Модули Вакимото

Слава Иванов

13 мая 2022 г.

Общий план

Цель - найти центр аффинной алгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}}$
В конечном случае - гомоморфизм Хариш-Чандры:

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$$

Один из способов найти центр, это построить отображение

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{D}(U) \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$$

где U - открытая клетка Брюа, $\mathcal{D}(U)$ - дифференциальные операторы на ней. Далее необходимо показать, что образ центра лежит во втором множителе, и найти его.

Общий план

Мы построим отображение

$$\hat{\mathfrak{g}}_{\kappa_c} \to \mathcal{D}(U((t))) \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*((t))]$$

где κ_c - критический уровень (минус двойственное число Кокстера).
В правой части стоят алгебры Гейзенберга, у них можно взять Фоковские представления и тензорно перемножить, получим модуль Вакимото W_{0,κ_c}.
Можно определить морфизм вертексных алгебр:

$$V_{\kappa_c}(\mathfrak{g}) \to W_{0,\kappa_c}$$

где $V_{\kappa_c}(\mathfrak{g})$ - вакумный модуль.
Можно обобщить на произвольный уровень κ.

Напоминание

Строение аффинной алгебры:

$$0 \to \mathbb{C}K \to \hat{\mathfrak{g}} \to L\mathfrak{g} \to 0$$

где $L\mathfrak{g} = \mathfrak{g}((t))$

Раньше: брали подалгебру $G_- G_0 G_+ \subset G$, определяли клетку Брюа:

$$G_+ \simeq G_- G_0 \backslash G_- G_0 G_+ \subset G_- G_0 \backslash G$$

Перейдём к алгебре петель:

$$LG_+ \simeq (LG_-)(LG_0) \backslash (LG_-)(LG_0)(LG_+) \subset (LG_-)(LG_0) \backslash \hat{G}$$

Мы будем обозначать $LU := LG_+$.

Функции на LU

$G_+ = \mathbb{A}^1$, $LG_+ = LU = \mathbb{C}((t))$ - функции на проколотом диске. Это пространство можно представить как предел:

$$LU = \mathbb{C}((t)) = \lim_{\rightarrow} t^{-N}\mathbb{C}[[t]]$$

Тогда имеется обратный предел на функциях:

$$Fun(LU) = Fun(G_+((t))) = \lim_{\leftarrow} Fun(t^{-N}\mathbb{C}[[t]]) = \lim_{\leftarrow} \mathbb{C}[x_n]_{n \geq -N}$$

по отображениям

$$S_{N,M} : \mathbb{C}[x_n]_{n \geq -N} \to \mathbb{C}[x_n]_{n \geq -M}, N > M$$

таким, что $x_n \mapsto 0$ для $-N \leq n < -M$ и $x_n \mapsto x_n$ для $n \geq -M$, где $x_i(t_j) = \delta_{i,j}$.

Функции на LU

Явно каждую функцию можно записать как:

$$P_0 + \sum_{n<0} P_n x_n$$

где P_i - полиномы из x_m, $m \geq i$.
$Fun(LU)$ - полное топологические пространство, база топологии в окрестности нуля - набор идеалов $(x_N, x_{N-1}, ...)$.

Векторные поля на LU

Аналогично определяются векторные поля:
$Vect(LU)$ - предел векторных полей на $t^{-N}G_+[[t]]$.
Явно каждое поле можно записать как: для любого M существует N, такой, что

$$\sum_{n \geq N} P_n \frac{\partial}{\partial x_n} + \sum_{m \leq M} x_m \gamma_m$$

P_n - полиномы, $\gamma_m = \sum_{i=1}^{k} P'_{m,i} \frac{\partial}{\partial x_{j_i}}$ - полиномиальные векторные поля.

Гомоморфизм $L\mathfrak{sl}_2 \to Vect(LU)$

Имеется естественный гомоморфизм $L\mathfrak{sl}_2 \to Vect(LU)$

$$x_m \in Fun(\mathbb{C}((t)))$$

$$x_m(t^k) = \delta_{m,k}$$

$$exp(-\varepsilon e_n)x_m(t^k) = x_m(exp(\varepsilon e_n)t^k) =$$
$$= x_m(t^k + \delta_{n,k}\varepsilon t^n) = \delta_{m,k}(t^k + \delta_{n,k}\varepsilon t^n)$$

Берём производную по ε в нуле, получаем

$$e_n(x_m) = \delta_{n,m}$$

то есть

$$e_n \mapsto \frac{\partial}{\partial x_n}$$

Аналогично можно посчитать действие h_n, f_n:

$$h_n \mapsto -2 \sum_{-i+j=n} x_i \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$f_n \mapsto - \sum_{-i-j+k=n} x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Алгебра дифференциальных операторов

Определение

Алгебра Вейля для $\mathfrak{sl}_2$ $\mathcal{A}$ порождена элементами a_n, a_n^*, $n \in \mathbb{Z}$ с соотношениями

$$[a_n, a_m^*] = \delta_{n+m,0}$$

$$[a_n, a_m] = [a_n^*, a_m^*] = 0$$

Предложение

Алгебра Вейля действует на $Fun(LU)$:

$$a_n \to \frac{\partial}{\partial x_n}, a_n^* \to x_{-n}$$

Определение

$\tilde{\mathcal{A}}$ - пополнение алгебры Вейля $\mathcal{A}$ относительно топологии, в которой базав 0 - набор идеалов $(a_N, a_{N+1}, \ldots, a^*_M, a^*_{M+1}, \ldots)$

Явно каждый элемент из $\tilde{\mathcal{A}}$ записывается как:

$$\sum_{n \geq N} P_n a_n + \sum_{m \geq M} Q_m a^*_m$$

где $P_n, Q_m \in A$.
Вводим на $\tilde{\mathcal{A}}$ градуировку по степени вхождения a_n. $\tilde{\mathcal{A}}_{\leq 1}$ - подпространство элементов степени не выше 1.

Алгебра $\tilde{\mathcal{A}}$

Предложение

Имеется короткая точная последовательность:

$$0 \to Fun(LU) \to \tilde{\mathcal{A}}_{\leq 1} \to Vect(LU) \to 0$$

такая, что $\tilde{\mathcal{A}}_{\leq 1} \to Vect(LU)$ - гомоморфизм алгебр Ли.

Любой элемент из $\tilde{\mathcal{A}}_{\leq 1}$ можно представить в виде

$$\sum_{n \geq N} P_n a_n + \sum_{m \geq M} \sum_{k \geq K_m} Q_{m,k} a_k a_m^* + \sum_{m \geq M} Q'_m a_m^*$$

где $P_n, Q_{m,k} \in Fun(LU)$, K_m - некоторое конечное множество. Переведём этот элемент в

$$\sum_{n \geq N} P_n a_n + \sum_{m \geq M} \sum_{k \geq K_m} a_m^* Q_{m,k} a_k$$

Алгебра $\tilde{A}$

Определение

Аналогичным образом вводится алгебра Вейля $\mathcal{A}^{\mathfrak{g}}$ для произвольной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, образующими являются $a_{\alpha,n}, a^*_{\alpha,n}$, $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \Delta^+$ (образующие для разных корней коммутируют). Все утверждения, данные выше, верны для любой $\mathfrak{g}$.

Гомоморфзим $L\mathfrak{g} \to Vect(LU)$

Введём обозначения для рядов образующих алгебры Вейля:

$$a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}$$

$$a^*(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^* z^{-n}$$

Ряды образующих $L\mathfrak{sl}_2$:

$$e(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e_n z^{-n-1}$$

$$h(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n z^{-n-1}$$

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n z^{-n-1}$$

Гомоморфзим $L\mathfrak{g} \to Vect(LU)$

Можно заметить, что формулы

$$e_n \mapsto \frac{\partial}{\partial x_n}$$

$$h_n \mapsto -2 \sum_{-i+j=n} x_i \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$f_n \mapsto - \sum_{-i-j+k=n} x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Эквиваленты формулам

$$e(z) \mapsto a(z)$$

$$h(z) \mapsto -2a^*(z)a(z)$$

$$f(z) \mapsto -a^*(z)^2 a(z)$$

$\frac{\partial}{\partial x}$ заменятеся на $a(z)$ Умножение на x заменяется на $a^*(z)$

Гомоморфзим $L\mathfrak{g} \to Vect(LU)$

Предложение

Пусть x_α - весовые координаты на U, $x_{\alpha,n}$ - соответствующие координаты на LU. Пусть отображение из $\mathfrak{g}$ в $Vect(U)$ задаётся формулами

$$J^a \mapsto \sum_\alpha P_a(x_\beta)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$$

Тогда отображение из $L\mathfrak{g}$ в $Vect(LU)$ задаётся формулами

$$J^a(z) \mapsto \sum_\alpha P_a(a^*_\beta(z))a_\alpha(z)$$

Снова общий план

Имеется короткая точная последовательность

$$0 \to Fun(LU) \to \tilde{A}_{\leq 1} \to Vect(LU) \to 0$$

И отображение

$$L\mathfrak{g} \to Vect(LU)$$

Хотим:

$$L\mathfrak{g} \to \tilde{A}_{\leq 1}$$

Так нельзя, но можно

$$\hat{\mathfrak{g}}_{\kappa_c} \to \tilde{A}_{\leq 1}$$

Для начала мы уменьшим алгебру $\tilde{A}_{\leq 1}$

Определение

Фоковский модуль M порождается над $\mathcal{A}$ элементом $|0\rangle$ с соотношениями:

$$a_{\alpha,n}|0\rangle = 0 \text{ для } n \geq 0$$

$$a^*_{\alpha,n}|0\rangle = 0 \text{ для } n > 0$$

Мы можем продолжить действие до $\tilde{\mathcal{A}}$

Предложение

M - вертекс операторная алгебра:

- $\mathbb{Z}_+$-градуировка с $deg(a_{\alpha,n}) = deg(a^*_{\alpha,n}) = -n$, $deg|0\rangle = 0$
- Оператор $T : M \to M$ такой, что $T|0\rangle = 0$, $[T, a_{\alpha,n}] = -n(a_{\alpha,n-1})$, $[T, a^*_{\alpha,n}] = -(n-1)(a^*_{\alpha,n-1})$
- Семейство вертексных opраторов

$$Y : M \to End(M)[[z, z^{-1}]]$$

таких, что $Y(a_{\alpha,-1}, z) = a_\alpha(z)$, $Y(a^*_{\alpha,0}, z) = a^*_\alpha(z)$

$$Y(a_{\alpha_1,n_1} \dots a_{\alpha_k,n_k} a^*_{\beta_1,m_1} \dots a^*_{\beta_l,m_l}|0\rangle, z) = \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{l} \frac{1}{(-n_i-1)!} \frac{1}{(-m_j)!}$$

$$: \partial_z^{-n_1-1} a_{\alpha_1}(z) \dots \partial_z^{-n_k-1} a_{\alpha_k}(z) \partial_z^{-m_1} a^*_{\beta_1}(z) \dots \partial_z^{-m_l} a^*_{\beta_l}(z) :$$

Алгебра Ли $U(M)$

Определение

$U(M) = (M \otimes \mathbb{C}((t)))/(Im(T \otimes 1 + 1 \otimes \partial_t))$

Предложение

$U(M)$ - алгебра Ли, которая действует на M операторами $Y(v, t)$.

Имеется гомоморфизм алгебр Ли $U(M) \to \tilde{\mathcal{A}}$

$$A \otimes f(z) \mapsto Res_{z=0} Y(A, z) f(z) dz$$

Определение

$\mathcal{A}_{loc} := \tilde{\mathcal{A}} \cap U(M)$

Алгебра $\mathcal{A}_{\leq 1,loc}$

Аналогично можно определить $\mathcal{A}_{\leq 1,loc}$ $\mathcal{A}_{0,loc}$, $\mathcal{A}_{1,loc}$

Предложение

- $\mathcal{A}_{0,loc}$ = коэффициенты Фурье в рядах $P(a^*_\alpha(z), \partial_z a^*_\alpha(z), \dots)$
- $\mathcal{A}_{\leq 1,loc}$ = коэффициенты Фурье в рядах $: P(a^*_\alpha(z), \partial_z a^*_\alpha(z), \dots) a_\beta(z) :$
- $\mathcal{A}_{1,loc}$ = коэффициенты Фурье в рядах $P(a^*_\alpha(z), \partial_z a^*_\alpha(z), \dots) a_\beta(z)$

Имеется гомоморфзим векторных пространств, но не алгебр Ли

$$\iota : \mathcal{A}_{1,loc} \to \mathcal{A}_{\leq 1,loc}$$

$$P(a^*_\alpha(z), \partial_z a^*_\alpha(z), \dots) a_\beta(z) \mapsto : P(a^*_\alpha(z), \partial_z a^*_\alpha(z), \dots) a_\beta(z) :$$

Опять общий план

Короткая точная последовательность для алгебры Вейля

$$0 \to \mathcal{A}_{0,loc} \to \mathcal{A}_{\leq 1,loc} \to \mathcal{A}_{1,loc} \to 0$$

Короткая точная последовательность для аффинной алгебры

$$0 \to \mathbb{C}K \to \hat{\mathfrak{g}} \to L\mathfrak{g} \to 0$$

Также имеются отображения

$$\alpha : L\mathfrak{g} \to \mathcal{A}_{1,loc}, i : \mathbb{C}K \to \mathcal{A}_{0,loc}, i(K) = \kappa_c$$

Хотим построить среднее отображение:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{A}_{0,loc} \arrow[r] & \mathcal{A}_{\leq 1,loc} \arrow[r] & \mathcal{A}_{1,loc} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{C}K \arrow[r] \arrow[u, "i"] & \hat{\mathfrak{g}} \arrow[r] \arrow[u, "?"] & L\mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[u, "\alpha"] & 0
\end{tikzcd}$$

Связь точных троек и когомологий

Предложение

Пусть дана короткая точная последовательность алгебр Ли

$$0 \to \mathfrak{a} \to \mathfrak{b} \to \mathfrak{c} \to 0$$

$\mathfrak{a}$ абелева и является модулем над $\mathfrak{c}$
$\iota : \mathfrak{c} \to \mathfrak{b}$ - расщепление как последовательности векторных пространств, то есть $\mathfrak{b} = \iota(\mathfrak{c}) \oplus \mathfrak{a}$
Тогда им можно взаимооднозначно сопоставить элемент σ из $H^2(\mathfrak{c}, \mathfrak{a})$ по следующему правилу:

$$\sigma : \Lambda^2\mathfrak{c} \to \mathfrak{a}$$

$$\sigma(a, b) = \iota([a, b]) - [\iota(a), \iota(b)]$$

Лемма о поднятии отображения

Лемма

Пусть даны две точные последовательности:

$$0 \to \mathfrak{a} \to \mathfrak{b} \to \mathfrak{c} \to 0$$

$$0 \to \mathfrak{a}' \to \mathfrak{b}' \to \mathfrak{c}' \to 0$$

их классы - $\omega \in H^2(\mathfrak{c}, \mathfrak{a})$ и $\sigma \in H^2(\mathfrak{c}', \mathfrak{a}')$.
Даны отображения $i : \mathfrak{a}' \to \mathfrak{a}$, $\alpha : \mathfrak{c}' \to \mathfrak{c}$
$\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ - абелевы алгебры Ли, являющиеся модулем над $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{c}'$.
Пускай $i_*(\sigma) = \alpha^*(\omega)$ в $H^2(\mathfrak{c}', \mathfrak{a})$. Тогда существует β:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[r] & \mathfrak{b} \arrow[r] & \mathfrak{c} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{a}' \arrow[r] \arrow[u, "i"] & \mathfrak{b}' \arrow[r] \arrow[u, "\beta"] & \mathfrak{c}' \arrow[r] \arrow[u, "\alpha"] & 0
\end{tikzcd}$$

Доказательство леммы

Так как $i_*(\sigma) = \alpha^*(\omega)$ в $H^2(\mathfrak{c}', \mathfrak{a})$, то $i_*(\sigma) + d\gamma = \alpha^*(\omega)$ для некоторого $\gamma : \mathfrak{c}' \to \mathfrak{a}$ - линейный функционал. Определим отображение $\beta : \mathfrak{b}' \to \mathfrak{b}$ следующим образом:

$$\beta(c) = \iota(\alpha(c)) + \gamma(c) \text{ для } c \in \mathfrak{c}'$$

$$\beta(a) = i(a) \text{ для } a \in \mathfrak{a}'$$

Можно проверить, что из условия $i_*(\sigma) + d\gamma = \alpha^*(\omega)$ следует, что это отображение будет являться гомоморфзимом.

Подсчёт коциклов

Найдём явную запись коциклов $\alpha^*(\omega)$ и $i_*(\sigma)$:

$i_*(\sigma)(a_n, b_m) = i([a,b]_{n+m} + K\delta_{n+m,0}(a,b) - [a,b]_{n+m}) = \kappa_c \delta_{n+m,0}(a,b)$

Найдём значение коцикла ω на $(Pa(z), Qa(w))$, где P, Q - полиномы от $a^*(z), \partial a^*(z), \ldots$.

$$\omega(Pa(z), Qa(z)) =: [Pa(z), Qa(w)] : -[: Pa(z) :, : Qa(w) :]$$

Первое слагаемое:

$$[a(z), \partial^n a^*(w)] = \delta^{(n+1)}(z,w)$$

$$[Pa(z), Qa(w)] = \sum_{n=0}^{\infty} P \frac{\partial Q}{\partial(\partial^n a^*(z))} a(w) \delta^{(n+1)}(z,w) -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} Q \frac{\partial P}{\partial(\partial^n a^*(w))} a(z) \delta^{(n+1)}(z,w)$$

Посчитаем второе слагаемое. Заметим, что
: $Pa(z) := Y(Pa_{-1}, z)$. Таким образом, нам нужно найти
$Y(Pa_{-1}, z)Y(Qa_{-1}, w)$
Пусть даны два нормально упорядоченных монома g, g' от
$a(z), a^*(z)$ и их производных.

Определение

$(\partial^n a(z), \partial^m a^*(z))$ называется спариванием между $g(z)$ и $g'(w)$, если $\partial^n a(z)$ встречается в $g(z)$, $\partial^m a^*(z)$ встречается в $g'(w)$

Определение

$(\partial^n a^*(z), \partial^m a(z))$ называется спариванием между $g(z)$ и $g'(w)$, если $\partial^n a^*(z)$ встречается в $g(z)$, $\partial^m a(z)$ встречается в $g'(w)$

Подсчёт коциклов

Сопоставим каждому спариванию функцию

$$(-1)^n \frac{(n+m)!}{(z-w)^{n+m+1}} \text{ или } (-1)^{m+1} \frac{(n+m)!}{(z-w)^{n+m+1}}$$

Определение

Множественное спаривание B - дизъюнктный набор одиночных спариваний. Каждому B мы сопоставляем функцию $f_B(z, w)$, равную произведению функций соответствующих одиночных спариваний.

Подсчёт коциклов

Обозначим за $(g(z), g'(w))_B$ произведение всех факторов, не входящих в B.

Определение

Свёртка $: g(z), g'(w)) :_B$ это произведение $: (g(z), g'(w))_B : f_B(z, w)$

По определению $: g(z), g'(w)) :_\varnothing =: g(z), g'(w)) :$

Лемма (Формула Уика)

$g(z)g'(w)$ равно сумме $: g(z), g'(w)) :_B$ по всем свёрткам с учётом кратности.

Подсчёт коциклов

Применим формулу Уика для $Y(Pa_{-1},z)$, $Y(Qa_{-1},w)$.
Спаривания - $(a(z),\partial^n a^*(w))$ для каждого a^*_{-n}, входящего в Q и $(\partial^n a^*(z),a(w))$ для каждого a^*_{-n}, входящего в P

Предложение

$$
\begin{aligned}
Y(Pa_{-1},z)Y(Qa_{-1},w) &=: Y(Pa_{-1},z)Y(Qa_{-1},w):+\\
&+\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(z-w)^{n+1}}:Y(P,z)Y(\frac{\partial Q}{\partial a^*_{-n}}a_{-1},w):-\\
&-\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(z-w)^{n+1}}:Y(\frac{\partial P}{\partial a^*_{-n}}a_{-1},z)Y(P,w):+\\
&+\sum_{n,m\geq 0}\frac{1}{(z-w)^{n+m+2}}Y(\frac{\partial P}{\partial a^*_{-n}},z)Y(\frac{\partial Q}{\partial a^*_{-n}},w)
\end{aligned}
$$

Следствие

$$[Y(Pa_{-1},z),Y(Qa_{-1},w)]=\sum_{n\geq 0}\delta^{(n+1)}(z,w):Y(P,z)Y(\frac{\partial Q}{\partial a^*_{-n}}a_{-1},w)$$

$$-\sum_{n\geq 0}\delta^{(n+1)}(z,w):Y(\frac{\partial P}{\partial a^*_{-n}}a_{-1},z)Y(P,w):+$$

$$+\sum_{n,m\geq 0}\delta^{(n+m+1)}(z,w)Y(\frac{\partial P}{\partial a^*_{-n}},z)Y(\frac{\partial Q}{\partial a^*_{-n}},w)$$

Предложение

$$\omega(Pa(z), Qa(z)) = \sum_{n,m\geq 0} \delta^{(n+m+1)}(z,w) Y(\frac{\partial P}{\partial a^*_{-m}}, z) Y(\frac{\partial Q}{\partial a^*_{-n}}, w)$$

Следствие

$$\omega(Pa(z)_{[k]}, Qa(z)_{[s]}) = \sum_{n,m\geq 0} Res_{w=0} \frac{1}{(n+m+1)!} \partial_z^{n+m+1}$$
$$Y(\frac{\partial P}{\partial a^*_{-n}}, z) Y(\frac{\partial Q}{\partial a^*_{-m}}, w) z^k w^s|_{z=w} dw$$

Напомним:

$$e(z) \mapsto a(z)$$

$$h(z) \mapsto -2a^*(z)a(z)$$

$$f(z) \mapsto -a^*(z)^2 a(z)$$

Таким образом, полиномы для это $P_e = 1, P_h = -2a_0^*$ и $P_f = (a_0^*)^2$.

- $\alpha^*\omega(e_k, e_s) = \alpha^*\omega(e_k, h_s) = \alpha^*\omega(e_k, f_s) = 0$, так как P_e не зависит от a^*_{-n}.
- $\alpha^*\omega(h_k, h_s) = Res_{w=0}\partial_z(-2)(-2)z^k w^s|_{z=w}dw = 4Res_{z=0}z^{k+s-1}dz = 4k\delta_{k+s}$
- $\alpha^*\omega(h_k, f_s) = Res_{w=0}\partial_z(-2)Y(-2a_0^*, w)z^k w^s|_{z=w}dw = 4kRes_{z=0}a^*(z)z^{k+s-1}dz = 4ka^*_{k+s}$
- $\alpha^*\omega(f_k, f_s) =$ $Res_{w=0}\partial_z Y(-2a_0^*, z)Y(-2a_0^*, w)z^k w^s|_{z=w}dw =$ $= 4kRes_{z=0}\sum_{n,m} a_n^* a_m^* z^{k+s-n-m-1}dz = 4k\sum_l a_l^* a^*_{k+s-l}$

Пример $\mathfrak{sl}_2$

Хотим - γ такой, что $i_*(\sigma) + d\gamma = \alpha^*(\omega)$. Введём градуировку на $C^\bullet(L\mathfrak{g}, \mathcal{A}_{0,loc})$:

$$wt(a_n^*) = wt(e)$$

$$wt(J_n^a) = wt(J^a)$$

Заметим, что $\alpha^*(\omega)$ и $i_*(\sigma)$ однородны степени 0 относительно этой градуировки, значит нам нужно искать γ так, чтобы он был однородным степени 0.

$$\gamma(e(z)) = \gamma(h(z)) = 0$$
$$\gamma(f(z)) = \lambda \partial a^*(z)$$

Найдём $d\gamma$:

$$d\gamma(e_k, e_s) = d\gamma(e_k, h_s) = d\gamma(h_k, h_s) = 0$$

$$d\gamma(e_k, f_s) = e_k \gamma(f_s) - f_s \gamma(e_k) + \gamma([e_k, f_s]) = \lambda s a_k(a^*_{-s}) = \lambda s \delta_{k+s,0}$$

$$d\gamma(h_k, f_s) = h_k \gamma(f_s) - f_s \gamma(h_k) + \gamma([h_k, f_s]) =$$
$$= (-2 \sum_l a_l^* a_{k-l})(\lambda s a_s^*) - 2\lambda(k+s) a^*_{k+s} = -2\lambda k a^*_{k+s}$$

Пример $\mathfrak{sl}_2$

$$d\gamma(f_k, f_s) = f_k\gamma(f_s) - f_s\gamma(f_k) + \gamma([f_k, f_s]) =$$

$$= -\sum_{l,t} a_l^* a_t^* a_{k-l-t}(\lambda s a_s^*) + \sum_{l,t} a_l^* a_t^* a_{s-l-t}(\lambda k a_k^*) =$$

$$= -2\lambda k \sum_{l} a_l^* a_{k+s-l}^*$$

Таким образом, получаем, что $i_*(\sigma) + d\gamma = \alpha^*(\omega)$ при $\lambda = -2$.

Следствие

Существует отображение

$$\hat{\mathfrak{sl}}_{2_{\kappa_c}} \to \mathcal{A}_{\leq 1, loc}$$

$$e(z) \mapsto a(z)$$

$$h(z) \mapsto -2 : a^*(z)a(z) :$$

$$f(z) \mapsto - : a^*(z)^2 a(z) : -2\partial a^*(z)$$

Таким образом, M является $\hat{\mathfrak{sl}}_2$-модулем. Это представление называется модулем Вакимото.

Покажем план доказателства в общем случае. Идея - ограничить коциклы с $\Lambda^2\mathfrak{g}$ на $\Lambda^2\mathfrak{h}$ и показать, что тогда они лежат в одном классе когомологий.

Определение

Алгебра Клиффорда порождается элементами $\psi_{a,n}, \psi^*_{a,n}$, $a = 1, ..., dim\mathfrak{g}$ с соотношениями:

$$[\psi_{a,n}, \psi^*_{b,m}]_+ = \psi_{a,n}\psi^*_{b,m} + \psi^*_{b,m}\psi_{a,n} = \delta_{n+m,0}\delta_{a,b}$$

$$[\psi_{a,n}, \psi_{b,m}]_+ = [\psi^*_{a,n}, \psi^*_{b,m}]_+ = 0$$

Локальный комплекс

Определение

Λ - модуль, порождённый вектором $|0\rangle$ с соотношениями

$$\psi_{a,n}|0\rangle = 0 \text{ для } n > 0$$

$$\psi^*_{a,n}|0\rangle = 0 \text{ для } n \geq 0$$

Λ является вертекс операторной супералгеброй со свойствами, аналогичными модулю M.

Определим линейный функционал из
$C^i(L\mathfrak{g}, \mathcal{A}_{0,loc}) = Hom(\Lambda^i(L\mathfrak{g}), \mathcal{A}_{0,loc})$

$$\psi_{a_1,-n_1} \ldots \psi_{a_i,-n_i} f = (J^{a_1}_{n_1} \wedge \ldots \wedge J^{a_i}_{n_i})^* f$$

где $f \in \mathcal{A}_{0,loc}$.

Заметим, что выражения

$$\int Y(\psi_{a_1,n_1}\ldots\psi_{a_i,n_i}a^*_{\alpha_1,m_1}\ldots a^*_{\alpha_j,m_j}, z)dz$$

определяют линейный функционал из $C^i(L\mathfrak{g}, \mathcal{A}_{0,loc})$

Предложение

Все такие отображения образуют подкомплекс, который обозначается $C^\bullet_{loc}(L\mathfrak{g}, \mathcal{A}_{0,loc})$

Предложение

$i_*(\sigma)$ и $\alpha^*(\omega)$ лежат в $C^\bullet_{loc}(L\mathfrak{g}, \mathcal{A}_{0,loc})$.

Ограничение на $\mathfrak{h}$

Далее мы хотим ввести второй вспомогательный комплекс. Обозначим за $L_+\mathfrak{g} = \mathfrak{g}[[t]]$ - алгебра токов. $L_+\mathfrak{g}$ действует на пространстве

$$M_+ := \mathbb{C}[a^*_{\alpha,n}]_{\alpha\in\Delta_+, n\leq 0}$$

которое является пространством функций на $L_+U = U[[t]]$. Отождествляем комплекс Шевалле $C^\bullet(L_+\mathfrak{g}, M_+)$ с суперпространством

$$M_+ \otimes \Lambda(\psi^*_{a,n})_{n\leq 0}$$

Введём супердифференцирование на нём:

$$Ta^*_{\alpha,n} = -(n-1)a^*_{\alpha,n-1}, \; T\psi^*_{a,n} = -(n-1)\psi^*_{a,n-1}$$

Определим отображение

$$\int : C^\bullet(L_+\mathfrak{g}, M_+) \to C^\bullet_{loc}(L\mathfrak{g}, \mathcal{A}_{0,loc})$$

$$A \mapsto \int Y(A,z)dz$$

Предложение

$\int$ определяет изоморфизм

$$C^\bullet_{loc}(L\mathfrak{g}, \mathcal{A}_{0,loc}) \simeq C^\bullet(L_+\mathfrak{g}, M_+)/(Im T + \mathbb{C})$$

Ограничение на $\mathfrak{h}$

Далее мы можем свести когомологии $L_+\mathfrak{g}$ к когомологиям $L_+\mathfrak{h}$ с тривиальными коэффициентами:

Предложение

$$H^\bullet(L_+\mathfrak{g}, M_+) = H^\bullet(L_+\mathfrak{b}_-, \mathbb{C}) = H^\bullet(L_+\mathfrak{h}, \mathbb{C})$$

Первое равенство следует из того, что модуль M_+ коиндуцированный, второе из подсчёта спектральной последовательности.
Получаем

$$H^\bullet_{loc}(L\mathfrak{g}, \mathcal{A}_{0,loc}) = H^\bullet(L_+\mathfrak{h}, \mathbb{C})/(ImT + \mathbb{C})$$

Предложение

Если два коцикла из $C^\bullet_{loc}(L\mathfrak{g}, \mathcal{A}_{0,loc})$ совпадают при ограничении на $L\mathfrak{h}$, то они лежат в одном классе когомологий.

Окончание доказательства

Таким образом, нам надо проверить, что $i_*\sigma$ и $\alpha^*\omega$ совпадают на $L\mathfrak{h}$:

Предложение

$i_*\sigma(h_n, h'_m) = \alpha^*\omega(h_n, h'_m)$

Получили отображение $\hat{\mathfrak{g}}_{\kappa_c} \to \mathcal{A}_{\leq 1, loc}$, которое записывается как $J^a(z) \mapsto: \alpha(J^a(z)) : +\gamma(J^a(z))$, где $\alpha(J^a(z))$ - векторное поле, соответствующее $J^a(z)$.
Аналогично получаем, что $\gamma(e_i(z)) = \gamma(h_i(z)) = 0$, $\gamma(f_i(z)) = c_i \partial a^*_{\alpha_i}(z)$, где c_i - какие-то константы.

Окончание доказательства

Теорема

Существует гомоморфизм алгебр Ли:

$$\hat{\mathfrak{g}}_{\kappa_c} \to \mathcal{A}_{\leq 1, loc}$$

$$e_i(z) \to : \alpha(e_i(z)) :$$

$$h_i(z) \to : \alpha(h_i(z)) :$$

$$f_i(z) \to : \alpha(f_i(z)) : + c_i \partial a^*_{\alpha_i}(z)$$

где $\alpha(J^a(z))$ - векторное поле, соответствующее $J^a(z)$, c_i - некоторые константы.

Мы получили структуру $\hat{\mathfrak{g}}$-модуля на Фоковском модуле M

Определение

M с действием $\hat{\mathfrak{g}}$ называется модулем Вакимото на критическом уровне веса 0.

Можем определить отображение $V_{\kappa_c}(\mathfrak{g}) \to M$.

Лемма

Определение гомоморфизма вертексных алгебр $V_{\kappa_c}(\mathfrak{g}) \to V$ эквивалентно выбору векторов $\tilde{J}^a_n|0\rangle_V \in V$ степени 1 таких, что коэффициенты Фурье $\tilde{J}^a_n$ вертексных операторов $Y(\tilde{J}^a_n|0\rangle_V, z) = \sum_n \tilde{J}^a_n z^{-n-1}$ удовлетворяют соотношениям аффинной алгебры.

Следствие

Существует гомоморфзим $V_{\kappa_c}(\mathfrak{g}) \to M$ определённый формулами, данными в теореме.

Заметим, что мы можем выбрать γ с точностью до элемента из $H^1(L\mathfrak{g}, \mathcal{A}_{0,loc})$.

Предложение

$H^1(L\mathfrak{g}, \mathcal{A}_{0,loc})$ изоморфно пространству $(L\mathfrak{h})^*$.

Рассмотрим на примере $\mathfrak{sl}_2$.
Пусть дано $\chi(t) = \sum_n \chi_n t^{-n-1} \in \mathfrak{h}((t))$. Хотим построить $\phi \in H^1(L\mathfrak{sl}_2, \mathcal{A}_{0,loc})$, соответствующий χ, то есть такой, чтобы

$$\phi(h(z)) = \chi(t)$$

Из соображений веса получаем $\phi(e(z)) = 0$. Найдём $\phi(f(z))$:

$$\phi([e_n, f_m]) = e_n\phi(f_m) - f_m\phi(e_n)$$

$$e_n\phi(f_m) = \chi_{n+m}$$

Следовательно, получаем формулу для $\phi(f(z))$:

$$\phi(f(z)) = \chi(z)a^*(z)$$

Предложение

$d\phi = 0$

$$d\phi(e_n, e_m) = 0$$

$$d\phi(e_n, h_m) = e_n\phi(h_m) = 0$$

$$d\phi(e_n, f_m) = e_n\phi(f_m) + \phi(h_{n+m}) = a_n(\sum_k \chi_k a^*_{m-k}) + \chi_{n+m} = 0$$

$$d\phi(h_n, h_m) = h_n(\chi_m) - h_m(\chi_n) = 0$$

$$d\phi(h_n, f_m) = h_n(\sum_k \chi_k a^*_{m-k}) - f_m(\chi_n) - 2(\sum_k \chi_k a^*_{m+n-k}) =$$

$$= -2(\sum_k \chi_k a^*_{m+n-k}) + 2(\sum_k \chi_k a^*_{m+n-k}) = 0$$

Предложение

Для любого $\chi(t) \in \mathfrak{h}((t))$ существует отображение

$$\hat{\mathfrak{sl}}_{2\kappa_c} \to \mathcal{A}_{\leq 1, loc}$$

определённое по формулам:

$$e(z) \to : \alpha(e(z)) :$$

$$h(z) \to : \alpha(h(z)) : + \chi(z)$$

$$f(z) \to : \alpha(f(z)) : -2\partial a^*(z) + \chi(z) a^*(z)$$

Это отображение определяет структуру $\hat{\mathfrak{sl}}_{2\kappa_c}$-модуля на M.

Модули Вакимото

Определение

$Heis_0$ - коммутативная алгебра с образующими $b_{i,n}, i = 1, ..., rk(\mathfrak{g}), n \in \mathbb{Z}$

У неё имеется естественное Фоковское представление $\mathbb{C}[b_{i,n}]_{n<0}$, являющееся вертексной алгеброй, обозначим его π_0.

Предложение

Существует отображение

$$\hat{\mathfrak{g}}_{\kappa_c} \to \mathcal{A}_{\leq 1, loc} \otimes Heis_0$$

с формулами

$$e_i(z) \to: \alpha(e_i(z)):$$

$$h_i(z) \to: \alpha(h_i(z)): + \chi_i(z)$$

$$f_i(z) \to: \alpha(f_i(z)): + c_i \partial a^*_{\alpha_i}(z) + \chi_i(z) a^*_{\alpha_i}(z)$$

Это отображение определяет структуру $\hat{\mathfrak{g}}$-модуля на $M \otimes \pi_0$, более того существует отображение вертексных алгебр

$$V_{\kappa_c}(\mathfrak{g}) \to M \otimes \pi_0$$

Определение

$M \otimes \pi_0$ называется модулем Вакимото на критическом уровне и обозначается W_{0,κ_c}.

Модули Вакимото для некритического уровня

Определение

$Heis_{\kappa-\kappa_c}$ - алгебра с образующими $b_{i,n}, i = 1, ..., rk(\mathfrak{g}), n \in \mathbb{Z}$ и соотношениями

$$[b_{i,n}, b_{j,m}] = n(\kappa - \kappa_c)(h_i, h_j)\delta_{n,-m}$$

Соответствующий Фоковский модуль обозначается $\pi_0^{\kappa-\kappa_c}$.

Предложение

Существует отображение

$$\hat{\mathfrak{g}}_\kappa \to \mathcal{A}_{\leq 1, loc} \otimes Heis_{\kappa-\kappa_c}$$

с формулами

$$e_i(z) \to : \alpha(e_i(z)) :$$

$$h_i(z) \to : \alpha(h_i(z)) : + \chi_i(z)$$

$$f_i(z) \to : \alpha(f_i(z)) : + (c_i + (\kappa - \kappa_c)(e_i, f_i))\partial a^*_{\alpha_i}(z) + \chi_i(z) a^*_{\alpha_i}(z)$$

Это отображение определяет структуру $\hat{\mathfrak{g}}$-модуля на $M \otimes \pi_0^{\kappa-\kappa_c}$, более того существует отображение вертексных алгебр

$$V_\kappa(\mathfrak{g}) \to M \otimes \pi_0^{\kappa-\kappa_c}$$

Модули Вакимото для некритического уровня

Вместо Фоковского модуля веса 0 $\pi_0^{\kappa-\kappa_c}$ мы можем взять модуль со старшим весом λ, то есть такой, что $b_{i,0}|0\rangle = \lambda(h_i)|0\rangle$. Он обозначается $\pi_\lambda^{\kappa-\kappa_c}$.

Предложение

$M \otimes \pi_\lambda^{\kappa-\kappa_c}$ является $\hat{\mathfrak{g}}$-модулем на уровне κ.

Определение

$M \otimes \pi_\lambda^{\kappa-\kappa_c}$ называется модулем Вакимото на уровне κ веса λ и обозначается $W_{\lambda,\kappa}$.