Contents

1 Общий план

Напомним, что наша цель - найти центр аффинной алгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}}$. В конечном случае найти центр можно с помощью гомоморфизма Хариш-Чандры:

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$$

Один из способов найти его, это построить отображение

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{D}(U) \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$$

где U - открытая клетка Брюа, $\mathcal{D}(U)$ - дифференциальные операторы на ней. Далее необходимо показать, что образ центра лежит во втором множителе, и найти его.

Этот способ мы попробуем обобщить, а именно мы построим отображение:

$$\hat{\mathfrak{g}}_{\kappa_c} \to \mathcal{D}(U((t))) \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*((t))]$$

где κ_c - критический уровень (минус двойственное число Кокстера). В правой части стоят алгебры Гейзенберга, у них можно взять Фоковские представления и тензорно перемножить. Получившийся модуль будет называться аффинным модулем Вакимото, и по построению он будет $\hat{\mathfrak{g}}$-модулем на уровне κ_c. Более того, модуль Вакимото является вертексной алгеброй, и мы можем определить морфизм вертексных алгебр:

$$V_{\kappa_c}(\mathfrak{g}) \to W_{0,\kappa_c}$$

где $V_{\kappa_c}(\mathfrak{g})$ - вакумный модуль. Оказывается, это отображение существует для любого уровня κ.

Построение этих отображений является целью данного доклада, в следующих докладах будет искаться образ центра.

2 Клетка Брюа в аффинной версии, функции и векторные поля на ней

Напомним, что (нетвистованная) аффинная алгебра является центральным расширением алгебры петель:

$$0 \to \mathbb{C}K \to \hat{\mathfrak{g}} \to L\mathfrak{g} \to 0$$

где $L\mathfrak{g} = \mathfrak{g}((t))$ (мы берём пополненную версию аффинной алгебры).

Раньше у нас была подалгебра $G_-G_0G_+ \subset G$ и мы брали

$$G_+ \simeq G_-G_0\backslash G_-G_0G_+ \subset G_-G_0\backslash G$$

- большая открытая клетка Брюа. Перейдём к алгебре петель, получаем:

$$LG_+ \simeq (LG_-)(LG_0)\backslash(LG_-)(LG_0)(LG_+) \subset (LG_-)(LG_0)\backslash\hat{G}$$

Мы будем обозначать $LU := LG_+$.

Рассмотрим пример $\mathfrak{sl}_2$. В этом случае $G_+ = \mathbb{A}^1$ - аффинная прямая, $LG_+ = LU = \mathbb{C}((t))$ (про это пространство можно думать как про функции на проколотом диске). Это пространство можно представить как предел:

$$LU = \mathbb{C}((t)) = \lim_{\rightarrow} t^{-N}\mathbb{C}[[t]]$$

Тогда имеется обратный предел на функциях:

$$Fun(LU) = Fun(G_+((t))) = \lim_{\leftarrow} Fun(t^{-N}\mathbb{C}[[t]]) = \lim_{\leftarrow} \mathbb{C}[x_n]_{n\geq -N}$$

по отображениям

$$S_{N,M} : \mathbb{C}[x_n]_{n\geq -N} \to \mathbb{C}[x_n]_{n\geq -M}, N > M$$

таким, что $x_n \mapsto 0$ для $-N \leq n < -M$ и $x_n \mapsto x_n$ для $n \geq -M$, где $x_i(t_j) = \delta_{i,j}$.

Явно каждая функция на LU записывается как

$$P_0 + \sum_{n<0} P_n x_n$$

где P_i - полиномы из $x_m, m \geq i$. $Fun(LU)$ является полным топологическим пространством относительно топологии, в которой базой в окрестности нуля является набор идеалов $(x_N, x_{N-1}, ...)$.

С помощью предела также можно определить векторные поля на LU как предел векторных полей на $t^{-N}G_+[[t]]$. Явно каждое векторное поле записывается следующим образом: для любого M существует N, такой, что

$$\sum_{n\geq N} P_n \frac{\partial}{\partial x_n} + \sum_{m\leq M} x_m \gamma_m$$

P_n - полиномы, $\gamma_m = \sum_{i=1}^{k} P'_{m,i} \frac{\partial}{\partial x_{j_i}}$ - полиномиальные векторные поля.

2.1 Действие $L\mathfrak{sl}_2$

Имеется естественный гомоморфизм $L\mathfrak{g} \to Vect(LU)$. Запишем его явно для $L\mathfrak{sl}_2$, для этого посчитаем действие генераторов на функциях:

$$x_m \in Fun(\mathbb{C}((t)))$$

$$x_m(t^k) = \delta_{m,k}$$

$$exp(-\varepsilon e_n)x_m(t^k) = x_m(exp(\varepsilon e_n)t^k) = x_m(t^k + \delta_{n,k}\varepsilon t^n) = \delta_{m,k}(t^k + \delta_{n,k}\varepsilon t^n)$$

Берём производную по ε в нуле, получаем

$$e_n(x_m) = \delta_{n,m}$$

то есть

$$e_n \mapsto \frac{\partial}{\partial x_n}$$

Аналогично можно посчитать действие h_n, f_n:

$$h_n \mapsto -2 \sum_{-i+j=n} x_i \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$f_n \mapsto - \sum_{-i-j+k=n} x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_k}$$

3 Алгебра дифференциальных операторов

Далее мы хотим определить алгебру дифференциальных операторов $\mathcal{D}$ на LU. Определим её вначале для $\mathfrak{sl}_2$.

Определение. *Алгебра Вейля для* $\mathfrak{sl}_2$ $\mathcal{A}$ *порождена элементами* a_n, a_n^*, $n \in \mathbb{Z}$ *с соотношениями*

$$[a_n, a_m^*] = \delta_{n+m,0}$$
$$[a_n, a_m] = [a_n^*, a_m^*] = 0$$

Предложение 1. *Алгебра Вейля действует на* $Fun(LU)$*:*

$$a_n \to \frac{\partial}{\partial x_n}, a_n^* \to x_{-n}$$

Таким образом, $\mathcal{A}$ *это алгебра дифференциальных операторов на* LU*.*

Однако в функциях и векторных полях у нас имеются бесконечные суммы, поэтому необходимо взять пополнение алгебры Вейля $\tilde{\mathcal{A}}$ относительно топологии, в которой базой в окрестности нуля является набор идеалов $(a_N, a_{N+1}, ..., a_M^*, a_{M+1}^*, ...)$.

Явно каждый элемент из $\tilde{\mathcal{A}}$ записывается как:

$$\sum_{n \geq N} P_n a_n + \sum_{m \geq M} Q_m a_m^*$$

где $P_n, Q_m \in A$.

На $\tilde{\mathcal{A}}$ можно ввести градуировку по степени вхождения элементов вида a_n. Обозначим за $\tilde{\mathcal{A}}_{\leq 1}$ подпространство, порождённое элементами степени не выше 1 (это не подалгебра, но подалгебра Ли).

Предложение 2. *Имеется короткая точная последовательность:*

$$0 \to Fun(LU) \to \tilde{\mathcal{A}}_{\leq 1} \to Vect(LU) \to 0$$

такая, что $\tilde{\mathcal{A}}_{\leq 1} \to Vect(LU)$ *- гомоморфизм алгебр Ли.*

Proof. Любой элемент из $\tilde{\mathcal{A}}_{\leq 1}$ можно представить в виде

$$\sum_{n \geq N} P_n a_n + \sum_{m \geq M} \sum_{k \geq K_m} Q_{m,k} a_k a_m^* + \sum_{m \geq M} Q'_m a_m^*$$

где $P_n, Q_{m,k} \in Fun(LU)$, K_m - некоторое конечное множество.

Тогда зададим отображение $\tilde{\mathcal{A}}_{\leq 1} \to Vect(LU)$, которое переводит этот элемент в

$$\sum_{n \geq N} P_n a_n + \sum_{m \geq M} \sum_{k \geq K_m} a_m^* Q_{m,k} a_k$$

Этот элемент действительно лежит в $Vect(LU)$. $\square$

Замечание. *Аналогичным образом вводится алгебра Вейля $\mathcal{A}^{\mathfrak{g}}$ для произвольной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, образующими являются $a_{\alpha,n}, a^*_{\alpha,n}$, $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \Delta^+$ (образующие для разных корней коммутируют). Все утверждения, данные выше, верны для любой $\mathfrak{g}$.*

3.1 Гомоморфзим $L\mathfrak{g} \to Vect(LU)$

Опишем гомоморфизм $L\mathfrak{g} \to Vect(LU)$, его легко записать с помощью рядов. Введём обозначения для рядов образующих алгебры Вейля:

$$a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}$$

$$a^*(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a^*_n z^{-n}$$

Запишем

$$e(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e_n z^{-n-1}$$

$$h(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n z^{-n-1}$$

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n z^{-n-1}$$

Можно заметить, что формулы для отображений, полученные ранее

$$e_n \mapsto \frac{\partial}{\partial x_n}$$

$$h_n \mapsto -2 \sum_{-i+j=n} x_i \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$f_n \mapsto - \sum_{-i-j+k=n} x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Эквиваленты формулам

$$e(z) \mapsto a(z)$$

$$h(z) \mapsto -2a^*(z)a(z)$$

$$f(z) \mapsto -a^*(z)^2 a(z)$$

То есть мы заменяем $\frac{\partial}{\partial x}$ на $a(z)$, умножение на x заменяем на $a^*(z)$.

Предложение 3. *Пусть x_α - весовые координаты на U, $x_{\alpha,n}$ - соответствующие координаты на LU. Пусть отображение из $\mathfrak{g}$ в $Vect(U)$ задаётся формулами*

$$J^a \mapsto \sum_\alpha P_a(x_\beta)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$$

Тогда отображение из $L\mathfrak{g}$ в $Vect(LU)$ задаётся формулами

$$J^a(z) \mapsto \sum_\alpha P_a(a^*_\beta(z))a_\alpha(z)$$

4 Алгебра $\mathcal{A}_{loc}$

Напомним, что у нас имеется короткая точная последовательность

$$0 \to Fun(LU) \to \tilde{\mathcal{A}}_{\leq 1} \to Vect(LU) \to 0$$

Также у нас есть отображение

$$L\mathfrak{g} \to Vect(LU)$$

Мы хотим поднять его до отображения в $\tilde{\mathcal{A}}_{\leq 1}$. Оказывается, что мы не можем так сделать, однако это отображение можно поднять до отображения

$$\hat{\mathfrak{g}}_{\kappa_c} \to \tilde{\mathcal{A}}_{\leq 1}$$

Для начала мы уменьшим алгебру $\tilde{\mathcal{A}}_{\leq 1}$. В действительности, нам понадобится модуль над ней, из которого мы построим модуль Вакимото, и мы хотим, чтобы $\hat{\mathfrak{g}}_{\kappa_c}$ действовала на нём вертексными операторами.

Запишем подробнее. $\mathcal{A}$ это алгебра Гейзенберга, у неё можно взять Фоковское представление:

Определение. *Фоковский модуль M порождается над $\mathcal{A}$ элементом $|0\rangle$ с соотношениями:*

$$a_{\alpha,n}|0\rangle = 0 \text{ для } n \geq 0$$

$$a^*_{\alpha,n}|0\rangle = 0 \text{ для } n > 0$$

Мы можем продолжить действие до $\tilde{\mathcal{A}}$.

Предложение 4. *M является вертекс операторной алгеброй со следующими свойствами:*

- *Имеется $\mathbb{Z}_+$-градуировка с $deg(a_{\alpha,n}) = deg(a^*_{\alpha,n}) = -n$, $deg|0\rangle = 0$*
- *Имеется оператор $T : M \to M$ такой, что $T|0\rangle = 0$, $[T, a_{\alpha,n}] = -n(a_{\alpha,n-1})$, $[T, a^*_{\alpha,n}] = -(n-1)(a^*_{\alpha,n-1})$*
- *Имеется семейство вертексных опраторов*

$$Y : M \to End(M)[[z, z^{-1}]]$$

таких, что $Y(a_{\alpha,-1}, z) = a_\alpha(z)$, $Y(a^*_{\alpha,0}, z) = a^*_\alpha(z)$

$$Y(a_{\alpha_1,n_1}...a_{\alpha_k,n_k}a^*_{\beta_1,m_1}...a^*_{\beta_l,m_l}|0\rangle, z) = \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{l}\frac{1}{(-n_i-1)!}\frac{1}{(-m_j)!}$$
$$: \partial_z^{-n_1-1}a_{\alpha_1}(z)...\partial_z^{-n_k-1}a_{\alpha_k}(z)\partial_z^{-m_1}a^*_{\beta_1}(z)...\partial_z^{-m_l}a^*_{\beta_l}(z) :$$

Мы хотим, чтобы $\hat{\mathfrak{g}}$ действовала на M вертексными операторами Y. Для этого мы возьмём подалгебру в $\tilde{\mathcal{A}}$, которая действует ими.

Определение. $U(M) = (M \otimes \mathbb{C}((t)))/(Im(T \otimes 1 + 1 \otimes \partial_t))$

Предложение 5. *$U(M)$ - алгебра Ли, которая действует на M операторами $Y(v, t)$.*

Замечание. *$U(M)$ не ассоциативная алгебра.*

Имеется гомоморфизм алгебр Ли $U(M) \to \tilde{\mathcal{A}}$

$$A \otimes f(z) \mapsto Res_{z=0}Y(A, z)f(z)dz$$

Определение. $\mathcal{A}_{loc} := \tilde{\mathcal{A}} \cap U(M)$

Аналогично можно определить $\mathcal{A}_{\leq 1,loc}$ $\mathcal{A}_{0,loc}$, $\mathcal{A}_{1,loc}$.

Предложение 6.

- *$\mathcal{A}_{0,loc}$ = коэффициенты Фурье в рядах $P(a^*_\alpha(z), \partial_z a^*_\alpha(z), ...)$*
- *$\mathcal{A}_{\leq 1,loc}$ = коэффициенты Фурье в рядах $: P(a^*_\alpha(z), \partial_z a^*_\alpha(z), ...)a_\beta(z) :$*
- *$\mathcal{A}_{1,loc}$ = коэффициенты Фурье в рядах $P(a^*_\alpha(z), \partial_z a^*_\alpha(z), ...)a_\beta(z)$*

У нас имеется отображение векторных пространств

$$\iota : \mathcal{A}_{1,loc} \to \mathcal{A}_{\leq 1,loc}$$

$$P(a^*_\alpha(z), \partial_z a^*_\alpha(z), ...)a_\beta(z) \mapsto : P(a^*_\alpha(z), \partial_z a^*_\alpha(z), ...)a_\beta(z) :$$

которое, однако, не будет гомоморфизмом алгебр Ли.

5 Поднятие отображения

Мы имеем короткую точную последовательность

$$0 \to \mathcal{A}_{0,loc} \to \mathcal{A}_{\leq 1,loc} \to \mathcal{A}_{1,loc} \to 0$$

Также у нас имеется короткая точная последовательность, связанная с расширением алгебры петель:

$$0 \to \mathbb{C}K \to \hat{\mathfrak{g}} \to L\mathfrak{g} \to 0$$

Заметим, что у нас есть отображения

$$\alpha : L\mathfrak{g} \to \mathcal{A}_{1,loc}$$

$$i : \mathbb{C}K \to \mathcal{A}_{0,loc}$$

где второе отображение переводит K в κ_c - критический уровень. Таким образом получаем коммутативную диаграмму, в которой мы хотим дорисовать среднее отображение:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{A}_{0,loc} \arrow[r] & \mathcal{A}_{\leq 1,loc} \arrow[r] & \mathcal{A}_{1,loc} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{C}K \arrow[r] \arrow[u, "i"] & \hat{\mathfrak{g}} \arrow[r] \arrow[u, "?"] & L\mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[u, "\alpha"] & 0
\end{tikzcd}$$

Возникает вопрос, когда это можно сделать. Ответ на него дают вычисления в когомологиях. Для начала научимся сопоставлять каждому расширению элемент в когомологиях.

Предложение 7. *Пусть дана короткая точная последовательность алгебр Ли*

$$0 \to \mathfrak{a} \to \mathfrak{b} \to \mathfrak{c} \to 0$$

такая, что $\mathfrak{a}$ абелева и является модулем над $\mathfrak{c}$, и её расщепление как последовательности векторных пространств $\iota : \mathfrak{c} \to \mathfrak{b}$, то есть $\mathfrak{b} = \iota(\mathfrak{c}) \oplus \mathfrak{a}$

Тогда им можно взаимооднозначно сопоставить элемент σ из $H^2(\mathfrak{c}, \mathfrak{a})$ по следующему правилу:

$$\sigma : \Lambda^2 \mathfrak{c} \to \mathfrak{a}$$

$$\sigma(a, b) = \iota([a, b]) - [\iota(a), \iota(b)]$$

Теперь мы можем сформулировать лемму:

Лемма 1. *Пусть даны две точные последовательности:*

$$0 \to \mathfrak{a} \to \mathfrak{b} \to \mathfrak{c} \to 0$$

$$0 \to \mathfrak{a}' \to \mathfrak{b}' \to \mathfrak{c}' \to 0$$

когомологические классы которых равны $\omega \in H^2(\mathfrak{c}, \mathfrak{a})$ и $\sigma \in H^2(\mathfrak{c}', \mathfrak{a}')$. Пусть также даны отображения $i : \mathfrak{a}' \to \mathfrak{a}$, $\alpha : \mathfrak{c}' \to \mathfrak{c}$ и $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ - абелевы алгебры Ли, являющиеся модулем над $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{c}'$.

Пускай $i_*(\sigma) = \alpha^*(\omega)$ в $H^2(\mathfrak{c}', \mathfrak{a})$. Тогда существует среднее отображение β, делающее диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[r] & \mathfrak{b} \arrow[r] & \mathfrak{c} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{a}' \arrow[r] \arrow[u, "i"] & \mathfrak{b}' \arrow[r] \arrow[u, "\beta"] & \mathfrak{c}' \arrow[r] \arrow[u, "\alpha"] & 0
\end{tikzcd}$$

Proof. Так как $i_*(\sigma) = \alpha^*(\omega)$ в $H^2(\mathfrak{c}', \mathfrak{a})$, то $i_*(\sigma) + d\gamma = \alpha^*(\omega)$ для некоторого $\gamma : \mathfrak{c}' \to \mathfrak{a}$ - линейный функционал. Определим отображение $\beta : \mathfrak{b}' \to \mathfrak{b}$ следующим образом:

$$\beta(c) = \iota(\alpha(c)) + \gamma(c) \text{ для } c \in \mathfrak{c}'$$

$$\beta(a) = i(a) \text{ для } a \in \mathfrak{a}'$$

(так как имеется расщепление $\mathfrak{b}' = \mathfrak{c}' \oplus \mathfrak{a}'$ как векторных пространств). Можно проверить, что из условия $i_*(\sigma) + d\gamma = \alpha^*(\omega)$ следует, что это отображение будет являться гомоморфзимом. □

Теорема 1. *Пусть ω, σ - классы последовательностей*

$$0 \to \mathcal{A}_{0,loc} \to \mathcal{A}_{\leq 1,loc} \to \mathcal{A}_{1,loc} \to 0$$

$$0 \to \mathbb{C}K \to \hat{\mathfrak{g}} \to L\mathfrak{g} \to 0$$

Тогда $i_*(\sigma) = \alpha^*(\omega)$ в $H^2(L\mathfrak{g}, \mathcal{A}_{0,loc})$.

6 Доказательство теоремы

6.1 Подсчёт коциклов

Для начала найдём явную запись коциклов $\alpha^*(\omega)$ и $i_*(\sigma)$:

$$i_*(\sigma)(a_n, b_m) = i([a, b]_{n+m} + K\delta_{n+m,0}(a, b) - [a, b]_{n+m}) = \kappa_c \delta_{n+m,0}(a, b)$$

Теперь найдём значение коцикла ω на $(Pa(z), Qa(w))$, где P, Q - полиномы от $a^*(z), \partial a^*(z), \ldots$.

$$\omega(Pa(z), Qa(z)) =: [Pa(z), Qa(w)] : -[: Pa(z) :, : Qa(w) :]$$

Посчитаем первое слагаемое:

$$[a(z), \partial^n a^*(w)] = \delta^{(n+1)}(z, w)$$

$$[Pa(z), Qa(w)] = \sum_{n=0}^{\infty} P \frac{\partial Q}{\partial(\partial^n a^*(z))} a(w) \delta^{(n+1)}(z, w) - \sum_{n=0}^{\infty} Q \frac{\partial P}{\partial(\partial^n a^*(w))} a(z) \delta^{(n+1)}(z, w)$$

Теперь посчитаем второе слагаемое. Заметим, что : $Pa(z) := Y(Pa_{-1}, z)$. Таким образом, нам нужно найти $Y(Pa_{-1}, z) Y(Qa_{-1}, w)$. Это можно сделать при помощи формулы Уика.

Предположим нам даны два нормально упорядоченных монома g, g' от $a(z), a^*(z)$ и их производных. $(\partial^n a(z), \partial^m a^*(z))$ называется спариванием между $g(z)$ и $g'(w)$, если $\partial^n a(z)$ встречается в $g(z)$, $\partial^m a^*(z)$ встречается в $g'(w)$. Аналогично $(\partial^n a^*(z), \partial^m a(z))$ называется спариванием между $g(z)$ и $g'(w)$, если $\partial^n a^*(z)$ встречается в $g(z)$, $\partial^m a(z)$ встречается в $g'(w)$. Мы сопоставим каждому спариванию функцию

$$(-1)^n \frac{(n+m)!}{(z-w)^{n+m+1}} \text{ или } (-1)^{m+1} \frac{(n+m)!}{(z-w)^{n+m+1}}$$

Множественное спаривание B это дизъюнктный набор одиночных спариваний. Каждому B мы сопоставляем функцию $f_B(z, w)$, равную произведению функций соответствующих одиночных спариваний.

Обозначим за $(g(z), g'(w))_B$ произведение всех факторов, не входящих в B. Определим свёртку $: g(z), g'(w)) :_B$ как произведение $: (g(z), g'(w))_B : f_B(z, w)$. По определению $: g(z), g'(w)) :_\varnothing =: g(z), g'(w)) :$

Лемма 2 (Формула Уика)**.** *$g(z)g'(w)$ равно сумме $: g(z), g'(w)) :_B$ по всем свёрткам с учётом кратности.*

Применим формулу Уика для $Y(Pa_{-1}, z), Y(Qa_{-1}, w)$. Спаривания имеют вид $(a(z), \partial^n a^*(w))$ для каждого a^*_{-n}, входящего в Q, а также $(\partial^n a^*(z), a(w))$ для каждого a^*_{-n}, входящего в P. Таким образом, получаем:

Лемма 3.

$$
\begin{aligned}
Y(Pa_{-1},z)Y(Qa_{-1},w) = &: Y(Pa_{-1},z)Y(Qa_{-1},w) : + \\
&+ \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(z-w)^{n+1}} : Y(P,z)Y(\frac{\partial Q}{\partial a^*_{-n}}a_{-1},w) : - \\
&- \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(z-w)^{n+1}} : Y(\frac{\partial P}{\partial a^*_{-n}}a_{-1},z)Y(P,w) : + \\
&+ \sum_{n,m\geq 0} \frac{1}{(z-w)^{n+m+2}} Y(\frac{\partial P}{\partial a^*_{-n}},z)Y(\frac{\partial Q}{\partial a^*_{-n}},w)
\end{aligned}
$$

Следствие.

$$
\begin{aligned}
[Y(Pa_{-1},z),Y(Qa_{-1},w)] = &\sum_{n\geq 0} \delta^{(n+1)}(z,w) : Y(P,z)Y(\frac{\partial Q}{\partial a^*_{-n}}a_{-1},w) : - \\
&- \sum_{n\geq 0} \delta^{(n+1)}(z,w) : Y(\frac{\partial P}{\partial a^*_{-n}}a_{-1},z)Y(P,w) : + \\
&+ \sum_{n,m\geq 0} \delta^{(n+m+1)}(z,w) Y(\frac{\partial P}{\partial a^*_{-n}},z)Y(\frac{\partial Q}{\partial a^*_{-n}},w)
\end{aligned}
$$

Теперь сложим две части в формуле для $\omega(Pa(z),Qa(z))$, у нас останется только последнее слагаемое, то есть

Предложение 8.

$$
\omega(Pa(z),Qa(z)) = \sum_{n,m\geq 0} \delta^{(n+m+1)}(z,w) Y(\frac{\partial P}{\partial a^*_{-m}},z)Y(\frac{\partial Q}{\partial a^*_{-n}},w)
$$

Следствие.

$$
\omega(Pa(z)_{[k]},Qa(z)_{[s]}) = \sum_{n,m\geq 0} Res_{w=0} \frac{1}{(n+m+1)!} \partial_z^{n+m+1} Y(\frac{\partial P}{\partial a^*_{-n}},z)Y(\frac{\partial Q}{\partial a^*_{-m}},w) z^k w^s|_{z=w} dw
$$

6.2 Пример $\mathfrak{sl}_2$

Напомним формулы для отображения $L\mathfrak{sl}_2 \to Vect(LU)$:

$$e(z) \mapsto a(z)$$

$$h(z) \mapsto -2a^*(z)a(z)$$

$$f(z) \mapsto -a^*(z)^2 a(z)$$

Таким образом, полиномы для $e(z), f(z), h(z)$ это $P_e = 1, P_h = -2a^*_0$ и $P_f = (a^*_0)^2$. Найдём значение коциклов по формуле из следствия:

- $\alpha^*\omega(e_k, e_s) = \alpha^*\omega(e_k, h_s) = \alpha^*\omega(e_k, f_s) = 0$, так как P_e не зависит от a^*_{-n}.
- $\alpha^*\omega(h_k, h_s) = Res_{w=0}\partial_z(-2)(-2)z^k w^s|_{z=w}dw = 4Res_{z=0}z^{k+s-1}dz = 4k\delta_{k+s}$
- $\alpha^*\omega(h_k, f_s) = Res_{w=0}\partial_z(-2)Y(-2a^*_0, w)z^k w^s|_{z=w}dw = 4kRes_{z=0}a^*(z)z^{k+s-1}dz = 4ka^*_{k+s}$
- $\alpha^*\omega(f_k, f_s) = Res_{w=0}\partial_z Y(-2a^*_0, z)Y(-2a^*_0, w)z^k w^s|_{z=w}dw =$
  $= 4kRes_{z=0}\sum_{n,m} a^*_n a^*_m z^{k+s-n-m-1}dz = 4k\sum_l a^*_l a^*_{k+s-l}$

Мы хотим найти γ такой, что $i_*(\sigma) + d\gamma = \alpha^*(\omega)$. Введём градуировку на $C^\bullet(L\mathfrak{g}, \mathcal{A}_{0,loc})$:

$$wt(a^*_n) = wt(e)$$

$$wt(J^a_n) = wt(J^a)$$

Заметим, что $\alpha^*(\omega)$ и $i_*(\sigma)$ однородны степени 0 относительно этой градуировки, значит нам нужно искать γ так, чтобы он был однородным степени 0. Тогда

$$\gamma(e(z)) = \gamma(h(z)) = 0$$

так как иначе вес будет положительным. Более того,

$$\gamma(f(z)) = \lambda\partial a^*(z)$$

Найдём $d\gamma$:

$$d\gamma(e_k, e_s) = d\gamma(e_k, h_s) = d\gamma(h_k, h_s) = 0$$

$$d\gamma(e_k, f_s) = e_k\gamma(f_s) - f_s\gamma(e_k) + \gamma([e_k, f_s]) = \lambda s a_k(a^*_{-s}) = \lambda s\delta_{k+s,0}$$

$$d\gamma(h_k, f_s) = h_k\gamma(f_s) - f_s\gamma(h_k) + \gamma([h_k, f_s]) = (-2\sum_l a^*_l a_{k-l})(\lambda s a^*_s) - 2\lambda(k+s)a^*_{k+s} = -2\lambda k a^*_{k+s}$$

$$d\gamma(f_k, f_s) = f_k\gamma(f_s) - f_s\gamma(f_k) + \gamma([f_k, f_s]) = -\sum_{l,t} a^*_l a^*_t a_{k-l-t}(\lambda s a^*_s) + \sum_{l,t} a^*_l a^*_t a_{s-l-t}(\lambda k a^*_k) =$$
$$= -2\lambda k\sum_l a^*_l a^*_{k+s-l}$$

Таким образом, получаем, что $i_*(\sigma) + d\gamma = \alpha^*(\omega)$ при $\lambda = -2$.

Следствие. *Существует отображение*

$$\hat{\mathfrak{sl}}_{2\kappa_c} \to \mathcal{A}_{\leq 1,loc}$$
$$e(z) \mapsto a(z)$$
$$h(z) \mapsto -2 : a^*(z)a(z) :$$
$$f(z) \mapsto - : a^*(z)^2 a(z) : -2\partial a^*(z)$$

Таким образом, M является $\hat{\mathfrak{sl}}_2$-модулем. Это представление называется модулем Вакимото.

6.3 Локальный комплекс

Основная идея доказательства заключается в следующем: нужно показать, что если два коцикла совпадают при ограничении с $\Lambda^2\mathfrak{g}$ на $\Lambda^2\mathfrak{h}$ то они лежат в одном классе когомологий.

Определим вспомогательную алгебру Клиффорда:

Определение. *Алгебра Клиффорда порождается элементами $\psi_{a,n}, \psi^*_{a,n}$, $a = 1, ..., dim\mathfrak{g}$ с соотношениями:*

$$[\psi_{a,n}, \psi^*_{b,m}]_+ = \psi_{a,n}\psi^*_{b,m} + \psi^*_{b,m}\psi_{a,n} = \delta_{n+m,0}\delta_{a,b}$$
$$[\psi_{a,n}, \psi_{b,m}]_+ = [\psi^*_{a,n}, \psi^*_{b,m}]_+ = 0$$

Обозначим за Λ модуль, порождённый вектором $|0\rangle$ с соотношениями

$$\psi_{a,n}|0\rangle = 0 \text{ для } n > 0$$
$$\psi^*_{a,n}|0\rangle = 0 \text{ для } n \geq 0$$

Λ является вертекс операторной супералгеброй со свойствами, аналогичными модулю M.

Определим линейный функционал из $C^i(L\mathfrak{g}, \mathcal{A}_{0,loc}) = Hom(\Lambda^i(L\mathfrak{g}), \mathcal{A}_{0,loc})$

$$\psi_{a_1,-n_1}...\psi_{a_i,-n_i}f = (J^{a_1}_{n_1} \wedge ... \wedge J^{a_i}_{n_i})^* f$$

где $f \in \mathcal{A}_{0,loc}$. Любой функционал можно записать в виде суммы таких функционалов.

Заметим, что выражения

$$\int Y(\psi_{a_1,n_1}...\psi_{a_i,n_i}a^*_{\alpha_1,m_1}...a^*_{\alpha_j,m_j}, z)dz$$

определяют линейный функционал из $C^i(L\mathfrak{g}, \mathcal{A}_{0,loc})$

Предложение 9. *Все такие отображения образуют подкомплекс, который обозначается $C^\bullet_{loc}(L\mathfrak{g}, \mathcal{A}_{0,loc})$*

Предложение 10. *$i_*(\sigma)$ и $\alpha^*(\omega)$ лежат в $C^\bullet_{loc}(L\mathfrak{g}, \mathcal{A}_{0,loc})$.*

6.4 Ограничение на $\mathfrak{h}$

Далее мы хотим ввести второй вспомогательный комплекс. Обозначим за $L_+\mathfrak{g} = \mathfrak{g}[[t]]$ - алгебра токов. $L_+\mathfrak{g}$ действует на пространстве

$$M_+ := \mathbb{C}[a^*_{\alpha,n}]_{\alpha\in\Delta_+, n\leq 0}$$

которое является пространством функций на $L_+U = U[[t]]$.

Отождествляем комплекс Шевалле $C^\bullet(L_+\mathfrak{g}, M_+)$ с суперпространством

$$M_+ \otimes \Lambda(\psi^*_{a,n})_{n\leq 0}$$

Введём супердифференцирование на нём:

$$Ta^*_{\alpha,n} = -(n-1)a^*_{\alpha,n-1}, \, T\psi^*_{a,n} = -(n-1)\psi^*_{a,n-1}$$

Определим отображение

$$\int : C^\bullet(L_+\mathfrak{g}, M_+) \to C^\bullet_{loc}(L\mathfrak{g}, \mathcal{A}_{0,loc})$$

$$A \mapsto \int Y(A,z)dz$$

Предложение 11. $\int$ *определяет изоморфизм*

$$C^\bullet_{loc}(L\mathfrak{g}, \mathcal{A}_{0,loc}) \simeq C^\bullet(L_+\mathfrak{g}, M_+)/(ImT + \mathbb{C})$$

Далее мы можем свести когомологии $L_+\mathfrak{g}$ к когомологиям $L_+\mathfrak{h}$ с тривиальными коэффициентами:

Предложение 12.

$$H^\bullet(L_+\mathfrak{g}, M_+) = H^\bullet(L_+\mathfrak{b}_-, \mathbb{C}) = H^\bullet(L_+\mathfrak{h}, \mathbb{C})$$

Первое равенство следует из того, что модуль M_+ коиндуцированный, второе из подсчёта спектральной последовательности.

Таким образом, мы получаем равенство

$$H^\bullet_{loc}(L\mathfrak{g}, \mathcal{A}_{0,loc}) = H^\bullet(L_+\mathfrak{h}, \mathbb{C})/(ImT + \mathbb{C})$$

Наконец, мы можем сформулировать утверждение

Лемма 4. *Если два коцикла из $C^\bullet_{loc}(L\mathfrak{g}, \mathcal{A}_{0,loc})$ совпадают при ограничении на $L\mathfrak{h}$, то они лежат в одном классе когомологий.*

6.5 Окончание доказательства

Таким образом, нам надо проверить, что $i_*\sigma$ и $\alpha^*\omega$ совпадают на $L\mathfrak{h}$:

Предложение 13. $i_*\sigma(h_n, h'_m) = \alpha^*\omega(h_n, h'_m)$

В результате мы получили отображение $\hat{\mathfrak{g}}_{\kappa_c} \to \mathcal{A}_{\leq 1,loc}$, которое записывается как $J^a(z) \mapsto: \alpha(J^a(z)) : +\gamma(J^a(z))$, где $\alpha(J^a(z))$ - векторное поле, соответствующее $J^a(z)$. Более того, используя аналогичные соображения как в случае $\mathfrak{sl}_2$ получаем, что $\gamma(e_i(z)) = \gamma(h_i(z)) = 0$, $\gamma(f_i(z)) = c_i \partial a^*_{\alpha_i}(z)$, где c_i - какие-то константы. В итоге, мы доказали теорему:

Теорема 2. *Существует гомоморфизм алгебр Ли:*

$$\hat{\mathfrak{g}}_{\kappa_c} \to \mathcal{A}_{\leq 1,loc}$$

$$e_i(z) \to: \alpha(e_i(z)) :$$

$$h_i(z) \to: \alpha(h_i(z)) :$$

$$f_i(z) \to: \alpha(f_i(z)) : +c_i \partial a^*_{\alpha_i}(z)$$

где $\alpha(J^a(z))$ - векторное поле, соответствующее $J^a(z)$, c_i - некоторые константы.

7 Модуль Вакимото

Мы получили структуру $\hat{\mathfrak{g}}$-модуля на Фоковском модуле M

Определение. *M с действием $\hat{\mathfrak{g}}$ называется модулем Вакимото на критическом уровне веса 0.*

Более того, мы можем определить морфзим $V_{\kappa_c}(\mathfrak{g}) \to M$.

Лемма 5. *Определение гомоморфизма вертексных алгебр $V_{\kappa_c}(\mathfrak{g}) \to V$ эквивалентно выбору векторов $\tilde{J}^a_n|0\rangle_v \in V$ степени 1 таких, что коэффициенты Фурье $\tilde{J}^a_n$ вертексных операторов $Y(\tilde{J}^a_n|0\rangle_v, z) = \sum_n \tilde{J}^a_n z^{-n-1}$ удовлетворяют соотношениям аффинной алгебры.*

Следствие. *Существует гомоморфзим $V_{\kappa_c}(\mathfrak{g}) \to M$ определённый формулами, данными в теореме 2.*

Заметим, что мы можем выбрать γ с точностью до элемента из $H^1(L\mathfrak{g}, \mathcal{A}_{0,loc})$.

Предложение 14. *$H^1(L\mathfrak{g}, \mathcal{A}_{0,loc})$ изоморфно пространству $(L\mathfrak{h})^*$.*

Пример. *Проиллюстрируем это предложение на примере* $\mathfrak{sl}_2$. *Пусть дано* $\chi(t) = \sum_n \chi_n t^{-n-1} \in \mathfrak{h}((t))$. *Хотим построить* $\phi \in H^1(L\mathfrak{sl}_2, \mathcal{A}_{0,loc})$, *соответствующий* χ, *то есть такой, чтобы*

$$\phi(h(z)) = \chi(t)$$

По аналогичным соображениям веса $\phi(e(z))$ *должно быть равно* 0. *Найдём* $\phi(f(z)))$:

$$\phi([e_n, f_m]) = e_n\phi(f_m) - f_m\phi(e_n)$$

$$e_n\phi(f_m) = \chi_{n+m}$$

Следовательно, получаем формулу для $\phi(f(z))$:

$$\phi(f(z)) = \chi(z)a^*(z)$$

Предложение 15. $d\phi = 0$, *где* ϕ *определено формулами выше.*

Proof.

$$d\phi(e_n, e_m) = 0$$

$$d\phi(e_n, h_m) = e_n\phi(h_m) = 0$$

$$d\phi(e_n, f_m) = e_n\phi(f_m) + \phi(h_{n+m}) = a_n(\sum_k \chi_k a^*_{m-k}) + \chi_{n+m} = 0$$

$$d\phi(h_n, h_m) = h_n(\chi_m) - h_m(\chi_n) = 0$$

$$d\phi(h_n, f_m) = h_n(\sum_k \chi_k a^*_{m-k}) - f_m(\chi_n) - 2(\sum_k \chi_k a^*_{m+n-k}) =$$
$$= -2(\sum_k \chi_k a^*_{m+n-k}) + 2(\sum_k \chi_k a^*_{m+n-k}) = 0$$

$$d\phi(f_n, f_m) \text{ - упражнение}$$

□

Таким образом, получаем утверждение:

Предложение 16. *Для любого* $\chi(t) \in \mathfrak{h}((t))$ *существует отображение*

$$\hat{\mathfrak{sl}}_{2\kappa_c} \to \mathcal{A}_{\leq 1,loc}$$

определённое по формулам:

$$e(z) \to: \alpha(e(z)) :$$

$$h(z) \to: \alpha(h(z)) : +\chi(z)$$

$$f(z) \to: \alpha(f(z)) : -2\partial a^*(z) + \chi(z)a^*(z)$$

Это отображение определяет структуру $\hat{\mathfrak{sl}}_{2\kappa_c}$*-модуля на* M.

Для общего $\mathfrak{g}$ формулы будут аналогичными.

Мы можем смотреть на $\chi(t)$ не как на фиксированные параметры, а как на переменные. Введём коммутативную алгебру Гейзенберга

Определение. *$Heis_0$ - коммутативная алгебра с образующими $b_{i,n}, i = 1, ..., rk(\mathfrak{g}), n \in \mathbb{Z}$*

У неё имеется естественное Фоковское представление $\mathbb{C}[b_{i,n}]_{n<0}$, являющееся вертексной алгеброй, обозначим его π_0. Тогда получаем теорему

Теорема 3. *Существует отображение*

$$\hat{\mathfrak{g}}_{\kappa_c} \to \mathcal{A}_{\leq 1,loc} \otimes Heis_0$$

с формулами

$$e_i(z) \to: \alpha(e_i(z)) :$$

$$h_i(z) \to: \alpha(h_i(z)) : +\chi_i(z)$$

$$f_i(z) \to: \alpha(f_i(z)) : +c_i \partial a^*_{\alpha_i}(z) + \chi_i(z) a^*_{\alpha_i}(z)$$

Это отображение определяет структуру $\hat{\mathfrak{g}}$-модуля на $M \otimes \pi_0$, более того существует отображение вертексных алгебр

$$V_{\kappa_c}(\mathfrak{g}) \to M \otimes \pi_0$$

Определение. *$M \otimes \pi_0$ называется модулем Вакимото на критическом уровне и обозначается W_{0,κ_c}.*

Модули Вакимото можно определить для произвольного уровня κ. В этом случае вместо коммутативной алгебры Гейзенберга нам нужно взять $Heis_{\kappa-\kappa_c}$:

Определение. *$Heis_{\kappa-\kappa_c}$ - алгебра с образующими $b_{i,n}, i = 1, ..., rk(\mathfrak{g}), n \in \mathbb{Z}$ и соотношениями*

$$[b_{i,n}, b_{j,m}] = n(\kappa - \kappa_c)(h_i, h_j)\delta_{n,-m}$$

Соответствующий Фоковский модуль обозначается $\pi_0^{\kappa-\kappa_c}$.

Теорема 4. *Существует отображение*

$$\hat{\mathfrak{g}}_{\kappa} \to \mathcal{A}_{\leq 1,loc} \otimes Heis_{\kappa-\kappa_c}$$

с формулами

$$e_i(z) \to: \alpha(e_i(z)) :$$

$$h_i(z) \to: \alpha(h_i(z)) : +\chi_i(z)$$

$$f_i(z) \to: \alpha(f_i(z)) : +(c_i + (\kappa - \kappa_c)(e_i, f_i))\partial a^*_{\alpha_i}(z) + \chi_i(z) a^*_{\alpha_i}(z)$$

Это отображение определяет структуру $\hat{\mathfrak{g}}$-модуля на $M \otimes \pi_0^{\kappa-\kappa_c}$, более того существует отображение вертексных алгебр

$$V_\kappa(\mathfrak{g}) \to M \otimes \pi_0^{\kappa-\kappa_c}$$

Также вместо Фоковского модуля веса 0 $\pi_0^{\kappa-\kappa_c}$ мы можем взять модуль со старшим весом λ, то есть такой, что $b_{i,0}|0\rangle = \lambda(h_i)|0\rangle$. Он обозначается $\pi_\lambda^{\kappa-\kappa_c}$.

Предложение 17. *$M \otimes \pi_\lambda^{\kappa-\kappa_c}$ является $\hat{\mathfrak{g}}$-модулем на уровне κ.*

Определение. *$M \otimes \pi_\lambda^{\kappa-\kappa_c}$ называется модулем Вакимото на уровне κ веса λ и обозначается $W_{\lambda,\kappa}$.*