Оперы Миуры и Картановы связности 2.

$G \supset B \rightleftarrows T$

Предл. Если $G = G_{adj}$, и $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_B, \nabla)$ – G-опер на X, то

$$\mathcal{E}_T := \mathcal{F}_B \times_B T \cong \Omega_X^{\check\rho}, \quad \text{где}$$

$$\check\rho = \sum_{i=1}^{\mathrm{rk}\, G} \check\omega_i : \mathbb{C}^* \to T.$$

Напоминание: Ω_X^1 – линейное рассл. над X.

$\Rightarrow$ $\Omega_X^* := \Omega_X^1 \setminus \{\text{нулевое сечение}\}$ – главное $\mathbb{C}^*$-рассл над X.

По кохарактеру $\check\rho : \mathbb{C}^* \to T$ строим главное T-расслоение

$$\Omega_X^{\check\rho} := \Omega_X^* \times_{\mathbb{C}^*, \check\rho} T = \frac{\Omega_X^* \times T}{\mathbb{C}^*}, \quad \text{где}$$

$\mathbb{C}^* \curvearrowright \Omega_X^* \times T$ по формуле $z \cdot (\omega, t) = (\omega z, \check\rho(z^{-1}) t)$.

$SL_2 \curvearrowright V \cong \mathbb{C}^2$
$E = \mathcal{F} \times_G V$
$B \curvearrowright F.V$
$F.E = \mathcal{F}_B \times_B F.V$

Следствие: $G = SL_2$, G-опер $\searrow$ $(E, F.E = (0 = F_0E \subset F_1E \subset F_2E = E), \nabla)$

$$0 \to F_1E \to E \to E/F_1E \to 0 \quad (\text{над } X).$$

Тогда утверждение, что $F_1E \cong \Omega_X^{1/2}$, $E/F_1E \cong \Omega_X^{-1/2}$.

Опр: G-опер Шуры — это $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_B, \nabla, \mathcal{F}_B')$, где

1) $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_B, \nabla)$ — G-опер;

2) $\mathcal{F}_B' \subset \mathcal{F}$ — B-редукция, причем $\nabla \circlearrowleft \mathcal{F}_B'$.

Опр. G-опер Шуры $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_B, \nabla, \mathcal{F}_B')$ н-ся общим, если редукции $\mathcal{F}_B$ и $\mathcal{F}_B'$ находятся в общ. полож.

$(\Leftrightarrow)$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}/B \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\cong"] & (\mathcal{F}_B \times_B G)/B \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathcal{F}_B \times_B G/B \\
X \arrow[u, bend left, "s'"] \arrow[rr, dashed] & & \mathcal{F}_B \times_B \mathcal{U} \arrow[u, phantom, "\cup"]
\end{tikzcd}
$$

Локально $\mathcal{F}_B'$ имеет вид $b \cdot w_0 \cdot B$

$\mathcal{U} = B w_0 B \subset G/B$

Пример: $G = SL_n$ $\mathcal{F}_B, \mathcal{F}_B' \rightsquigarrow F_\cdot E, F_\cdot' E \subset E$.

Усл. общего положения $\Leftrightarrow$ $F_i E \cap F_{n-i}' E = 0$

$(\mathrm{rk} F_i E = \mathrm{rk} F_i' E = i)$.

Конструкция: $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_B, \nabla, \mathcal{F}_B')$ — общий G-опер Шуры.

1) $\mathcal{F}_B' \subset \mathcal{F} \circlearrowleft G \ni w_0$.

$\mathcal{F}_{B_-} := \mathcal{F}_B' \cdot w_0 \circlearrowleft B_- = w_0^{-1} B w_0$

$\circlearrowleft$ $T = B \cap B_-$

2) Положим $\mathcal{F}_T := \mathcal{F}_B \cap \mathcal{F}_{B_-} \subset \mathcal{F}$

Утв: $\mathcal{F}_T$ - шевное T-расш.

D-во: $x \in X$

$$\mathcal{F}_T|_x = \mathcal{F}_B|_x \cap \mathcal{F}_{B_-}|_x =$$

$$= B \cap \underbrace{b \cdot w_0 B \cdot w_0}_{\text{усл. общего положения}} =$$

см. пункт 1.

$$= b\left(B \cap w_0 B w_0\right) = b \cdot T.$$

$\square$

Тем самым $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}$ - T-редукция

Пример: $G = SL_2$

$$0 \to F_1 V \to V \to V/F_1 V \to 0 \quad , \quad \mathbb{C}^2 \cong V \in Rep(SL_2).$$

$$\rightsquigarrow$$

$$0 \to F_1 E \to E \to E/F_1 E \to 0 \qquad (\ast\ast)$$

Если на E есть структура общего опера Миуры, то

$$E = \mathcal{F} \times_G V \cong \mathcal{F}_T \times_T V \quad \cong$$

$V \cong F_1 V \oplus V/F_1 V$ как T-представлени

$\cong F_1 E \oplus E/F_1 E$. Т.е. $(\ast\ast)$ расщепляется.

$$\begin{array}{ccccc} F_1E & \subset & E & \to & E/F_1E \\ & & \cup & & \\ & & F_1'E & & \end{array}$$

$\left(\text{усл. общ} \iff F_1E \cap F_1'E = 0 \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad F_1'E \hookrightarrow E \to E/F_1E$ – изоморфизм

$\Rightarrow$ задано расщепление $E/F_1E \cong F_1'E \to E$.

Замечание:

1) $\mathcal{G}_T := \tilde{\mathcal{F}}_B \times_B T \cong \tilde{\mathcal{F}}_T \times_T B \times_B T \cong \tilde{\mathcal{F}}_T$.

2) $\mathcal{G}'_T := \tilde{\mathcal{F}}'_B \times_B T \cong \left(\tilde{\mathcal{F}}_{B_-} \cdot w_0\right) \times_B T \cong$

$\cong \left(\tilde{\mathcal{F}}_{B_-} \cdot \cancel{w_0}\right) \times_{\cancel{w_0} B_- w_0} T \cong \tilde{\mathcal{F}}_{B_-} \times_{B_-} w_0 T \cong$

$\cong \tilde{\mathcal{F}}_T \times_T B_- \times_{B_-} w_0 T \cong \tilde{\mathcal{F}}_T \times_T w_0 T \cong \tilde{\mathcal{F}}_T \cdot w_0$

$(T \cong w_0 T w_0)$

Конструкция: $(G = G_{adj})$

$(\mathcal{F}, \mathcal{F}_B, \nabla, \mathcal{F}_B')$ – общий G-опер Миуры.

∇ индуцирует связность на $\mathcal{G}'_T := \tilde{\mathcal{F}}'_B \times_B T$

$\cong$

$\tilde{\mathcal{F}}_T \cdot w_0 \cong \mathcal{G}_T \cdot w_0$

$\Rightarrow$ индуцирует связность на $\underbrace{\mathcal{G}_T \cong \Omega_X^{\check{\rho}}}$.

Это задаёт отображение

$$\beta : \mathcal{MOp}_G^{gen}(X) \longrightarrow \mathrm{Conn}(\Omega_X^{\check{\delta}}).$$

Предложение: β - изоморфизм.

Пример:

$$d + \begin{pmatrix} * & & & \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & * \end{pmatrix} \otimes dt \mapsto d + \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \otimes dt$$

$G = SL_n$:

$$\mathcal{G}_T \times_T V \cong \mathcal{G}_T \times_T \left(\bigoplus_{j=1}^{n} F_j V / F_{j-1} V \right) \cong$$

$$\cong \bigoplus_{j=1}^{n} \Omega_X^{+\frac{(n-1)}{2} - (j-1)}$$

Доказательство: Возьмём $\hat{\nabla} \in \mathrm{Conn}(\Omega_X^{\check{\delta}})$.

1) $\mathcal{F} := \Omega_X^{\check{\delta}} \times_T G$

2) $\mathcal{F}_B := \Omega_X^{\check{\delta}} \times_T B$

3) $\mathcal{F}_{B_-} := \Omega_X^{\check{\delta}} \times_T B_-$, $\mathcal{F}_B' = \mathcal{F}_{B_-} w_0$.

4) связность на $\mathcal{F}$:

4.1) индуцируем $\hat{\nabla}$ на $\mathcal{F}$.

4.2) $\mathrm{Conn}(\mathcal{F})$ - аффинное пр-во над

$$\Gamma(X, \mathfrak{g}_{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1).$$

$$\mathrm{Conn}\left(\mathcal{F} \cong \Omega_X^{\check{\rho}} \times_T G\right) \overset{\text{(}\cong\text{)}}{}$$

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \times_G \mathfrak{g} \cong \Omega_X^{\check{\rho}} \times_T \mathfrak{g} \cong$$

$$\cong \Omega_X^{\check{\rho}} \times_T \Big(\mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\substack{\alpha \in \Phi \\ \alpha \neq 0}} \mathfrak{g}_\alpha\Big)$$

$$\overset{(\cong)}{} \quad \mathrm{Conn}(\Omega_X^{\check{\rho}}) \times \Gamma\Bigg(X, \underbrace{\Big(\bigoplus_{\substack{\alpha \in \Phi \\ \alpha \neq 0}} \big(\Omega_X^{\check{\rho}} \times_T \mathfrak{g}_\alpha\big) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1\Big)}_{\cup}\Bigg)$$

$$\bigoplus_{\alpha \in \Delta_-} (\mathcal{O}_X) \cong \bigoplus_{\alpha \in \Delta_-} \big(\underbrace{\Omega_X^{\check{\rho}} \times_T \mathfrak{g}_\alpha}_{\substack{\wr\shortparallel \\ (\Omega_X^1)^{\otimes \langle \check{\rho}, \alpha\rangle} \\ \wr\shortparallel \\ (\Omega_X^1)^\vee}}\big) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1$$

$$\bigcup$$

$$p_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Положим $\nabla := \hat{\nabla} + p_{-1}$. $\square$

Рассмотрим $\mathrm{MOp}_G^{gen}(D)$, $D = \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[[t]]$.

$$\begin{array}{c} \mathrm{MOp}_G^{gen}(D) \\ \pi \big\downarrow \\ \mathrm{Op}_G(D) \end{array}$$

где $\pi\left(\left(\mathcal{F}, \mathcal{F}_B, \nabla, \mathcal{F}_B'\right)\right) = \left(\mathcal{F}, \mathcal{F}_B, \nabla\right)$

<u>Утв</u>: Пусть $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_B, \nabla)$ — G-опер над D. Задать точку в $\pi^{-1}\left((\mathcal{F}, \mathcal{F}_B, \nabla)\right)$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ задать B-редукцию $(\mathcal{F}_B')_0 \subset \mathcal{F}|_0$ слоя над $0 \in D$ в общем положении с $(\mathcal{F}_B)_0 \subset \mathcal{F}|_0$.

<u>Определение</u>: P — главное G-рассл над X.

связность в P — это

$\forall u \in P \quad Q_u \subset T_uP$ т.ч. $T_uP = Q_u \oplus G_u$,

$\uparrow$ касат. пр-во к слою $P \to X$.

и $(R_g)_* Q_u = Q_{ug}$.

$Q_u = \ker \omega|_u$

$\Leftrightarrow \quad \omega \in \Omega^1_P \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$ т.ч.

1) $\omega(A^*) = A$, $\quad A \in \mathfrak{g}$.

$$(A^*)_u = \left(\frac{d}{dt} u \exp(tA)\right)\Bigg|_{t=0}$$

2) $(R_g)^* \omega = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\omega)$

Задать B-редукцию $P_B \subset P$ (=)

(=) задать сечение $s: X \to P/B$

$\omega \in \Omega^1_P \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$. ⇝ $\omega/_B \in \Omega^1_P \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ —

— спускается на фактор P/B.

∇ сохраняет редукцию P_B (=) $s^*\omega/_B = 0$

<u>Д-во утв.:</u>

Нужно построить $s': D \to \tilde{\mathcal{F}}/B$

$\omega/_B \in \Omega^1_{\tilde{\mathcal{F}}/B} \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}/\mathfrak{b}$.

фиксируем

$$\begin{tikzcd}
 & & \tilde{\mathcal{F}}/B \arrow[d] \\
\operatorname{Spec}\mathbb{C} = 0 \arrow[rru] \arrow[rr] & & D \arrow[u, dashed, bend left, "\exists!\, s'"]
\end{tikzcd}$$

$s'^*\omega/_B = 0$

$\operatorname{Ker}(\omega/_B)$ ⇝ задавать продолжение

$0 \to \tilde{\mathcal{F}}/B$ до

$$\begin{tikzcd}
 & & & \tilde{\mathcal{F}}/B \arrow[d] \\
0 \arrow[rrru] \arrow[r] & \operatorname{Spec}\mathbb{C}[t]/t^2 \arrow[rru] \arrow[rr] & & D \arrow[u, dashed, bend right, "\exists"']
\end{tikzcd}$$

$\exists$ в силу гладкости

$\square$

<u>Следствие:</u> Отображение $\pi : MOp_G^{gen}(D) \to Op_G(D)$ сюръективно.

Более того, рассмотрим

$$\begin{tikzcd} F_B^{univ} \arrow[r] & Op_G(D) \\ (F_B)_0 \arrow[u] & * \arrow[l] \arrow[u, "p(F, F_B, \nabla)"'] \end{tikzcd}$$

— универсальное гладкое B-расслоение над $Op_G(B)$.

Есть комм. диагр.

$\mathcal{U} = B w_0 B \subset G/B$

$$\begin{tikzcd} MOp_G^{gen}(D) \arrow[r, "\bar{\pi}"] \arrow[d, "\cong"] & Op_G(D) \\ F_B^{univ} \times_B \mathcal{U} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

<u>Утв:</u> $F_B^{univ} \times_B \mathcal{U} \to Op_G(D)$ —

— гладкое расслоение с группой $F_B^{univ} \times_B N$, (B действует на N присоединенно)

(Следует из того, что N действует свободно транзитивно на $\mathcal{U}$)

$$\begin{array}{c} G' \\ \downarrow \\ X \end{array} \leftarrow \text{группа над } X$$

G - алг группа над k

$$G' = \begin{array}{c} G \times X \\ \downarrow \\ X \end{array}$$