# Contents


**1 Универсальная подалгебра** **1**

**2 Доказательство независимости** **5**

2.1 Построение отображения в спектр . . . . . . . . . . . . . . . . . 5

2.2 Определение джетов . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

2.3 Применение джетов . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8

**3 Интегрирование модели Годена** **9**

3.1 Определение $A_\chi(z_1, ..., z_n)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9

3.2 Задание $A_\chi(z_1, ..., z_n)$ с помощью вычетов . . . . . . . . . . . 11

3.3 Пример $n = 1$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12

**4 Производящая функция** **13**

**5 Степень трансцедентности** **14**


# 1 Универсальная подалгебра

Наша цель - проинтегрировать модель Годена, то есть найти максимальную коммутативную подалгебру в $S^\bullet(\mathfrak{g})^n$. Для этого нам понадобится алгебра $S^\bullet(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])$: мы построим максимальную коммутативную подалгебру $A^{univ}$ в ней (она называется универсальной подалгеброй Годена), и затем с помощью отображения получим подалгебру $A_\chi(z_1, ..., z_n)$ в $S^\bullet(\mathfrak{g})^n$. Отображение выглядит следующим образом:

$$\begin{tikzcd}
S^\bullet(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]) \arrow[r, "ev_{z_1,\dots,z_n,\infty}"] \arrow[dr] & S^\bullet(\mathfrak{g})^{n+1} \arrow[d, "id\otimes\chi"] \\
& S^\bullet(\mathfrak{g})^n
\end{tikzcd}$$

$$A^{univ} \mapsto A_\chi(z_1, ..., z_n)$$

где

$$ev_z : g \otimes t^m \mapsto z^m g$$

$$ev_\infty : g \otimes t^m \mapsto \delta_{-1,m} g$$

$$\chi : g \mapsto (\chi, g)$$

Мы будем строить универсальную подалгебру с помощью метода Марги-Ленарда.

**Определение.** *Скобки Пуассона на коммутативной алгебре $A$ называются согласованными, если любая линейная комбинация $u\{,\}_1 + v\{,\}_2$ также является скобкой Пуассона.*

**Теорема 1.** *Пусть $\{,\}_1$, $\{,\}_2$ - согласованные скобки Пуассона на $A$. Обозначим $Z_{u,v}(A)$ - центр относительно скобки $u\{,\}_1 + v\{,\}_2$.*

*Тогда подалгебра $\langle Z_{u,v}(A)\rangle$, порождённая всеми такими центрами для общих $u, v$, является коммутативной относительно любой такой скобки.*

Нам будет необходимо перейти от $S^\bullet(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])$ к $S^\bullet(t^{-1}\mathfrak{g}[[t^{-1}]])$. На этой алгебре можно ввести 2 градуировки: считать, что максимальная степень равна $-1$ или $0$. Первая градуировка соответствует алгебре $S^\bullet(t^{-1}\mathfrak{g}[[t^{-1}]])$, вторая - алгебре $S^\bullet(\mathfrak{g}[[t^{-1}]])$. Из-за этого возникает некоторая путаница, и в разных местах пишут разные алгебры. Мы будем использовать первую градуировку.

**Определение.** *На $S^\bullet(\mathfrak{g}[[t^{-1}]])$ можно ввести две скобки:*

$$\{x \otimes t^n, y \otimes t^m\}_1 = [x, y]t^{n+m+1}$$

$$\{x \otimes t^n, y \otimes t^m\}_2 = [x, y]t^{n+m}$$

*Вторая скобка - обычная скобка Ли на $t^{-1}\mathfrak{g}[[t^{-1}]]$. Первая скобка приходит из изоморфизма (векторных пространств)*

$$\mathfrak{g}[[t^{-1}]] \to t^{-1}\mathfrak{g}[[t^{-1}]]$$

$$x \otimes t^n \mapsto x \otimes t^{n-1}$$

**Предложение 1.**

- *Скобки $\{,\}_1$ и $\{,\}_2$ - согласованы.*
- *Если $x, y \in S^\bullet(\mathfrak{g}[[t^{-1}]])^\mathfrak{g}$, то $\{x, y\}_i \in S^\bullet(\mathfrak{g}[[t^{-1}]])^\mathfrak{g}$ (то есть скобки ограничиваются на $S^\bullet(\mathfrak{g}[[t^{-1}]])^\mathfrak{g}$)*

*Proof.* 1) Необходмо проверить тождество Якоби (Обозначаем $x \otimes t^n = x[n]$):

$$\begin{aligned}
&\{\{x[n], y[m]\}_{u,v}, z[k]\}_{u,v} = \\
&= u\{u\{x[n], y[m]\}_1 + v\{x[n], y[m]\}_2, z[k]\}_1 + v\{u\{x[n], y[m]\}_1 + v\{x[n], y[m]\}_2, z[k]\}_2 = \\
&= u\{u[x, y][n+m+1] + v[x, y][n+m], z[k]\}_1 + v\{u[x, y][n+m+1] + v[x, y][n+m], z[k]\}_2 = \\
&= u^2[[x, y], z][n+m+k+2] + 2uv[[x, y], z][n+m+k+1] + v^2[[x, y], z][n+m+k]
\end{aligned}$$

Аналогично для 2 остальных слагаемых получаем

$u^2[[y,z],x][n+m+k+2]+2uv[[y,z],x][n+m+k+1]+v^2[[y,z],x][n+m+k]$

$u^2[[z,x],y][n+m+k+2]+2uv[[z,x],y][n+m+k+1]+v^2[[z,x],y][n+m+k]$

Тождество Якоби выполнено.

2) Очевидно $\square$

**Следствие 1.** *Алгебра $A := \langle Z_{u,v} | u \neq 0 \rangle$ коммутативна относительно любой скобки $\{,\}_{u,v}$ ($Z_{u,v}$ - центр в $S^\bullet(t^{-1}\mathfrak{g}[[t^{-1}]])^{\mathfrak{g}}$).*

Это пока не та алгебра, которую мы хотим получить, хотя уже близко. Опишем её явно.

**Факт.** $S^\bullet(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = \mathbb{C}[\Phi_1, ..., \Phi_r]$

Имеется вложение

$$S^\bullet(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \hookrightarrow S^\bullet(t^{-1}\mathfrak{g}[[t^{-1}]])^{\mathfrak{g}}$$

$$x \mapsto x \otimes t^{-1}$$

Мы будем отождествлять $\Phi_i$ с их образами при вложении.

**Предложение 2.** $Z_{1,0} = \langle \Phi_1, ..., \Phi_r \rangle$

На самом деле нам будет нужно только то, что все $\Phi_1$ лежат в центре.

Теперь мы хотим разнести этот центр так, чтобы он стал центром для скобки $\{,\}_{u,v}$. Определим отображение:

$$\phi_{u,v} : x[n] \mapsto \frac{x[n]}{u + vt^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-v)^k}{u^{k+1}} x[n-k]$$

Заметим, что оно обратимо, и обратное выглядит как:

$$\phi_{u,v}^{-1} : x[n] \mapsto ux[n] + vx[n-1]$$

Также заметим, что одну скобку оно переводит в другую, в том смысле, что

**Предложение 3.**

$$\{x, y\}_{1,0} = \{\phi_{u,v}(x), y\}_{u,v}$$

*Proof.* Достаточно доказать, что

$$\{\phi_{u,v}^{-1}(x[n]), y[m]\}_{1,0} = \{x[n], y[m]\}_{u,v}$$

$$\{\phi_{u,v}^{-1}(x[n]), y[m]\}_{1,0} = \{ux[n]+vx[n-1], y[m]\}_{1,0} = u[x,y][n+m+1]+v[x,y][n+m]$$

$$\{x[n], y[m]\}_{u,v} = u\{x[n], y[m]\}_1+v\{x[n], y[m]\}_2 = u[x,y][n+m+1]+v[x,y][n+m]$$

□

**Следствие 2.** $Z_{u,v} = \phi_{u,v}(Z_{1,0})$

**Следствие 3.** $A = \langle \phi_{1,v}(\Phi_i) \rangle$

Теперь мы можем увидеть, почему эта алгебра нам не подходит: мы хотим получить алгебру из многочленов, а тут есть ряды. Однако требуемую алгебру $A^{univ}$ легко по ней получить.

**Предложение 4.** *Коэффициенты по $v$ ряда $\phi_{1,v}(\Phi_i)$ коммутируют.*

*Proof.* Пусть $\Phi_i(v) = \Phi_i^{(0)} + \Phi_i^{(1)} v + \dots$. Тогда $\{\Phi_i(v), \Phi_j(z)\} = 0$. Заметим, что коэффициент при $v^k z^l$ в $\{\Phi_i(v), \Phi_j(z)\}$ равен $\{\Phi_i^{(k)}, \Phi_j^{(l)}\}$. Но он равен нулю, чтд. □

Теперь мы сможем определить универсальную подалгебру.

**Определение.** $A^{univ} := \langle$*коэффициенты при* $v^k$ *ряда* $\Phi_i(v)\rangle$

Заметим, что $A^{univ} \in S^\bullet(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])$. Порождающие $A^{univ}$ можно записать ещё более явно

**Определение.** *Определим дифференцирование $D$ на алгебре:*

$$D(x \otimes t^n) = nx \otimes t^{n-1}$$

**Пример 1.** *Пусть $x_a$ - ортонормированный базис в $\mathfrak{g}$. Тогда у нас имеется Казимир $\omega = \sum_a x_a^2$. Его образ в $S^\bullet(t^{-1}\mathfrak{g}[[t^{-1}]])^{\mathfrak{g}}$ запишется как*

$$\Phi_1 = \omega = \sum_a (x_a[-1])^2$$

*Применим к нему дифференцирование, получим*

$$D(\omega) = -2\sum_a x_a[-1]x_a[-2]$$

Заметим, что коэффициент при $(v/u)^k$ в $\phi_{u,v}(x)$ пропорционален $D^k(x)$, поэтому $D^k\Phi_i$ порождают $A^{univ}$:

**Предложение 5.** $A^{univ} = \langle D^k\Phi_i \rangle$

На самом деле верно более сильное утверждение:

**Теорема 2.** *$D^k(\Phi_i)$ свободно порождают $A^{univ}$, то есть*

$$A^{univ} = \mathbb{C}[D^k\Phi_1, \dots, D^k\Phi_r]_{k\geq 0}$$

# 2 Доказательство независимости

## 2.1 Построение отображения в спектр

Мы разберём подробно доказательство в типе $A_r$. Обозначим $P_i = \Phi_i^* \in \mathcal{O}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$. Для типа $A_r$ $P_i(x) = Tr(x^{i+1})$ (где $x$ рассматривается как обычная матрица). Рассмотрим отображение

$$\mathfrak{g} \to Spec(\mathbb{C}[P_1, ..., P_r]) = \mathbb{C}^r$$

которое соответствует вложению

$$\mathbb{C}[P_1, ..., P_r] = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^{\mathfrak{g}} \hookrightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] = \mathcal{O}(\mathfrak{g})$$

Мы бы хотели иметь аналогчиное сюръективное отображение для $\mathfrak{g}[[t]]$ :

$$\mathfrak{g}[[t]] \to Spec(\mathbb{C}[D^k P_1, ..., D^k P_r]_{k\geq 0})$$

Тогда соответветствующее отображение на функциях давало бы нам вложение

$$\mathbb{C}[D^k P_1, ..., D^k P_r]_{k\geq 0} \hookrightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{g}[[t]])$$

И из этого бы следовала алгебраическая независимость $D^k P_i$.

Однако нам не удастся получить такое отображение, и основным препятствием будет то, что это отображение не гладкое (мы это сейчас увидим). Поэтому для начала нам нужно немного изменить его.

Запишем, как это отображение выглядит явно:

$$x \mapsto (Tr(x^2), ..., Tr(x^{r+1}))$$

Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_{r+1}$ - собственные значения $x$ (с учётом кратности). Тогда отображение можно записать как

$$x \mapsto (\sum_i \lambda_i^2, ..., \sum_i \lambda_i^{r+1})$$

Это отображение постоянно на орбитах, так как все элементы в одной орбите имеют одинаковые собственные значения. Более того, по числам $\sum_i \lambda_i^2, ..., \sum_i \lambda_i^{r+1}$ можно однозначно восстановить все $\lambda_i$ (добавив соотношение $\sum_i \lambda_i = 0$). Тогда прообраз каждой точки будет состоять из всех орбит с одинаковыми собственными значениями.

**Пример 2.** *Рассмотрим все элементы с нулевыми собственными значениями (то есть все нильпотентные элементы). Каждый из них сопряжён* *матрице из $l$ Жордановых блоков размерностей $k_1, ..., k_l$ ($\sum k_i = r+1$). Следовательно, в каждой орбите лежит по одному такому элементу.*

*Из всех орбит есть одна наименьшая (состоящяя из нуля) и наибольшая (с элементом* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ & & & ... & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$*). Этот элемент называется регулярным нильпотентом.*

**Определение.** *Элемент $x \in \mathfrak{g}$ называется регулярным, если размерность его стабилизатора наименьшая среди всех элементов с такими же собственными значениями.*

*Если элемент регулярен, то вся его орбита тоже. Множество регулярных элементов обозначается $\mathfrak{g}^{reg}$.*

**Замечание.** *Если все собственные значения различны, то регулярная орбита это полупростая орбита, соответствующая диагональной матрице. (более того, это единственная орбита с этими значениями).*

*Если некоторые собственные значения совпадают, то регулярная орбита соответствует выбору наибольшей Жордановой клетки для каждого из них.*

Таким образом, в прообразе каждой точки лежит ровно одна регулярная орбита. Ограничим наше отображение на $\mathfrak{g}^{reg}$

$$\mathfrak{g}^{reg} \to Spec(\mathbb{C}[P_1, ..., P_r]) = \mathbb{C}^r$$

**Предложение 6.** *Это гладкое сюръективное отображение, которое осуществляет биекцию на орбитах.*

Доказательство следует из того, что слои - гладкие и одинаковой размерности $= (r+1)^2 - r - 1$.

## 2.2 Определение джетов

Теперь мы хотим перейти от $\mathfrak{g}$ к $\mathfrak{g}[[t]]$. Для этого нам понадобятся так называемые джеты, или струи.

Пусть нам дана полиномиальная функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Тогда отображение на функциях можно записать как

$$f^* : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[t]$$

$$f^* : x \mapsto f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + ...$$

Заметим, что

$$f(0) = a \Leftrightarrow f^*(x-a) \subset (t) = t\mathbb{C}[t]$$

Кроме того, имеется отображение факторизации

$$\alpha : \mathbb{C}[t] \to \mathbb{C}[t]/t^2$$

Мы получаем, что $f$ и $g$ имеют одинаковые линейные части тогда, и только тогда, когда

$$\alpha \circ f^* = \alpha \circ g^* : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[t]/t^2$$

Иначе говоря, кривые $f$ и $g$ эквивалентны как вектора в $T_a\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда они задают одинаковые отображения в $\mathbb{C}[t]/t^2$. Таким образом, можно сказать, что вектора касательного пространства находятся во взаимнооднозначном соответствии с отображениями:

$$T_a\mathbb{C} = \{\beta : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[t]/t^2 | \beta(x-a) \subset (t)\}$$

$$T\mathbb{C} = \{\beta : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[t]/t^2\}$$

Это определение можно обобщить, взяв вместо второй степени произвольную.

**Определение.** *Пространством $J^k\mathbb{C}$ $k$-струй (jets) многообразия $\mathbb{C}$ называется множество отображений*

$$J^k\mathbb{C} = Hom_{Alg}(\mathbb{C}[x], \mathbb{C}[t]/t^{k+1})$$

*Или, что тоже самое*

$$J^k\mathbb{C} = Hom(Spec\mathbb{C}[t]/t^{k+1}, \mathbb{C})$$

*Такое пространство ещё называется пространством $\mathbb{C}[t]/t^{k+1}$-точек*

**Предложение 7.** *$J^k\mathbb{C}$ расслаивается над $\mathbb{C}$:*

$$J^k\mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$J^k_a\mathbb{C} \to a$$

$$J^k_a = \{\beta : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[t]/t^{k+1} | \beta(x-a) \subset (t)\}$$

Таким образом, $J^2$ помнит про кривые не только линейную часть, но и квадратичную, $J^3$ - ещё и кубическую, и так далее.

Это определение можно обобщить на произвольное многообразие $X$:

**Определение.** *Пространством* $J^k X$ *k-струй (jets) многообразия* $X$ *называется множество отображений*

$$J^k X = Hom(Spec\mathbb{C}[t]/t^{k+1}, X)$$

Заметим, что $J^k\mathbb{C}$ это просто $\mathbb{C}^{k+1}$, его точки можно записать в виде $a_0t^{-1}+a_1t^{-2}+a_2t^{-3}+....$ Определим отображение $D'$ на $J^k\mathbb{C}$ по формуле

$$D'(t^k) = kt^{k-1}$$

Тогда имеется оператор $D$ на $\mathcal{O}(J^k\mathbb{C})$

$$Df(p) = f(D'p)$$

Более того

$$\mathcal{O}(J^k\mathbb{C}) = \mathbb{C}[x, Dx..., D^k x]$$

Теперь перейдём к бесконечным струям. Заметим, что имеется отображение $J^{k+1}X \to J^k X$.

**Определение.** *Пространством (бесконечных) струй* $JX$ *называется копредел этих отображений. Его можно записать как:*

$$JX = Hom(Spec\mathbb{C}[[t]], X)$$

$\mathbb{C}[[t]]$ играет роль инфинитезимальной окрестности.

**Пример 3.** *Пусть* $X = \mathbb{C}$. *Тогда* $J\mathbb{C} = \mathbb{C}[[t]] = t^{-1}\mathbb{C}[[t^{-1}]]$ *и* $\mathcal{O}(J\mathbb{C}) = \mathbb{C}[x, Dx, D^2x, ...]$.

**Предложение 8.** *Любому отображению* $f : X \to Y$ *соответствует отображение* $Jf : JX \to JY$. *Если* $f$ *было гладким и сюръективным, то* $Jf$ *сюръективно.*

## 2.3 Применение джетов

Применим $J$ к отображению, построенному ранее, получим

$$J\mathfrak{g}^{reg} \to JSpec(\mathbb{C}[P_1, ..., P_r]) = Spec(\mathbb{C}[D^kP_1, ..., D^kP_r]_{k\geq 0})$$

Заметим, что оператор $D$ здесь соответствует оператору $D$ определённому ранее.

Следовательно, отображение

$$J\mathfrak{g} \to Spec(\mathbb{C}[D^kP_1, ..., D^kP_r]_{k\geq 0})$$

также будет сюръективным, и соответствующее отображение на функциях будет вложением

$$\mathbb{C}[D^k P_1, ..., D^k P_r]_{k\geq 0} \hookrightarrow \mathcal{O}(J\mathfrak{g}) = \mathcal{O}(t^{-1}\mathfrak{g}[[t^{-1}]]) = \mathbb{C}(g^*[t])$$

Таким образом, элементы $D^k P_j$ алгебраически независимы, поэтому $D^k \Phi_j$ тоже, следовательно $A^{univ}$ порождается ими свободно.

**Теорема 3.** $A^{univ}$ *является максимальной коммутативной подалгеброй в* $S^\bullet(t^{-1}\mathfrak{g}[[t^{-1}]])$.

Идея доказательства - показать, что $A^{univ}$ является централизатором элемента Казимира $\Phi_1$. Из этого следует, что если какой-то элемент коммутирует со всей $A^{univ}$, то он коммутриует с $\Phi_1$, следовательно он лежит в универсальной подалгебре.

# 3 Интегрирование модели Годена

## 3.1 Определение $A_\chi(z_1, ..., z_n)$

Напомним, что у нас имелось отображение вложения:

$$S^\bullet(\mathfrak{g}) \to S^\bullet(t^{-1}\mathfrak{g}[[t^{-1}]])$$

$$x \mapsto x \otimes t^{-1} = x[-1]$$

Также у нас имелось отображение $\phi_{u,v}$, которое осуществляло соответствие между скобками:

$$\phi_{u,v} : x[n] \mapsto \frac{x[n]}{u + vt^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-v)^k}{u^{k+1}} x[n+k]$$

Мы работаем со случаем, когда $u \neq 0$, тогда можно положить $u = 1$ обозначить $z := -v/u = -v$. Наше отображение запишется как:

$$x[n] \mapsto \frac{x[n+1]}{z - t}$$

Возьмём композицию вложения и полученного отображения, обозначим её за $i_{-1}[z]$:

$$i_{-1}[z] : S^\bullet(\mathfrak{g}) \to S^\bullet(t^{-1}\mathfrak{g}[[t^{-1}]])$$

$$i_{-1}[z] : x \mapsto \frac{x}{z - t} = \sum_{k=1}^{\infty} z^{k-1} x \otimes t^{-k}$$

Коэффиценты по $z$ от $i_{-1}[z](\Phi_i)$ являются образующими алгебры $A^{univ}$.

Для того, чтобы получить интегралы модели Годена, нам необходимо применить функции $ev$ и $\chi$:

$$ev_{z_j} : x[n] \mapsto z_j^n x$$

$$\chi : x \mapsto (\chi, x), \chi \in \mathfrak{g}$$

и посмотреть на образ $A^{univ}$.

$$ev_{z_j}(i_{-1}[z](x)) = \frac{x}{z - z_j} = \sum_{k=1}^{\infty} z^{k-1} z_j^k x$$

Интегралы модели Годена получаются применением отображения $\psi = (id \otimes \chi) \circ ev_{z_1,...,z_n,\infty}$ к $A^{univ}$.

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{x^{(j)}}{z - z_j} + \chi(x) \in S^{\bullet}(\mathfrak{g})^{\otimes n}$$

$$x^{(j)} := 1 \otimes ... \otimes x \otimes ... \otimes 1$$

Это ровно тот элемент, который ранее у нас обозначался $\tilde{x}(z)$.

Тогда $\psi(\Phi_i) = \tilde{\Phi}_i(z)$ - элемент, получающийся из образующей центра $\Phi_i$ заменой всех $x$ на $\tilde{x}(z)$. Его коэффициенты по $z$ и будут являться интегралами модели Годена.

**Определение.** *Классической неоднородной алгеброй Годена $A_\chi(z_1, ..., z_n)$ называется подалгебра в $S^{\bullet}(\mathfrak{g})^{\otimes n}$, порождённая коэффициентами по $z$ от $\tilde{\Phi}_i(z)$.*

Напомним, что на $S^{\bullet}(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ есть скобка Костанта-Кириллова, которая на образующих выглядит так:

$$\{x^{(i)}, y^{(j)}\} = \delta_{i,j}[x, y]^{(i)}$$

**Предложение 9.** *$A_\chi(z_1, ..., z_n)$ является коммутативной алгеброй относительно этой скобки.*

*Proof.* Для образующих $x, y$:

$$\{\psi(x[n]), \psi(y[m])\} = \sum_i [x, y]^{(i)} z_i^{n+m} = \psi([x, y][n + m]) = \psi(\{x[n], y[m]\}_2)$$

То есть

$$\forall A, B \in S^{\bullet}(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]), \{\psi(A), \psi(B)\}_{\text{KK}} = \psi(\{A, B\}_2)$$

А $A^{univ}$ коммутативна относительно скобки $\{,\}_2$.

$\square$

## 3.2 Задание $A_\chi(z_1, ..., z_n)$ с помощью вычетов

Чтобы связать это определение с тем, что было ранее, нам надо переформулировать определение подалгебры Годена. Для этого необходимо рассмотреть $i_{-1}[z]$ как мероморфную функцию.

Пусть $f : \mathbb{C}P^1 \to V$ мероморфная функция со значениями в векторном пространстве $V$. Пусть $p$ - точка, в которой $f$ голоморфна. Рассмотрим ряд Тейора $f$ в точке $p$ и обозначим $W_p \subset V$ - пространство, порождённое всеми коэффициентами этого разложения.

Обозначим также $W \subset V$ - подпространство, порождённое всеми значениями $f$, $W_U \subset V$ - подпространство, порождённое всеми значениями $f$ в точках из $U$.

**Предложение 10.** *$W = W_p$ для любого $p$, в котором $f$ голоморфна.*

*Proof.* 1) Вложение $W_p \subset W$.

Докажем, что $W_p \subset W_U$ для любой окрестности $U$. $W_p$ порождается $f^{(k)}(p)$ - k-тыми производными в точке $p$. Заметим, что если $f(p) \in W_U$, то $f'(p) \in W_U$, так как

$$f'(p) = lim_{p \to p'} \frac{f(p') - f(p)}{p' - p}$$

и дробь лежит в $W_U$ для достаточно близкого $p'$. Поэтому $W_p \subset W_U$.

2) Вложение $W \subset W_p$.

Ряд Тейлора сходится в некоторой окрестности $U$ точки $p$ и все частичные суммы лежат в $W_p$, поэтому $f(p') \in W_p$ для любой $p' \in U$. То есть $W_U \subset W_p$ и из пункта 1) $W_U = W_p$, более того, $W_{p'} \subset W_p$.

Докажем, что $f(x) \in W_p$. Соединим $p$ и $x$ путём, тогда существует такой выбор точек на этом пути $p_1 = p, ..., p_n = x$, что $p_{i+1} \in U_i$. Следовательно,

$$W_x \subset W_{p-1} \subset ... \subset W_{p_2} \subset W_p$$

значит $f(x) \in W_p$. □

**Предложение 11.** *Предположим $f$ голоморфна на бесконечности. Пусть $z_i$ - полюс порядка $k$, и $W_{z_i}$ - подпространство, порождённое главными частями ряда Лорана в $z_i$. Тогда $\langle W_{z_i}, f(\infty)\rangle = W$.*

*Proof.* Докажем, что $\langle W_{z_i}, f(\infty)\rangle \subset W$. Заметим, что любой интеграл от $f$ по замкнутой кривой лежит в $W$, так как интеграл это предел сумм $\sum u_i f(u_i)\Delta(u_i)$, и каждое слагаемое лежит в $W$. Далее, коэффициент при $(z - z_i)^{-k}$ это интеграл вокруг точки $z_i$ от функции $(z - z_i)^{k-1} f(z)$.

Заметим, что $W$ для $f(z)$ и $zf(z)$ совпадают (так как множество коэффициентов ряда Тейлора в нуле у них одно и то же). Поэтому $W$ для $(z-z_i)^{k-1}$ и $f(z)$ тоже совпадают. Таким образом, $\langle W_{z_i}, f(\infty)\rangle \subset W$.

В другую сторону. $f$ можно представить как частное двух рациональных функций $\frac{g(z)}{h(z)}$. Её можно представить в виде суммы простых дробей $\sum \frac{g_i}{(z-z_i)^k} + f(\infty)$. $g_i$ и $f(\infty)$ по определению лежат в $\langle W_{z_i}, f(\infty)\rangle$, значит, $W \subset \langle W_{z_i}, f(\infty)\rangle$. □

Применим эти рассуждения к нашему случаю, когда $f = i_{-1}[z](\Phi_k)$, $W = A_\chi(z_1, ..., z_n)$. Вспомним, что на одном из прошлых занятий определялись гамильтонианы Годена:

$$\tilde{H}_i = \sum_{j\neq i}^{n} \frac{\sum_\alpha x_\alpha^{(i)} (x^\alpha)^{(j)}}{z_i - z_j} - \sum_\alpha x_\alpha^{(i)} \chi(x^\alpha) = \sum_{j\neq i}^{n} \frac{\sum_\alpha x_\alpha^{(i)} (x^\alpha)^{(j)}}{z_i - z_j} - \chi^{(i)}$$

$$\tilde{H}_i = -\frac{1}{2} Res_{z_i} \tilde{\Phi}_1(z)$$

Они равны коэффициенту при $(z-z_i)^{-1}$, значит лежат в $A_\chi(z_1, ..., z_n)$.

**Пример 4.** *Рассмотрим пример $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$. В этом случае, у нас имеется только одна функция, $A_\chi(z_1, ..., z_n)$ порождена $\tilde{\Phi}_1(z)$. Мероморфная функция определяется своими главными частями Лорана в полюсах и значением в $\infty$.*

*Коэффициенты при $-1$ степени равны $\tilde{H}_i$, при $-2$ равны $\Phi^{(i)}$, значение в $\infty$ равно числу, следовательно $A = \langle \tilde{H}_1, ..., \tilde{H}_n, \Phi^{(i)}\rangle$.*

## 3.3 Пример $n = 1$

Пусть $n = 1$. Обозначим $\Phi_k = \sum x_1 ... x_k$, тогда

$$\tilde{\Phi_k} = \sum \tilde{x}_1(z) ... \tilde{x}_k(z) = \sum (\frac{x_1}{z - z_1} + \chi(x_1)) ... (\frac{x_k}{z-z_1} + \chi(x_k)) =$$

Сделав замену $z \mapsto z + z_1$, получаем:

$$\tilde{\Phi_k}' = \sum \tilde{x}_1(z+z_1) ... \tilde{x}_k(z+z_1) = \sum (\frac{x_1}{z} + \chi(x_1)) ... (\frac{x_k}{z} + \chi(x_k)) =$$

Умножим на $z^k$:

$$z^k \tilde{\Phi_k}' = \sum (x_1 + z\chi(x_1)) ... (x_k + z\chi(x_k)) =$$

Коэффициенты по $z$ данного выражения порождают $A_\chi$.

Всмпомним, что в предыдущем докладе $A_\chi$ порождалась элементами

$$H_i^{(j)} = \frac{1}{j!}(\frac{d}{dz})^j(\sum(x_1 + z\chi(x_1))...(x_k + z\chi(x_k)))$$

Это выражение является линейной комбинацией коэффициентов по $z$ в $(x_1 + z\chi(x_1))...(x_k + z\chi(x_k))$. Таким образом, элементы $H_i^{(j)}$ порождают $A_\chi$. То есть подалгебра Годена для $n = 1$ совпадает с алгеброй Мищенко-Фоменко.

# 4 Производящая функция

Мы сказали, что $i_{-1}[z](\Phi_i)$ являются набором производящих функций для образующих $A^{univ}$. Теперь мы хотим написать одну производящую функцию сразу для всех генераторов. Мы будем работать в типе $A$ ($\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$).

Обозначим $E_{ij} \in \mathfrak{g}^*$ - элемент, двойственный матричной единице. $E = (E_{ji})_{ij} \in Mat_{n\times n}(S^\bullet(\mathfrak{g}^*))$ - матрица, составленная из базисных элементов.

Рассотрим определитель $det(E - s * id) \in S^\bullet(\mathfrak{g}^*)[s]$. Его коэффициент при $s^k$ это $E_k(\lambda_1, ..., \lambda_m)$ - функция, которая переводит матрицу в $k$-тый элементарный симметрический многочлен от её собственных значений. Она инвариантна относительно действия $\mathfrak{g}$, поэтому $det(E-s) \in S^\bullet(\mathfrak{g}^*)^\mathfrak{g}[s]$.

Таким образом, $det(E-s)$ это производящая функция для образующих $S^\bullet(\mathfrak{g}^*)^\mathfrak{g}$. Заметим, что её коэффициенты не будут равны стандартным образующим $P_k = Tr(E^k)$, которые равны $p_k(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Однако, алгебры, порождённые ими, совпадают.

**Пример 5.** *Пусть* $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_2$. *Тогда*

$$det(E-s) = (E_{11}-s)(E_{22}-s)-E_{12}E_{21} = s^2-s(E_{11}+E_{22})+E_{11}E_{22}-E_{12}E_{21}$$

$$det(E - s) = s^2 - sTr(E) + det(E)$$

*Таким образом,* $Tr(E)$ *и* $det(E)$ *порождают* $S^\bullet(\mathfrak{gl}_2^*)^{\mathfrak{gl}_2}$ *С другой стороны, имеются образующие* $P_i$*:*

$$P_1 = E_{11} + E_{22}$$

$$P_2 = E_{11}^2 + E_{22}^2 + 2E_{12}E_{21}$$

$Tr(E)$ *и* $det(E)$ *выражаются через* $P_i$ *следующим образом:*

$$Tr(E) = P_1$$

$$det(E) = \frac{1}{2}P_1^2 - P_2$$

*И наоборот,*

$$P_1 = Tr(E)$$

$$P_2 = Tr(E)^2 - 2det(E)$$

Более того, мы получаем, что $i_{-1}[z](det(E - s))$ это производящая функция для образующих $A^{univ}$, то есть её коэффициенты по $z^k s^l$ порождают эту алгебру.

Заметим, что $i_{-1}[z]$ и $ev$ коммутируют со взятием $det(E - s)$, так как они являются гомоморфизмами алгебр. Таким образом, получаем, что

$$\psi(i_{-1}[z](det(E - s))) = det(\psi(i_{-1}[z](E)) - s)$$

$$(\psi(i_{-1}[z](E)))_{ij} = \psi(i_{-1}[z](E))(E_{ji}) = \frac{E_{ji}}{z - z_j} - \chi(E_{ji})$$

Обозначим $L(z) = \sum \frac{E^{(i)}}{z - z_i}$, тогда

$$\psi(i_{-1}[z](E)) = L(z) + \chi(E)$$

$$(\chi(E))_{ij} = \chi(E_{ji}) = Tr(\chi * E_{ji}) = \chi_{ij}$$

Таким образом,

$$\psi(i_{-1}[z](det(E - s))) = det(L(z) + \chi - s)$$

является производящей функцией для образующих классической неоднородной алгеброй Годена, где $\chi$ рассматривается как матрица.

# 5 Степень трансцедентности

Для начала поймём, какая может быть наибольшая степень трансцедентности для Пуассоново коммутативной подалгебры в $S^\bullet(\mathfrak{g})^{\otimes n}$.

Размерность регулярной орбиты в $\mathfrak{g}$ равна $dim(\mathfrak{g}) - rk(\mathfrak{g})$, поэтому $dim(\mathbb{O}_1 \otimes ... \otimes \mathbb{O}_n) = n(dim(\mathfrak{g}) - rk(\mathfrak{g}))$. Плюс у нас есть $nrk(\mathfrak{g})$ Казимиров, которые действуют константами. Таким образом, максимальная степень трансцедентности может быть равна

$$\frac{n}{2}(dim(\mathfrak{g}) + rk(\mathfrak{g}))$$

**Теорема 4.** *Если $\chi$ регулярный, то степень трансцедентности алгебры $A_\chi(z_1, ..., z_n)$ равна $\frac{n}{2}(dim(g) + rk(g))$.*

Мы приведём план доказательства и пример $\mathfrak{sl}_2$. У нас имеется отображение

$$\Delta : S^\bullet(\mathfrak{g}) \to S^\bullet(\mathfrak{g})^{\otimes n}$$

$$\Delta(x) = \sum_i 1 \otimes ... \otimes x \otimes ... \otimes 1 = \sum_i x^{(i)}$$

Рассмотрим присоединённо градуированную алгебру $gr(A_\chi(z_1, ..., z_n))$ относительно стандартной градуировки.

**Лемма 1.** $Trdeg(A(z_1, ..., z_n)) = Trdeg(gr(A_\chi(z_1, ..., z_n)))$

**Лемма 2.** $\Delta(A_\chi)A_0(z_1, ..., z_n) \subset gr(A_\chi(z_1, ..., z_n))$

**Лемма 3.** $\Delta(A_\chi)A_0(z_1, ..., z_n) = \Delta(A_\chi) \otimes_{\Delta(S^\bullet(\mathfrak{g})^\mathfrak{g})} A_0(z_1, ..., z_n)$

**Пример.** *Например, в случае* $\mathfrak{sl}_2$, $A_\chi(z_1, ..., z_n) = \langle \Phi^{(i)}, \tilde{H}_i \rangle$. *Когда переходим к присоединённо градуированной,* $\Phi^{(i)}$ *остаются такими же,* $\tilde{H}_i$ *становятся* $H_i$. *Также имеется сумма всех Гамильтонианов* $\tilde{H}_i$, *которая равна* $\Delta(\chi)$. *Таким образом*

$$gr(A_\chi(z_1, ..., z_n)) = \langle \Phi^{(i)}, H_i, \Delta(\chi) \rangle$$

$\Delta(A_\chi)$ *порождается* $\Delta(\Phi)$ *и* $\Delta(\chi)$, $\Delta(S^\bullet(\mathfrak{g})^\mathfrak{g})$ *порождается* $\Delta(\Phi)$, $A_0(z_1, ..., z_n)$ *порождается* $\Phi^{(i)}$ *и* $H_i$, *то есть получаем*

$$\langle \Delta(\Phi), \Delta(\chi) \rangle \otimes_{\langle \Delta(\Phi) \rangle} \langle \Phi^{(i)}, H_i \rangle = \langle \Phi^{(i)}, H_i, \Delta(\chi) \rangle$$

Таким образом, нужно найти степень трансцедентности $A_0(z_1, ..., z_n) = A(z_1, ..., z_n)$.

Можно рассмотреть градуировку по последней компоненте: $deg(x_1 \otimes ... \otimes x_n) = deg(x_n)$ (степень в $S^\bullet(\mathfrak{g})$). Перейдём ещё раз к присоединённой градуированной, относительно новой градуировки $gr_n(gr(A(z_1, ..., z_n))) = \overline{A(z_1, ..., z_n)}$.

Рассмотрим $A(0, \infty)^{(i,n)}$ - вложение $A(0, \infty) = ev_{0,\infty}(A^{univ})$ в $(i, n)$-тую компоненту.

**Лемма 4.** $\prod_{i=1}^{n-1} A(0, \infty)^{(i,n)} \subset \overline{A(z_1, ..., z_n)}$

**Пример.** *Для* $\mathfrak{sl}_2$, *Казимиры, опять же, не меняются при переходе к* $gr$, *а вместо гамильтонианов получается*

$$\frac{h^{(i)}h^{(n)} + 2e^{(i)}f^{(n)} + 2f^{(i)}e^{(n)}}{z_i - z_n}$$

*А* $A(0, \infty)^{(i,n)}$ *порождается Казимирами и элементом* $h^{(i)}h^{(n)} + 2e^{(i)}f^{(n)} + 2f^{(i)}e^{(n)}$

$$(\frac{h^{(i)}}{z} + h^{(n)})^2 + 4(\frac{e^{(i)}}{z} + e^{(n)})(\frac{f^{(i)}}{z} + f^{(n)}) = \frac{\Phi^{(i)}}{z^2} + 2\frac{h^{(i)}h^{(n)} + 2e^{(i)}f^{(n)} + 2f^{(i)}e^{(n)}}{z} + \Phi^{(n)}$$

Рассмотрим срез Костанта $\mathfrak{g}_{can} := e + Z_{\mathfrak{g}}(f) \subset \mathfrak{g}$ и зафиксируем регулярный полупростой элемент $\chi \in \mathfrak{g}_{can}$. Имеется отображение ограничения:

$$S^\bullet(\mathfrak{g})^{\otimes n} = \mathcal{O}(\mathfrak{g}^{\oplus n}) \to \mathcal{O}(\mathfrak{g}^{\oplus n-1} \times \{\chi\}) = S^\bullet(\mathfrak{g})^{\otimes n-1}$$

**Лемма 5.** *Образ* $\prod_{i=1}^{n-1} A(0,\infty)^{(i,n)}$ *при этом отображении равен* $\prod_{i=1}^{n-1} A_\chi^{(i)}$.

*Proof.* Действительно $A_\chi$ по определению равно образу $A(0,\infty)$ при ограничении с $\mathcal{O}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$ на $\mathcal{O}(\mathfrak{g} \times \{\chi\})$. □

**Пример.** *Для* $\mathfrak{sl}_2$ *срез Костанта это элементы* $e+\alpha f$. *При отображении ограничения:*

$$\Phi^{(i)} \mapsto \Phi^{(i)}$$

$$\Phi^{(n)} \mapsto (\chi, \Phi)$$

$$h^{(i)}h^{(n)} + 2e^{(i)}f^{(n)} + 2f^{(i)}e^{(n)} \mapsto \chi^{(i)}$$

Вложение

$$\prod_{i=1}^{n-1} A(0,\infty)^{(i,n)} \hookrightarrow S^\bullet(\mathfrak{g})^{\otimes n}$$

индуцирует отображение

$$\mathfrak{g}^{\times n} \to Spec \prod_{i=1}^{n-1} A(0,\infty)^{(i,n)}$$

Вспомним, что мы доказывали, что $A_\chi = \mathcal{O}(e + B^-)$ - функции на сдвинутом Бореле. Рассмотрим

$$(e + B^-)^{\times(n-1)} \times \mathfrak{g}_{can} \subset \mathfrak{g}^{\times n}$$

Имеется коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} Spec \prod_{i=1}^{n-1} A(0,\infty)^{(i,n)} & \longleftarrow & (e + B^-)^{\times(n-1)} \times \mathfrak{g}_{can} \\ \uparrow & & \uparrow \\ Spec \prod_{i=1}^{n-1} A_\chi^{(i)} & \longleftarrow & (e + B^-)^{\times(n-1)} \times \{\chi\} \end{array}$$

Ограничим верхнее отображение с $\mathfrak{g}_{can}$ на $\mathfrak{g}_{can}^{ss}$ - полупростые элементы среза (плотное открытое множество).

**Лемма 6.** *Отображение*

$$(e+B^-)^{\times(n-1)} \times \mathfrak{g}^{ss}_{can} \to Spec \prod_{i=1}^{n-1} A(0,\infty)^{(i,n)}$$

*является вложением.*

*Proof.* Пусть $(x_1, ..., x_{n-1}, \chi)$ и $(y_1, ..., y_{n-1}, \chi')$ переходят в один элемент. На спектре есть функции $\Phi_i^{(n)}$, при действии на образ $(x_1, ..., x_{n-1}, \chi)$ они дают $(\chi, \Phi_i^{(n)})$. Эти числа равны для всех $i$, следовательно $\chi = \chi'$.

Но тогда эти элементы лежат в $(e+B^-)^{\times(n-1)} \times \{\chi\} \simeq Spec \prod_{i=1}^{n-1} A_\chi^{(i)}$, значит их образы не могут совпадать, так как левое отображение на диаграмме это вложение, чтд. □

**Следствие 4.**

$$Trdeg(\prod_{i=1}^{n-1} A(0,\infty)^{(i,n)}) \geq dim((e+B^-)^{\times(n-1)} \times \mathfrak{g}^{ss}_{can}) = \frac{n-1}{2} dim(\mathfrak{g}) + \frac{n+1}{2} rk(\mathfrak{g})$$

Осталось сложить все степени:

$$Trdeg(\prod_{i=1}^{n-1} A(0,\infty)^{(i,n)}) + Trdeg(A_\chi) - Trdeg(S^\bullet(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}})$$

$$\frac{n-1}{2} dim(\mathfrak{g}) + \frac{n+1}{2} rk(\mathfrak{g}) + \frac{1}{2}(dim(\mathfrak{g}) + rk(\mathfrak{g})) - rk(\mathfrak{g})$$

**Следствие 5.** $Trdeg(A_\chi(z_1, ..., z_n)) = \frac{n}{2}(dim(\mathfrak{g}) + rk(\mathfrak{g}))$