,z_n,\infty}: S^\cdot(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]) \arrow[r] & S^\cdot(\mathfrak{g})^{\otimes n} \otimes S^\cdot(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\chi"] \\
A^{univ} \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[dr] & S^\cdot(\mathfrak{g})^{\otimes n} \\
 & A_\chi(z_1,\dots,z_n) \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"]
\end{tikzcd}$$

Замечание: все отображения выше являются Пуассоновыми, поэтому $A_\chi(z_1,\dots,z_n)$ – Пуассонова коммутативная подалгебра

Теорема: если χ регулярный, то $A_\chi(z_1,\dots,z_n)$

интегрирует нашу систему Годена

Замечание: в общем случае $A_\chi(z_1,\dots,z_n) \subset \left(S^\cdot(\mathfrak{g})^{\otimes n}\right)^{Z_\mathfrak{g}(\chi)}$

максимальная Пуассонова коммутативная

Замечание: $A_\chi(z_1)$ не зависит от z_1 и равна A_χ

Можно заметить, что $A_\chi(z_1,\dots,z_n) = A_\chi(z_1-u,\dots,z_n-u)$

$\forall u$

Квантование системы Годена

Мы построили алгебры $A_\chi(z_1,\dots,z_n) \in S^\circ(\mathfrak{g})^{\otimes n}$

Вопрос: как построить аналогичные подалгебры в $U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$?

Есть два подхода:

Подход 1 : проквантовать алгебру $A^{univ} \subset S^\bullet(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])$ при помощи некоторой $\mathcal{A}^{univ} \subset U(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])$ и определить

$$\mathcal{A}_\chi(z_1,\dots,z_n) := ev_{z_1,\dots,z_n,\infty,\chi}\left(\mathcal{A}^{univ}\right)$$

Подход 2 : рассмотреть алгебру Бете

$$B(\exp(x)) \subset Y(\mathfrak{g})$$

и пользуясь тем, что $\mathrm{gr}\, Y(\mathfrak{g}) \simeq U(\mathfrak{g}[t])$ выродить

$$B(\exp(x)) \rightsquigarrow \overset{+}{\mathcal{A}}{}^{univ}_\chi \subset U(\mathfrak{g}[t])$$ и

определить

$$\mathcal{A}_\chi(z_1,\dots,z_n) := ev_{z_1,\dots,z_n}\left(\overset{+}{\mathcal{A}}{}^{univ}_\chi\right)$$

Замечание: подход 2 (замкнут в себе) независим от подхода 1 только в типе A.

Обсуждение подхода 2

Считаем $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n \longrightarrow Y_\hbar(\mathfrak{g}) = \left\langle t_{ab}^{(r)}, \hbar \;\middle|\; \begin{matrix} r \geq 1 \\ 1 \leq a,b \leq n \end{matrix} \right\rangle$

$$[t_{ab}^{(r+1)}, t_{cd}^{(s)}] - [t_{ab}^{(r)}, t_{cd}^{(s+1)}] = \hbar\left(t_{cb}^{(r)} t_{ad}^{(s)} - t_{cb}^{(s)} t_{ad}^{(r)}\right)$$

Напомним, что на $Y_\hbar(\mathfrak{g})$ есть градуировка $\deg t_{ij}^{(r)} = r-1$, $\deg \hbar = 1$

$$Y_0(\mathfrak{g}) \simeq U(\mathfrak{g}[t])$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{t}_{ij}^{(r)} \longmapsto e_{ij} \otimes t^{r-1}$$

$$C \in GL_n \rightsquigarrow B(C)$$

$$B(C) = \left\langle \mathrm{tr}\, A_n T_1(u) \dots T_k(u - \hbar(k-1))\, C_{k+1} \dots C_k \right\rangle$$

элементы $Y(\mathfrak{g})[[u^{-1}]] \otimes (\mathrm{End}(\mathbb{C}^n))^{\otimes n}$

$$T(u) = (t_{ij}(u)), \quad t_{ij}(u) = 1 + \hbar \sum_{r \geq 1} u^{-r} t_{ij}^{(r)}$$

$$A_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \sigma$$

Предложение: $B(C)$ ← коммутативная.

Мы можем собрать все образующие $B(C)$ в единую образующую ф-ю: (от u, ∂_u)

$$\mathrm{tr}\, A_n \left(e^{-\hbar\partial_u} T_1(u) - C_1\right) \dots \left(e^{-\hbar\partial_u} T_n(u) - C_n\right)$$

$$\parallel$$

$$\det\left(e^{-\hbar\partial_u} T(u) - C\right) \qquad (*)$$

Теперь покажем, как построить ${}^{+}A_0^{univ} \subset U(\mathfrak{g}[t])$
(общий случай делается аналогично)

Рассмотрим $C = 1$

Утверждение:

$$\lim_{\hbar \to 0} \det \hbar^{-1}\left(\left(e^{-\hbar\partial_u} T(u)\right) - 1\right) = \det\left(E(u) - \partial_u\right),$$

где $E(u) = \left(E_{ij}(u)\right) \in U(\mathfrak{g}[t])[[u^{-1}]]$

$$E_{ij}(u) = \sum_{r \geq 0} \left(E_{ij} \otimes t^r\right) u^{-r-1}$$

Д-во: $e^{-\hbar\partial_u} = 1 - \hbar\partial_u + o(\hbar^2)$

$$T(u) = \underset{?}{1} + \mathbb{T}(u), \quad \mathbb{T}(u) = \hbar\left(\sum_{r \geq 1} t_{ij}^{(r)} \cdot u^{-r}\right)$$

$$e^{-\hbar\partial_u} \cdot T(u) = 1 - \hbar\partial_u + \mathbb{T}(u) - 1 + o(\hbar^2) =$$

$$= \underbrace{-\hbar\partial_u + \mathbb{T}(u)} + o(\hbar^2)$$

После умножения на $\hbar^{-1}$ из $-\hbar\partial_u \rightsquigarrow -\partial_u$

из $\mathbb{T}(u) = \hbar\left(\sum_{r \geq 1} t_{ij}^{(r)} u^{-r}\right) \rightsquigarrow \sum_{r \geq 1} t_{ij}^{(r)} u^{-r}$

Переходя к пределу $h \to 0$ и имеем в точности

$$(**)\quad \det(E(u)-\partial_u)$$ ← мы знаем, что коэфф. коммутируют, они порождают $\overset{+}{\mathcal{A}}{}_0^{\mathrm{univ}}$

Замечание: в общем случае получим $\det(E(u)-\partial_u-\chi)$, это производящая ф-я для $\overset{+}{\mathcal{A}}{}_\chi^{\mathrm{univ}}$

Вывод: коэффициенты это в точности $ev_{z_1,\dots,z_n}(**)$

$$\det\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{E^{(i)}}{u-z_i}-\partial_u-\chi\right)$$

порождают $\mathcal{A}_\chi(z_1,\dots,z_n)$

Обсуждение подхода 1

Идея: для построения $\bar{\mathcal{A}}^{\mathrm{univ}} \subset U(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])$ использовать центр $Z \subset \tilde{U}_{-h^\vee}(\hat{\mathfrak{g}})$, $h^\vee$ ← двойственное число Коксетера

↖ центр на критическом уровне

А именно: рассмотрим $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}[[t]] \oplus t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$

Определим $\mathbb{V}_0 := \mathrm{Ind}^{\hat{\mathfrak{g}}}_{\underbrace{\mathfrak{g}[[t]]}_{\text{действует нулём}}\oplus \underset{\text{д-ет } -h^\vee}{\mathbb{C}K}} \mathbb{C} = U(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])$

как $U(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])$ модуль

Тогда

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[rrrdd, bend right] & \mathrm{End}_{\hat{\mathfrak{g}}}(\mathbb{V}_0) \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathrm{Hom}_{U(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])}(\mathbb{V}_0,\mathbb{V}_0) \arrow[r, phantom, "="] & U(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])^{opp} \\ & & & \cup \\ & & & \bar{\mathcal{A}}^{univ} \end{tikzcd}$$

Замечание про связь с конформными блоками

Пусть $M_1,\dots,M_n$ ← представления $\mathfrak{g}$

Рассмотрим $z_1,\dots,z_n,\infty \in \mathbb{C}P^1$

↖ различные точки

Определим $\mathbb{M}_{z_i} := \mathrm{Ind}^{\hat{\mathfrak{g}}_{z_i}}_{\mathfrak{g}[[t-z_i]]\oplus\mathbb{C}K} M_i$

Также определим $\mathbb{I}_{\chi,\infty} := \mathrm{Ind}^{\hat{\mathfrak{g}}_{\infty}}_{t^{-1}\mathfrak{g}[[t^{-1}]]\oplus\mathbb{C}K} \mathbb{C}_\chi$

Тогда конформный блок это:

$$H(\mathbb{M}_{z_1},\dots,\mathbb{M}_{z_n},\mathbb{I}_{\chi,\infty}) := \left(\mathbb{M}_{z_1}\otimes\dots\otimes\mathbb{M}_{z_n}\otimes\mathbb{I}_{\chi,\infty}\right)\Big/\mathfrak{g}(\mathbb{P}^1\setminus\{z_1,\dots,z_n,\infty\})$$

Предложение: естественное вложение индуцирует из-м:

$$\begin{tikzcd} M_1\otimes\dots\otimes M_n \arrow[r, "\sim"] & H(\mathbb{M}_{z_1},\dots,\mathbb{M}_{z_n},\mathbb{I}_{\chi,\infty}) \arrow[loop below] \\ & Z \arrow[dl, squiggly] \\ {} & \end{tikzcd}$$

← можно посадить в любую из точек

Коммутативная подалгебра

$$\mathcal{A}_\chi(M_{z_1},\dots,M_{z_n}) \subset \mathrm{End}(M_1\otimes\dots\otimes M_n)$$

Взяв $M_{z_1}=\dots=M_{z_n}=U(\mathfrak{g})$ получим алгебру

$$\mathcal{A}_\chi(z_1,\dots,z_n)$$