Напоминание:

$\forall h\in\mathfrak{h}$ мы фиксировали разложение

$$\mathfrak{g}=\underset{\underset{\alpha(h)<0}{\bigoplus}\mathfrak{g}_\alpha}{\underset{\shortparallel}{\mathfrak{g}_-}}\oplus\overset{\mathfrak{h}\oplus\underset{\alpha(h)=0}{\bigoplus}\mathfrak{g}_\alpha}{\overset{\shortparallel}{\mathfrak{g}_0}}\oplus\underset{\underset{\alpha(h)>0}{\bigoplus}\mathfrak{g}_\alpha}{\underset{\shortparallel}{\mathfrak{g}_+}}\ \xrightarrow[\exp]{}\ G_-G_0G_+\subseteq G.$$

Мы фиксировали клетку в пространстве флагов. $G_+\cong G_-G_0\backslash(G_-G_0G_+)\subseteq G_-G_0\backslash G$

И из правого действия $G_-G_0\backslash G\circlearrowleft G$ получаем представление

$\mathfrak{g}\circlearrowright \mathrm{Fun}(G_+)$

Далее рассмотрим $\lambda: G_0\longrightarrow\mathbb{C}^*$ - характер.

Определение. $W_\lambda=\{f\in\mathrm{Fun}(G_-G_0G_+)\mid f(g_-g_0g_+)=\lambda(g_0)f(g_+)\}$.

Тогда $\mathfrak{g}\circlearrowright W_\lambda$ $\quad\left(\underset{\mathfrak{g}}{\underset{\wedge}{x}}\longmapsto\underset{\mathrm{Vect}(G)}{\underset{\wedge}{\xi_x}}\longmapsto\xi_x\big|_{G_-G_0G_+}\circlearrowright W_\lambda\right)$

Модуль W_λ наз. конечным модулем Вакимото.

Подробнее:

$$x(f)(g_+)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(f\big((g_+\exp(tx))_0(g_+\exp(tx))_+\big)\Big)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(\lambda\big((g_+\exp(tx))_0\big)\Big)f(g_+)+$$

$$+\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(f\big((g_+\exp(tx))_+\big)\Big)=d\lambda\circ(Ad_{g_+}(x))_0\cdot f(g_+)+\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(f\big((g_+\exp(tx))_+\big)\Big)$$

Замечание. Действие $\mathfrak{g}$ зависит от $d\lambda:\mathfrak{g}_0\longrightarrow\mathbb{C}$ линейно.
Коммут. соотношения $\mathfrak{g}$ в представлении зависят от $\{(d\lambda)_i\}$ полиномиально => продолжат выполняться после замены $\{(d\lambda)_i\}$ на произвольный характер $\mathfrak{g}_0$.

Пример: $G=SL_n(\mathbb{C})$, $h=diag(\xi_1>\xi_2>\dots>\xi_n)$.

$$g=\begin{pmatrix}1&&0\\&\ddots&\\x_{ij}&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1&&0\\&\ddots&\\0&&y_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&z_{ij}\\&\ddots&\\0&&1\end{pmatrix};\quad\lambda(g_0)=\prod_{j=1}^n y_j^{\lambda_j}$$

Найдём действие на W_λ:

- e_i: $\begin{pmatrix}1&&z_{ij}\\&\ddots&\\0&&1\end{pmatrix}\exp(t\overset{\overset{e_i}{\shortparallel}}{E_{i\,i+1}})=\begin{pmatrix}1&&z_{ij}\\&\ddots&\\0&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\overset{i+1}{}&\\&\ddots&t&\\0&&\ddots&1\end{pmatrix}_i=\begin{pmatrix}1&&z_{i-1,i+1}+tz_{i-1,i}&\\&\ddots&z_{i\,i+1}+t&\\0&&\ddots&1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\quad e_i\longmapsto\frac{\partial}{\partial z_{i\,i+1}}+\sum_{j<i}z_{ji}\frac{\partial}{\partial z_{j\,i+1}}$$

- h_i: $\begin{pmatrix}1&&z_{ij}\\&\ddots&\\0&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&0\\&e^t&&\\&&e^{-t}&\\0&&&1\end{pmatrix}=\underset{(g_+e^{th})_0}{\begin{pmatrix}1&&&0\\&e^t&&\\&&e^{-t}&\\0&&&1\end{pmatrix}}\ \underset{(g_+e^{th})_+}{\left(\begin{array}{cc|l}\overset{i}{\times e^t}&\overset{i+1}{\times e^{-t}}&\\1&z_{ij}&\times e^{-t}\quad i\\0&1&\times e^{t}\quad i+1\end{array}\right)}$

$$\Rightarrow\text{I)}\quad\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\lambda\left(\begin{pmatrix}1&&&0\\&e^t&&\\&&e^{-t}&\\0&&&1\end{pmatrix}\right)\right)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(e^{\lambda_it-\lambda_{i+1}t}\right)=\lambda_i-\lambda_{i+1}.$$

$$\text{II)}\quad\frac{d}{dt}\Big(f\big((g_+e^{th})_+\big)\Big)=\sum_{j<i}z_{ji}\frac{\partial}{\partial z_{ji}}-\sum_{j>i}z_{ij}\frac{\partial}{\partial z_{ij}}-\left(-\,{}^{\shortparallel}{}_{i\to i+1}\right).$$

Итого: $h_i(f)=(\lambda_i-\lambda_{i+1})f+$

$$+\left(\sum_{j<i}z_{ji}\frac{\partial}{\partial z_{ji}}-\sum_{j>i}z_{ij}\frac{\partial}{\partial z_{ij}}-\sum_{j<i+1}z_{j\,i+1}\frac{\partial}{\partial z_{j\,i+1}}+\sum_{j>i+1}z_{i+1j}\frac{\partial}{\partial z_{i+1,j}}\right)f$$

- f_i: $\begin{pmatrix}1&&z_{ij}\\&\ddots&\\0&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\overset{i}{}&&\\&\ddots&&\\&t&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}_{i+1}=\begin{pmatrix}1&\overset{i}{z_{1i}+tz_{1i+1}}&&\\&1&&\\&1+tz_{ii+1}&&\\0&t&1&\\&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&&0\\&1+tz_{ii+1}&&\\0&&1&\\&&&1\end{pmatrix}.$

- $\begin{pmatrix}1&z_{ji}+tz_{ji+1}&&\\&1&\frac{z_{ii+1}}{1+t\dots}&\frac{z_{ij}}{1+z_{ii+1}t}\\0&t&1&\\0&&&1\end{pmatrix}\approx g_-\begin{pmatrix}1&&0\\&1+tz_{ii+1}&\\0&&1-tz_{ii+1}\end{pmatrix}\underset{g_0}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix}1&z_{ji}+tz_{ji+1}&&\\&1&\frac{z_{ij}}{1+tz_{ii+1}}&\\0&&1&\frac{z_{i+1j}}{1-tz_{ii+1}}-tz_{ij}\\&&&1\end{pmatrix}}}$

$$\text{I)}\quad\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\left(1+tz_{ii+1}\right)^{\lambda_i}\left(1-tz_{ii+1}\right)^{\lambda_{i+1}}\right)=\left(\lambda_i-\lambda_{i+1}\right)z_{ii+1}$$

$$\text{II)}\quad\sum_{j<i}z_{ji+1}\frac{\partial}{\partial z_{ji}}-\sum_{j>i}z_{ii+1}z_{ij}\frac{\partial}{\partial z_{ij}}+\sum_{j\geq i+1}\left(z_{ii+1}z_{i+1j}-z_{ij}\right)\frac{\partial}{\partial z_{i+1j}}$$

$$f_i(f)(g_+)=\left(\lambda_i-\lambda_{i+1}\right)z_{ii+1}f(g_+)+$$

$$+\left(\sum_{j<i}z_{ji+1}\frac{\partial}{\partial z_{ji}}-\sum_{j>i}z_{ii+1}z_{ij}\frac{\partial}{\partial z_{ij}}+\sum_{j\geq i+1}\left(z_{ii+1}z_{i+1j}-z_{ij}\right)\frac{\partial}{\partial z_{i+1j}}\right)(f)(g_+).$$

Структура конечного модуля Вакимото при $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$.

Определение. Пусть V − представление $\mathfrak{g}$, в котором $\mathfrak{h}$ действует полупросто. Кроме того $\dim(V[\mu]) < \infty$ $\forall$ веса $\mu \in \mathfrak{h}^*$. Тогда

$$V^+ = \bigoplus_{\mu} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{весовое подпространство}}}{V[\mu]}^* \quad \text{с действием} \quad x(\varkappa) = \tau(x)^*(\varkappa) \ \forall x \in \mathfrak{g},\ \varkappa \in M_\lambda^+$$

где $\tau: e_\alpha \longmapsto e_{-\alpha}$, $h_\alpha \longmapsto h_\alpha$

Называется контраградиентно двойственным (КД) модулем.

Замечание. В частности КД модули определены для конечного модуля Вакимото W_λ и модуля Верма M_λ.

Теорема. Для общего h ($\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$): $W_\lambda \cong M_\lambda^+$

Доказательство.

Замечание. 1 − старший вектор в W_λ с весом λ.

Лемма. $\forall v \in W_\lambda$ $\exists$ полином $P(\{e_\alpha\}_{\alpha>0})$: $Pv = 1$

Доказательство.

Выберем координаты на G_+:

$$\{z_\alpha\}_{\alpha>0} \longmapsto \exp\Big(\sum_\alpha z_\alpha e_\alpha\Big)$$

Замечание. Координаты z_α − однородные в том смысле, что:

$$\forall h \in \mathfrak{h} \qquad h \longmapsto \lambda(h) - \sum_{\alpha>0} \alpha(h) z_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha}$$

Действительно: $\exp\big(\sum_\alpha z_\alpha e_\alpha\big) e^{th} = \underset{\substack{\uparrow \\ g_0}}{e^{th}} \underset{\substack{\uparrow \\ G_+}}{\exp}\Big(\sum_\alpha z_\alpha \underbrace{\mathrm{Ad}_{e^{-th}}(e_\alpha)}_{}\Big)$, $\mathrm{Ad}_{e^{-th}}(e_\alpha) = e^{-t\alpha(h)} e_\alpha$

=> I) $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \big(\lambda(e^{th})\big) = \lambda(h)$

II) Векторное поле − Эйлерово: $-\sum_\alpha z_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha}$

Тогда в этих координатах: $e_\alpha \longmapsto \frac{\partial}{\partial z_\alpha} + \sum_{\beta>\alpha} P_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial z_\beta}$

Замечание. $\{z_{ij}\}$ − однородные координаты в случае $\mathfrak{sl}_n$, хотя и не экспоненциальные. Для них также

$$e_i \longmapsto \frac{\partial}{\partial z_{i\,i+1}} + \sum_{j<i} z_{ji} \frac{\partial}{\partial z_{j\,i+1}}$$

Тогда $\forall v$: $e_\alpha(v) = 0 \iff v = \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{C}}}{c} \cdot 1 \Rightarrow \forall v$: $v \neq c \cdot 1$ можно построить $w = e_\alpha(v) \neq 0$ большего веса.

Индукция по весу => ▨

ρ $0 \neq w^\lambda \in W_\lambda^+[\lambda]$ − старший вектор веса λ. ($w^\lambda(1) \neq 0$)

=> $\exists\ \varphi^*: M_\lambda \longrightarrow W_\lambda^+ \rightsquigarrow$ строим $\varphi: W_\lambda \longrightarrow M_\lambda^+$

Утв. $\langle \varphi(w), e_{-\alpha_1} \dots e_{-\alpha_k}(v_\lambda) \rangle = \langle e_{\alpha_k} \dots e_{\alpha_1}(w), w^\lambda \rangle$

Предложение. φ − инъекция.

Доказательство. ρ $v \in W_\lambda$, P: $P(v) = 1$

Тогда $\langle \varphi(P(v)), v_\lambda \rangle = \langle \varphi(1), v_\lambda \rangle = \langle 1, \varphi^*(v_\lambda) \rangle \neq 0$

$\parallel$

$\langle P(\varphi(v)), v_\lambda \rangle = \langle \varphi(v), \tau(P)(v_\lambda) \rangle$

=> $\varphi(v) \neq 0$ ▨

Предложение. φ - сюръекция.

Доказательство.

$\chi_{M_\lambda^+} = \chi_{M_\lambda}$

χ_{W_λ}: Вес монома $z_{\alpha_1} \dots z_{\alpha_k}$: $\lambda(h) - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(h)$ − такой же как у $e_{-\alpha_k} \dots e_{-\alpha_1} |\lambda\rangle$ в M_λ =>

=> $\chi_{W_\lambda} = \chi_{M_\lambda^+}$ ▨

Пример: $G = SL_n(\mathbb{C})$, $h = \mathrm{diag}(h_1, \dots, h_1, -(n-1)h_1)$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ x_1 \cdots & x_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{n-1}{y} & \overset{1}{0} \\ & \vdots \\ 0 \cdots 0 & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & z_1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & z_{n-1} \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda(g_0) = \det(y)^{\lambda_1} \det(g_0)^{\lambda}$$

- E_{ij}: $i \neq j,\ i, j < n$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vec{z} \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \exp(tE_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vec{z} \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} + tE_{ij} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{Id} + tE_{ij} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{(g_+ e^{tE_{ij}})_0} \cdot$

- $\underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 & & \vec{z} \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} - tE_{in} z_j\right)}_{(g_+ e^{tE_{ij}})_+}$

$$\Rightarrow E_{ij} \longmapsto -z_j \frac{\partial}{\partial z_i}$$

- E_{in}: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \vec{z} \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ & & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{z} \longmapsto \vec{z} + \vec{e}_i t \Rightarrow E_{in} \longmapsto \frac{\partial}{\partial z_i}$

- h_i: $i < n-1$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & & \vec{z} \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & e^{t} & & \\ & & e^{-t} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & e^{t} & & \\ & & e^{-t} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^{-t} z_i \\ & \ddots & e^{t} z_{i+1} \\ 0 & & \vdots \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow h_i \longmapsto -z_i \frac{\partial}{\partial z_i} + z_{i+1} \frac{\partial}{\partial z_{i+1}}$$

- E_{ni}: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \vec{z} \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ 0 \, t \, 0 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & tz_1 & 0 & \\ 0 & 1+tz_i & & \vec{z} \\ 0 & t & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ 0 \, t \, 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & tz_1 & 0 & \vec{z} \\ & & tz_2 & & \\ 0 & & 1+tz_i & & \\ & & O(t^2) & & 1-tz_i \end{pmatrix} \approx$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ 0 \, t \, 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & tz_1 & & 0 \\ & tz_{i-1} & & \\ 0 & 1+tz_i & & \\ & tz_{n-1} & & \\ & 0 & & 1-tz_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vec{z}(t) \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{z}(t) = \vec{z} - tz_i \vec{z}$$

$\Rightarrow$ I) $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left((1+tz_i)^{\lambda_1} \right) = \lambda_1 z_i$

II) $-z_i \sum_{j=1}^{n-1} z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$

- $E_{ni} \longmapsto \lambda_1 z_i - z_i \sum_{j=1}^{n-1} z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$

h_{n-1}: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \vec{z} \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & e^{t} & \\ & & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & e^{t} & \\ 0 & & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & e^{-t} z_1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & e^{-t} z_{n-2} \\ 0 & 1 & e^{-2t} z_{n-1} \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ I) λ_1

II) $-\sum_{i=1}^{n-1} z_i \frac{\partial}{\partial z_i} - z_{n-1} \frac{\partial}{\partial z_{n-1}}$.

- $h_{n-1} \longmapsto \lambda_1 - \sum_{i=1}^{n-1} z_i \frac{\partial}{\partial z_i} - z_{n-1} \frac{\partial}{\partial z_{n-1}}$.

Замечание. Старший вес этого представления $\lambda_1 \omega_{n-1} = (\lambda_1, \dots, \lambda_1, 0)$

Замечание. Пусть $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ $\forall$ характера $\lambda : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{C}$ мы построили гомоморфизм $\rho_\lambda : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{D}_{\leq 1}(G_+)$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{\rho}_\lambda : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{D}(G_+)$$

Переходя к λ как к формальному параметру, мы получим:

$$\begin{tikzcd} \tilde{\rho} : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \arrow[r] \arrow[d, squiggly, "gr"] & \mathcal{D}(G_+)\otimes\mathbb{C}[\mathfrak{h}] \arrow[d, squiggly, "gr"] \\ \tilde{\rho}_c : S(\mathfrak{g}) \arrow[r] & \mathrm{Fun}(T^*G_+)\otimes\mathbb{C}[\mathfrak{h}]. \end{tikzcd}$$

Существует
„классическая"
версия $\tilde{\rho}$!

Где для $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ фильтрация – PBW.
Для $\mathcal{D}(G_+)$ $\deg(\underset{\uparrow}{\frac{\partial}{\partial z_\alpha}}) = \deg(h_i) = 1$; $\deg(z_\alpha) = 0$.

Гамильтонова редукция и модули Вакимото.

Пример: Для sl_2:

$$\rho : \begin{aligned} h &\longmapsto \lambda - 2z\partial_z \\ e &\longmapsto \partial_z \\ f &\longmapsto \lambda z - z^2\partial_z \end{aligned}$$

Рассмотрим

$$\begin{pmatrix} 1 & -z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2} - pz & z\lambda \\ p & -\frac{\lambda}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{\overset{\frac{h}{2}}{\uparrow}}{\frac{\lambda}{2} - pz} & \overset{\overset{f}{\uparrow}}{\lambda z - pz^2} \\ \underset{\underset{e}{\downarrow}}{p} & -\frac{\lambda}{2} + pz \end{pmatrix}$$

Конструкция:

$T^*G_+ \underset{i}{\hookrightarrow} T^*G /\!\!/_{\lambda} G_0G_- \circlearrowleft G \rightsquigarrow \mu_R$ ограничевается на T^*G_+.

где $i : (g_+, \beta_-) \longrightarrow [(g_+, \beta_- + \lambda)]$

Обозначим ограничение $\mu_{R,\lambda} : T^*G_+ \longrightarrow \mathfrak{g}^*$.

$(g_+, \beta_-) \longleftrightarrow (R_{g_+}(\beta_-))^* \in T^*_{g_+}G_+$; $\beta_- \in \mathfrak{g}_- \cong (\mathfrak{g}_+)^*$

Замечание. Тогда $\tilde{\rho}_{c,\lambda} = (\mu_{R,\lambda})^*$

Предложение. $\mu_{R,\lambda}(g_+, \beta_-) = g_+^{-1}(\lambda - \beta_-)g_+$

Рассмотрим T^*G с координатами (g, p), где $g \in G$, $p \in T^*_eG$,

$(g, p) \longleftrightarrow R_{g^{-1}}^*(p) \in T^*_gG$

Тогда можно записать: $\omega = -d(\langle p, dg\,g^{-1}\rangle)$

На T^*G есть левое и правое действия:

$$(g, p) \xmapsto{h} (hg, \mathrm{Ad}^*_{h^{-1}}(p))$$

$$(g, p) \xmapsto{h} (gh^{-1}, p)$$

Они сохраняют 1-форму $-\langle p, dg\,g^{-1}\rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Можно построить отображения момента:

$$\begin{aligned} \mu_L(g,p) &= -p \\ \mu_R(g,p) &= \mathrm{Ad}^*_g(p) \end{aligned} \qquad (\Rightarrow \mu_R = -\mathrm{Ad}_g(\mu_L))$$

Рассмотрим теперь редукцию по левому действию подгруппы G_-G_0.

Фиксируем момент: $\mu = \pi_{-0}\circ\mu_L = \lambda \in \mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}^*$

$\Rightarrow$ $\mu^{-1}(\lambda) = \{(g, p) \mid p \simeq -\lambda - \tilde{\beta}_-,\ \tilde{\beta}_- \in \mathfrak{g}_-\}$

Тогда $(\mu^{-1}(\lambda) \cap G_-G_0G_+)/_{G_-G_0} \cong T^*(G_+)$

$$\pi((g_-g_0g_+, \lambda + \alpha_-)) = (g_+, -g_0^{-1}g_-^{-1}(\lambda + \tilde{\beta}_-)g_-g_0) =$$

$$= (g_+, -\lambda + \beta_-), \quad \beta_- \in \mathfrak{g}_-$$

(g_+, β_-) – координаты на T^*G_+

Замечание. У нас все ещё есть правое действие G на T^*G, индуцирующее $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Vect}(T^*G_+)$.
Из общих соображений „правое" действие $\mathfrak{g}$ на редукции будет гамильтоновым и его момент – это μ_R, пропущенное через редукцию.

А именно, $\mu_R^{T^*G_+}(g_+, \beta_-) = \mathrm{Ad}^*_g(-p)\Big|_{\substack{p \simeq \lambda + \beta_- \\ g = g_+}} \simeq g_+^{-1}(\lambda - \beta_-)g_+$,

Таким образом $\mu_R^{T^*G_+} : T^*G_+ \longrightarrow \mathfrak{g}^*$

$$\Downarrow$$

$$(\mu_R^{T^*G_+})^* : S(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(T^*G_+).$$

Скрининги.

Замечание. На $G_+ = G_-G_0\backslash G_-G_0G_+$ есть левое действие G_+, оно вообще говоря не коммутирует с правым действием $\mathfrak{g}$, но коммутирует с правым действием G_+.

Сдвиг веса $W_\lambda \longrightarrow W_{\lambda+\mu}$ коммутирует с действием G_+ справа и слева.

Комбинируя сдвиг веса и левое действие G_+ можно построить оператор, коммутирующий с $r(\mathfrak{g}_+\oplus\mathfrak{h})$. „Если повезёт" (при специальных λ) он будет коммутировать и с $r(\mathfrak{g}_-)$.

Обозначение. $\forall x\in\mathfrak{g}$ $l(x)$ и $r(x)$ – генераторы левого и правого действия x на W_λ соответственно.

Обозначение. $\forall\mu\in\mathfrak{h}^*$ $P_\mu : W_\lambda \longrightarrow W_{\lambda+\mu}$ – сдвиг веса.
$$Q(z_\alpha)\longmapsto Q(z_\alpha)$$

Пример: $\mathfrak{g} = sl_2(\mathbb{C})$:

$$r(e) = l(e) = \partial_z$$
$$r(h) = -2z\partial_z + \lambda$$
$$r(f) = -z^2\partial_z + \lambda z$$

$$s = l(e)P_{-2} = P_{-2}\partial_z \qquad („[\lambda, P_{-2}] = -2P_{-2}")$$

$$[r(e), s] = 0$$

$$[r(h), s] = \underbrace{[r(h), l(e)]}_{2l(e)}P_{-2} + l(e)\underbrace{[r(h), P_{-2}]}_{-2P_{-2}} = 0.$$

$$[r(f), s] = -r(h)P_{-2} + l(e)(-2P_{-2})z =$$
$$= (\cancel{2z\partial_z} - (\lambda-2))P_{-2} - 2\underbrace{\partial_z z}_{\cancel{z\partial_z}+1}P_{-2} = -P_{-2}\lambda$$

$$\Rightarrow [r(f), s^{k+1}] = -P_{-2}(\lambda-2k)s^k + \ldots + (-P_{-2})s^k\lambda =$$
$$= -P_{-2}s^k\left((k+1)\lambda - 2\frac{k(k+1)}{2}\right) = -P_{-2}s^k(k+1)(\lambda-k)$$

$\Rightarrow$ Если $\lambda = k$, $s^{k+1}: W_\lambda \longrightarrow W_{\lambda-2(k+1)}$ – коммутирует с действием $sl_2(\mathbb{C})$.

Замечание. Вообще говоря, левое действие $\mathfrak{g}_+$ не совпадает с правым, в частности для $sl_n(\mathbb{C})$:

$$\begin{tikzcd} & E_{ij} \arrow[dl, "l"'] \arrow[dr, "r"] & \\ \frac{\partial}{\partial z_{ij}} + \sum\limits_{k>j} z_{jk}\frac{\partial}{\partial z_{ik}} & & \frac{\partial}{\partial z_{ij}} + \sum\limits_{k<i} z_{ki}\frac{\partial}{\partial z_{kj}} \end{tikzcd}$$

Предложение. $\forall h\in\mathfrak{h}$, $x\in\mathfrak{g}_+$ $[r(h), l(x)] = l([h,x])$

Доказательство.

$$r(h)\,l(x)(f)(g_+) = \frac{d}{du}\Big|_{u=0}\left(\lambda((g_+e^{uh})_0)\,l(x)(f)((g_+e^{uh})_+)\right) =$$
$$= \frac{d}{du}\Big|_{u=0}\frac{d}{dv}\Big|_{v=0}\left(\lambda(\underbrace{(g_+e^{uh})_0}_{e^{uh}})\,f(e^{-vx}(g_+e^{uh})_+)\right)$$
$$l(x)\,r(h)(f)(g_+) = \frac{d}{dv}\Big|_{v=0}\left(\frac{d}{du}\Big|_{u=0}\left(\lambda(\underbrace{(e^{-vx}g_+e^{uh})_0}_{e^{uh}})\,f((e^{-vx}g_+e^{uh})_+)\right)\right)$$

$$(e^{-vx}g_+e^{uh})_+ = (e^{uh}Ad_{e^{-uh}}(e^{-vx})(g_+e^{uh})_+)_+ = Ad_{e^{-uh}}(e^{-vx})(g_+e^{uh})_+$$

$$\Rightarrow [r(h), l(x)](f)(g_+) = -\frac{d}{dv}\Big|_{v=0}\frac{d}{du}\Big|_{u=0}\left(f(Ad_{e^{-uh}}(e^{-vx})g_+\right) =$$
$$= -\frac{d}{du}\Big|_{u=0}(l(Ad_{e^{-uh}}(x)))(f)(g_+) = -l(-ad_h(x))(f)(g_+) = l([h,x])(f)(g_+)$$

■

Замечание. $\mathfrak{g}_\pm = \mathfrak{n}_\pm \Rightarrow [r(h), l(e_\alpha)] = l(\alpha(h)e_\alpha)$
$$(r(h) - \alpha(h))\,l(e_\alpha) = l(e_\alpha)\,r(h)$$

Напомним, что экспоненциальные координаты $g_+ = e^{\sum_i z_\alpha e_\alpha}$ на G_+ однородные, а именно: $r(h)(z_\alpha) = (\lambda(h) + \alpha(h))z_\alpha$

Или $r(h) = \lambda(h) - \sum_i \alpha(h)z_\alpha\frac{\partial}{\partial z_\alpha}$

Обозначение. $\forall\mu\in\mathfrak{h}^*$ $P_\mu : W_\lambda \longrightarrow W_{\lambda+\mu}$
$$Q(z_\alpha)\longmapsto Q(z_\alpha)$$

Предложение. $s_\alpha = l(e_\alpha)P_{-\alpha}$ коммутирует с $r(\mathfrak{g}_+\oplus\mathfrak{h})$.

Доказательство. С $\mathfrak{g}_+$ коммутируют оба множителя.
Для $\mathfrak{h}$:
$$r(h)\,l(e_\alpha)P_{-\alpha} = l(e_\alpha)(r(h)+\alpha(h))P_{-\alpha} = l(e_\alpha)P_{-\alpha}r(h)$$

■

Обозначение. Пусть α_j – простой корень, $f_j := f_{\alpha_j}$, $s_j = s_{\alpha_j}$.
$e_j := e_{\alpha_j}$

Предложение. $[r(f_j), s_i] = \lambda(h_i)\delta_{ij}P_{-\alpha_i}$

Доказательство.

$$r(f_j)\,l(e_i)(f)(g_+) = \frac{d}{du}\Big|_{u=0}\left(\lambda((g_+e^{uf_j})_0)\,l(e_i)(f)((g_+e^{uf_j})_+)\right) =$$
$$= \frac{d}{du}\Big|_{u=0}\frac{d}{dv}\Big|_{v=0}\left(\lambda(\underline{(Ad_{e^{-uf_j}}(g_+))_0})\,f(e^{-ve_i}\underline{(Ad_{e^{-uf_j}}(g_+))_+})\right)$$

$$l(e_i)\,r(f_j)(f)(g_+) = \frac{d}{dv}\Big|_{v=0}\left(\frac{d}{du}\Big|_{u=0}\left(\lambda(\underline{(e^{-ve_i}g_+e^{uf_j})_0})\,f(\underline{(e^{-ve_i}g_+e^{uf_j})_+})\right)\right)$$

$$\lambda((e^{-ve_i}g_+e^{uf_j})_0) \approx \lambda\left(\underline{(Ad_{e^{-uf_j}}(e^{-ve_i}))_0}\cdot(Ad_{e^{-uf_j}}(g_+))_0\right)$$

$$\Rightarrow \text{I})\quad \lambda(([f_j, -e_i])_0) = \delta_{ij}\lambda(h_i)$$

$$\text{II})\quad (e^{-ve_i}g_+e^{uf_j})_+ = (Ad_{e^{-uf_j}}(e^{-ve_i}g_+))_+ = ((Ad_{e^{-uf_j}}(e^{-ve_i}))_+ \cancel{Ad_{e^{-uf_j}}(g_+)_-}\cdot$$
$$\cdot Ad_{e^{-uf_j}}(g_+)_0 + Ad_{e^{-uf_j}}(g_+))_+ \sim (\underline{e^{-ve_i}}\underbrace{(Ad_{e^{-uf_j}}(g_+))_0}_{\overset{\text{||}}{\exp(uz_{\alpha_j}h_j)}} + \underline{Ad_{e^{-uf_j}}(g_+)})_+$$

$$[r(f_j), l(e_i)](f)(g_+) = \lambda(h_i)\delta_{ij}f(g_+) + \alpha_i(h_j)z_{\alpha_j}l(e_i)f(g_+)$$

$$[r(f_j), l(e_i)] = (\lambda, \alpha_i)\delta_{ij} + \alpha_i(h_j)z_{\alpha_j}l(e_i)$$

$$[r(f_j), P_{\alpha_i}] = -\alpha_i(h_j)z_{\alpha_j}P_{-\alpha_i}$$

$$[r(f_j), s_i] = (\lambda(h_j)\delta_{ij} + \alpha_i(h_j)z_{\alpha_j}l(e_i))P_{-\alpha_i} - \alpha_i(h_j)z_{\alpha_j}P_{-\alpha_i} =$$
$$= \lambda(h_j)\delta_{ij}P_{-\alpha_i} = \lambda(h_i)\delta_{ij}P_{-\alpha_i}$$

■

Следствие. Если $\lambda(h_i) = m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, то s_i^{m+1} коммутирует с $r(\mathfrak{g})$.

Доказательство. Из предл. s_i коммутирует с f_j при $j\neq i$

$$[r(f_i), s_i^{m+1}] = \left(\sum_{l=0}^{m}(\lambda(h_i) - l\cdot\underbrace{\alpha_i(h_i)}_{2})\right)P_{-\alpha_i}S_i^m = ((m+1)\lambda(h_i) - m(m+1))\cdot$$
$$\cdot P_{-\alpha_i}S_i^m = 0$$

■

Замечание. Пусть $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ $\forall$ характера $\lambda : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{C}$ мы построили гомоморфизм

$$\begin{tikzcd}
\rho_\lambda : \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & \mathcal{D}_{\le 1}(G_+) \\
\tilde{\rho}_\lambda : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \arrow[r] & \mathcal{D}(G_+)
\end{tikzcd}$$

Переходя к λ как к формальному параметру, мы получим:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\rho} : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \arrow[r] \arrow[d, squiggly, "gr"] & \mathcal{D}(G_+) \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}] \arrow[d, squiggly, "gr"] \\
\tilde{\rho}_c : S(\mathfrak{g}) \arrow[r] & \mathrm{Fun}(T^*G_+) \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}].
\end{tikzcd}$$

Существует „классическая" версия $\tilde{\rho}$!

где для $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ фильтрация — PBW.

Для $\mathcal{D}(G_+)$ $\deg(\underset{\uparrow}{\frac{\partial}{\partial z_\alpha}}) = \deg(h_i) = 1$; $\deg(z_\alpha) = 0$.

$$\tilde{\rho} : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{D}(G_+) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)$$

$$\tilde{\rho}_c : S(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(T^*G_+) \otimes S(\mathfrak{g}_0)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}^* & T^*G_+ \times \mathfrak{g}_0^* \arrow[l] \\
Ad_{g_+^{-1}}(\lambda - \beta_-) & (g_+, \beta_-, \lambda) \arrow[l, mapsto] \arrow[dl] \\
(\underline{g_0 g_+}, \underline{g_0(-\beta_- + \lambda) g_0^{-1}}) &
\end{tikzcd}$$