Оперы Миуры и Картановы связности.

Глобн. рассм.:

G — алг. группа

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d] \arrow[loop right, "G"] \\ X \end{tikzcd}$$

$\leftarrow$ свободно транзитивно на слоях.

— гладкий сюрь. морфизм.

X — кривая

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "\varphi_\alpha", "\cong"'] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_\alpha \times G \arrow[dl] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

$X = \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, g) = (x, \varphi_{\beta\alpha}(g)),$$

$$\varphi_{\beta\alpha} : U_{\beta\alpha} \to G, \quad U_{\beta\alpha} = U_\beta \cap U_\alpha$$

Связность в P — 1-форма $A_\alpha \in \Omega^1_{U_\alpha} \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$:

$$A_\alpha = \mathrm{Ad}_{\varphi_{\beta\alpha}^{-1}}(A_\beta) + \theta_{\beta\alpha},$$

$$\theta_{\beta\alpha} = \varphi_{\beta\alpha}^{*}\theta,$$

$\theta \in \Omega^1_G(\mathfrak{g})$ — форма Мауэра-Картана.

Напоминание: $\theta(v \in T_gG) = (L_{g^{-1}})_* v.$

Пример: $G = GL_n$.

$GL_n \subseteq M_n$.

$dg \in \Omega^1_{GL_n}(M_n)$ отвечает тривиализации T_{GL_n}

$$\theta = g^{-1}dg.$$

Замечание: P задаёт функтор $(Rep^{f.d.}(G), \otimes) \to$

$\to (Vect(X), \otimes)$

$$V \in Rep^{f.d.}(G) \mapsto P \times_G V.$$

Оперы над кривой X: $B \subset G$ – простая алг. группа.

G-опер $(\mathcal{F}, \nabla, \mathcal{F}_B)$ – это

1) $\mathcal{F}$ – главное G-расслоение над X.

2) $\mathcal{F}_B$ – B-редукция $\mathcal{F}$, т.е.

$$\underset{\underset{B}{\circlearrowleft}}{\mathcal{F}_B} \subset \mathcal{F}.$$

3) ∇ — связность в $\mathcal{F}$, удовл. усл. трансверсальности.

Усл. трансверсальности:

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{F}} := \mathcal{F} \times_G \mathfrak{g} \cong \mathcal{F}_B \times_B \mathfrak{g}.$$

$$\begin{tikzcd} \nabla_{\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}} : \mathfrak{g}_{\mathcal{F}} \arrow[r] & \mathfrak{g}_{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X \arrow[d] \\ \mathcal{F}_B \times_B \mathfrak{b} =: \mathfrak{b}_{\mathcal{F}_B} \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[r] & \dfrac{\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}}{\mathfrak{b}_{\mathcal{F}_B}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X \end{tikzcd}$$

$\nabla_{\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}}$ локально имеет вид $d + [A_\alpha, -]$

$\Rightarrow$ отображение $\mathfrak{b}_{\mathcal{F}_B} \to \left(\mathfrak{g}/\mathfrak{b}\right)_{\mathcal{F}_B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X$

$$\left(\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}/\mathfrak{b}_{\mathcal{F}_B} \cong \frac{\mathfrak{g}_{\mathcal{F}_B}}{\mathfrak{b}_{\mathcal{F}_B}} = \left(\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{b}}\right)_{\mathcal{F}_B} \right)$$

имеет вид $[\bar{A}, -]$, $\bar{A} \in \left(\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{b}}\right)_{\mathcal{F}_B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X$.

$$\mathbb{O} \subset \frac{[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]^\perp}{\mathfrak{b}} \subset \mathfrak{g}/\mathfrak{b}$$

$$\frac{[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]^\perp}{\mathfrak{b}} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathbb{C} f_\alpha$$

B

$\mathbb{O}$ — открытая B-орбита в $\frac{[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]^\perp}{\mathfrak{b}}$, состоящая

$$\sum_{\alpha\in\Delta_+}^{!} \varphi_\alpha f_\alpha \quad , \quad \varphi_\alpha \neq 0 \in \mathbb{C}.$$

Условие трансверсальности : $\overline{A} \in (\mathcal{F}_B \times_B \mathcal{O}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X$

$$\cap$$

$$(\mathcal{F}_B \times_B \mathfrak{g}/\mathfrak{b}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X.$$

Пример: $G = SL_n \supset B$. и G-опер $(\mathcal{F}, \nabla, \mathcal{F}_B)$ над X.

$G \curvearrowright V \cong \mathbb{C}^n$.

$B \curvearrowright V$ из сохранен флаг. $F.V \subset V$.

$$E \equiv V_{\mathcal{F}} := \mathcal{F} \times_G V$$

$$\cap\!\!|$$

$$V_{\mathcal{F}_B} := \mathcal{F}_B \times_B V \supset \mathcal{F}_B \times_B F.V \equiv F.E.$$

$$\nabla_E : E \to E \otimes \Omega^1_X$$

Локально тривиализуем $F.E, F$.

$$\nabla_E = d + A \otimes dt \quad , \quad A \in \mathfrak{sl}_n.$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} * & * & \end{pmatrix}}_{n} n$$

Считаем, что $F_i E = \begin{pmatrix} * \\ * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} * \\ * \\ \vdots \\ * \end{matrix}}\right\} i \\ \\ \\ \end{matrix}$.

Условие трансверсальности

$$A = \begin{pmatrix} * & & & * \\ \varphi_1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & \varphi_{n-1} & * \end{pmatrix} \quad \varphi_i \neq 0.$$