## Обозначения и введение.

Пусть $\mathfrak{g}$ – простая алгебра Ли.

$h \in \mathfrak{h}$

Тогда $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_-$

где $\mathfrak{g}_\pm = \bigoplus\limits_{\alpha : \alpha(h) > 0 \, (<)} \mathfrak{g}_\alpha$ ; $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus\limits_{\alpha:\alpha(h)=0} \mathfrak{g}_\alpha$

Пример: $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ ; $h = diag(\overset{\mathbb{R}}{\underset{\cup}{\lambda_1, \dots, \lambda_n}})$, $\sum_i \lambda_i = 0$, $\lambda_i > \lambda_{i+1}$

$\Rightarrow \mathfrak{g}_+ = \bigoplus\limits_{i<j} \mathbb{C} E_{ij}$ ; $\mathfrak{g}_- = \bigoplus\limits_{i>j} \mathbb{C} E_{ij}$ ; $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h} = \left(\bigoplus\limits_{i=1}^{n} \mathbb{C} E_{ii}\right) \cap \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$

Можно рассмотреть $G_\pm = \langle \exp(\mathfrak{g}_\pm) \rangle$ ; $G_0 = \langle \exp(\mathfrak{g}_0) \rangle$

Тогда $G_- G_0 G_+ \subseteq G$ – откр. подмножество.

Замечание. $G_- G_0$ – подгруппа.

Замечание. Если $g \in G_- G_0 G_+$, то $g = g_- g_0 g_+$ и $g_-, g_0, g_+$ определены однозначно.

Действ. $e^{tE_\alpha} h e^{-tE_\alpha} \in \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{h}$ (с ненулевой проекцией на $\mathfrak{g}_+$)

$Ad_{g_+}(h) \in \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{h}$

Пример: Рассмотрим общую матрицу из $SL_n(\mathbb{C})$:

Вычитая строки с меньшими номерами из строк с большими номерами, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ \tilde{x}_{i>j} & & 1 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} y_1 & & \tilde{z}_{i<j} \\ & \ddots & \\ 0 & & y_n \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow g = \underset{\substack{\cap \\ G_+}}{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ x_{i>j} & & 1 \end{pmatrix}} \underset{\substack{\cap \\ H}}{\begin{pmatrix} y_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & y_n \end{pmatrix}} \underset{\substack{\cap \\ G_-}}{\begin{pmatrix} 1 & & z_{i<j} \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}} = X \cdot Y \cdot Z$$

$\{x_{i>j}\}, \{y_i\}_{i>1}, \{z_{i<j}\}$ – лок. координаты на $SL_n(\mathbb{C})$.

Вычислим их явно.

Пусть $\begin{bmatrix} i_1 \dots i_k \\ j_1 \dots j_k \end{bmatrix}(a)$ – определитель матрицы $(a_{i_m j_n})_{m,n=1}^{k}$.

Заметим, что при умножении матрицы слева на матрицу $\in G_+$ элементы вида $\begin{bmatrix} 1 \dots k \\ j_1 \dots j_k \end{bmatrix}$ не меняются.

——— " ——— справа на матрицу $\in G_-$ элементы вида $\begin{bmatrix} i_1 \dots i_k \\ 1 \dots k \end{bmatrix}$ не меняются.

$$\Rightarrow \Delta_k = \begin{bmatrix} 1 \dots k \\ 1 \dots k \end{bmatrix}(g) = \begin{bmatrix} 1 \dots k \\ 1 \dots k \end{bmatrix}(YZ) = \begin{bmatrix} 1 \dots k \\ 1 \dots k \end{bmatrix}(Y) = y_1 \dots y_k$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \dots k \\ 1 \dots k-1 \, j \end{bmatrix}(g) = \underset{(j>k)}{\begin{bmatrix} 1 \dots k-1 \, k \\ 1 \dots k-1 \, j \end{bmatrix}}(YZ) = \begin{vmatrix} y_1 & * & \dots & * & * \\ 0 & y_2 & \dots & * & * \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & y_{k-1} & \\ & & & & y_k z_{kj} \end{vmatrix} = \Delta_k \cdot z_{kj}$$

$$\Rightarrow \overset{(i>k)}{\begin{bmatrix} 1 \dots k-1 \, i \\ 1 \dots k-1 \, k \end{bmatrix}}(g) = \begin{bmatrix} 1 \dots k-1 \, i \\ 1 \dots k-1 \, k \end{bmatrix}(XY) = \begin{vmatrix} y_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ * & & y_{k-1} & \\ & & & x_{ik} y_k \end{vmatrix} = \Delta_k x_{ik}$$

Итого: $y_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$, $\Delta_{-1} = 1$

$$x_{ij} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \dots j-1 \, i \\ 1 \dots j-1 \, j \end{bmatrix}}{\Delta_j} \quad (i>j)$$

$$z_{ij} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \dots i-1 \, i \\ 1 \dots i-1 \, j \end{bmatrix}}{\Delta_i} \quad (i<j)$$

Замечание. Подмн-во выделено условием $\Delta_j \neq 0$.

## Клетка Брюа и определение модуля.

<u>Определение</u>. Рассмотрим $G_-G_0\backslash G$.
"нижнетреугольные матрицы"

$G_-G_0\backslash G_-G_0G_+ = G_+ \subseteq G_-G_0\backslash G$ называется клеткой Брюа.

<u>Пример</u> $G = sl_n(\mathbb{C})$; $h = diag(\alpha_1 \mathbb{1}_{n_1}, \alpha_2 \mathbb{1}_{n_2}, \dots, \alpha_k \mathbb{1}_{n_k})$
$(\alpha_i \neq \alpha_j, i \neq j)$

$G_0 = \{diag(B_1, \dots, B_k) \mid B_i \in GL_{n_k}(\mathbb{C}), \ \prod det(B_i) = 1\}$

$$G_- = \left\{ \begin{array}{c|ccc} & n_1 & n_2 & n_k \\ \hline n_1 & \mathbb{1} & * & * \\ n_2 & & \mathbb{1} \ * & \\ \vdots & & \ddots \ \mathbb{1} & * \\ n_k & 0 & & \mathbb{1} \end{array} \right\}$$

Рассмотрим

$\mathcal{F}_{V,(n_1,\dots,n_k)} = \{0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_k = \mathbb{C}^n \mid dim(V_i) = \sum_{j=1}^{i} n_j, \ 1 \le i \le k\}$.

На $\mathcal{F}_{V,(n_1,\dots,n_k)}$ определено действие $sl_n$: $g: \{V_i\}_{i=1}^k \longrightarrow \{gV_i\}_{i=1}^k$

Оно транзитивно.

Стабилизатор точки $\{V_i = Span\{e_1, \dots, e_{dim(V_i)}\}\}$ – это

$$G_0G_- = \left\{ \begin{array}{c|cccc} & n_1 & n_2 & \dots & \\ \hline n_1 & * & * & \dots & * \\ n_2 & 0 & * & & * \\ & & 0 & * & \\ n_k & 0 & 0 & 0 & * \end{array} \in SL_n(\mathbb{C}) \right\} \Rightarrow \mathcal{F}_{V,(n_1,\dots,n_k)} = G/G_0G_-$$

$\Rightarrow$ Для $G = SL_n(\mathbb{C})$ $G_+$ – открытая клетка в $\mathcal{F}_{V,(n_1,\dots,n_k)}$.

<u>Замечание</u>. Правое действие $G_-G_0\backslash G \circlearrowleft G$ индуцирует:

$$\mathfrak{g} \longrightarrow Vect(G_-G_0\backslash G) \xrightarrow[\text{сужение}]{} Vect(G_-G_0\backslash G_-G_0G_+) = Vect(G_+)$$

Т.о. $\mathfrak{g}$ действует на функциях на $G_+$.

Пусть $\lambda: G_0 \longrightarrow \mathbb{C}^*$ – характер.

<u>Определение</u>. $W_\lambda = \{f \in \mathbb{C}(G_-G_0G_+) \mid f(g_-g_0g_+) = \lambda(g_0) f(g_+)\}$.

Тогда правое действие $G$ задаёт действие $\mathfrak{g}$ на этом пространстве.

Более явно: $\forall x \in \mathfrak{g}$ $\quad x(f)(g_+) = \frac{d}{dt}\left( f(g_+e^{tx}) \right)\Big|_{t=0} =$

$= \frac{d}{dt}\left( \lambda((g_+e^{tx})_0) \right)\Big|_{t=0} f(g_+) + \frac{d}{dt}\left( f((g_+e^{tx})_+) \right)\Big|_{t=0}$

<u>Замечание</u>. При $\lambda = 0$ получается действие $\mathfrak{g} \longrightarrow Vect(G_+)$

## • Пример для $sl_n$.

<u>Пример</u>: $sl_n(\mathbb{C})$, $\lambda(Y)=\prod_{i=1}^{n} y_i^{\lambda_i}$; $W_\lambda=\mathbb{C}\left[\{z_{ij}\}_{i<j}\right]$

Найдём действие для подалгебры Картана и $\{e_\alpha\}_{\alpha\text{-простые}}$

$e_i=E_{i\,i+1}$:

$(g_+e^{tE_{i\,i+1}})_0=Id \Rightarrow$ $e_i$ действует также как и на функции на клетке.

$$\frac{d}{dt}\left(\left(Id+\sum_{k<l}E_{kl}z_{kl}\right)e^{tE_{i\,i+1}}\right)\Big|_{t=0}=\sum_{k<i}E_{ki}z_{ki}+E_{i,i+1}$$

$$\Rightarrow\quad e_i\longmapsto\sum_{k<i}z_{ki}\frac{\partial}{\partial z_{ki}}+\frac{\partial}{\partial z_{i,i+1}}$$

$h_i=E_{i,i}-E_{i+1,i+1}$:

$$g_+=\begin{pmatrix}1 & z_{12} & \cdots & z_{1n}\\ & \ddots & & \vdots\\ & & \ddots & z_{n-1,n}\\ 0 & & & 1\end{pmatrix};\quad e^{th_i}=\mathrm{diag}(1,\dots,\underset{i}{e^t},e^{-t},1,\dots,1)$$

$$g_+e^{th_i}=\begin{pmatrix}1 & & \times e^t & \times e^{-t} & \\ & \ddots 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & & & 0\\ & \ddots 1 & & & \\ & & e^t & & \\ & & & e^{-t} & \\ 0 & & & & 1\ddots 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & \overset{i}{e^t} & \overset{i+1}{e^{-t}} & \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \\ & & \cdot & + & e^{-t}\\ & & & \cdot & e^{t}\\ & & & & 1\end{pmatrix}$$

• $\lambda((g_+e^{th_i})_0)=e^{(\lambda_i-\lambda_{i+1})t}\Rightarrow\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\rightsquigarrow(\lambda_i-\lambda_{i+1})$

$$\frac{d}{dt}\left(\begin{pmatrix}1 & & e^t & e^{-t} & \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \\ & & \cdot & + & e^{-t}\\ & & & \cdot & e^{t}\\ & & & & 1\end{pmatrix}\right)\Bigg|_{t=0}=\sum_{j<i}\left(z_{ji}\frac{\partial}{\partial z_{ji}}-z_{j\,i+1}\frac{\partial}{\partial z_{j\,i+1}}\right)+$$

$$+\sum_{j>i+1}\left(z_{i+1\,j}\frac{\partial}{\partial z_{i+1\,j}}-z_{ij}\frac{\partial}{\partial z_{ij}}\right)-2z_{i\,i+1}\frac{\partial}{\partial z_{i\,i+1}}$$

<u>Т.о.</u> $$h_i\longmapsto(\lambda_i-\lambda_{i+1})+\sum_{j<i}\left(z_{ji}\frac{\partial}{\partial z_{ji}}-z_{j\,i+1}\frac{\partial}{\partial z_{j\,i+1}}\right)+$$
$$+\sum_{j>i+1}\left(z_{i+1\,j}\frac{\partial}{\partial z_{i+1\,j}}-z_{ij}\frac{\partial}{\partial z_{ij}}\right)-2z_{i\,i+1}\frac{\partial}{\partial z_{i\,i+1}}$$

Рассмотрим теперь $f_i=E_{i+1,i}$

$$(g_+)e^{tf_i}=\begin{pmatrix}1 & z_{12} & \cdots & z_{1n}\\ 0 & & \ddots & \vdots\\ & & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & \overset{i}{\vdots} & 0\\ & \ddots & 1 & \\ & & t & 1\end{pmatrix}\text{---}i+1=\begin{pmatrix}1 & \cancel{*} & z_{1i}+tz_{1\,i+1} & \vdots\\ & \ddots & \vdots & \vdots\\ & & 1+tz_{i\,i+1} & \\ 0 & & t & 1\\ 0 & 0 & 0 & \ddots 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & \ddots 1 & & \\ & \frac{t}{1+tz_{i\,i+1}} & 1 & \\ 0 & & & \ddots 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & 1+tz_{i,i+1} & & \\ & & 1-\frac{tz_{i\,i+1}}{1+tz_{i,i+1}} & \\ 0 & & & 1\ddots 1\end{pmatrix}\times$$

$$\frac{1}{1+tz_{i,i+1}}$$

(0) (1) (2) (3)

$$\times\begin{pmatrix}1 & \cancel{*} & z_{1i}+tz_{1\,i+1} & \\ & \ddots & \vdots & \\ & & 1 & \frac{z_{ij}}{1+tz_{i,i+1}}\\ 0 & & & 1\ \cdots\ z_{i+1\,j}(1+tz_{i,i+1})-tz_{ij}\\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

(0): $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left((1+tz_{i,i+1})^{\lambda_i-\lambda_{i+1}}\right)=(\lambda_i-\lambda_{i+1})z_{i,i+1}$

(1): $\sum_{j<i}z_{j,i+1}\frac{\partial}{\partial z_{ji}}$ ; (2): $-\sum_{j>i}z_{i\,i+1}z_{ij}\frac{\partial}{\partial z_{ij}}$ ; (3) $\sum_{j>i+1}(z_{i\,i+1}z_{i+1\,j}-z_{ij})\frac{\partial}{\partial z_{ij}}$

Итого: $$f_i\longmapsto(\lambda_i-\lambda_{i+1})z_{i,i+1}+\sum_{j<i}z_{j,i+1}\frac{\partial}{\partial z_{ji}}-$$
$$-\sum_{j>i}z_{i\,i+1}z_{ij}\frac{\partial}{\partial z_{ij}}+\sum_{j>i+1}(z_{i\,i+1}z_{i+1\,j}-z_{ij})\frac{\partial}{\partial z_{i+1\,j}}$$

Суммируя, получаем:

<u>Предложение.</u>: В случае $sl_n(\mathbb{C})$ действие на функции задано формулами:

$$e_i\longmapsto\sum_{k<i}z_{ki}\frac{\partial}{\partial z_{ki}}+\frac{\partial}{\partial z_{i,i+1}}$$

$$h_i\longmapsto(\lambda_i-\lambda_{i+1})+\sum_{j<i}\left(z_{ji}\frac{\partial}{\partial z_{ji}}-z_{j\,i+1}\frac{\partial}{\partial z_{j\,i+1}}\right)+$$
$$+\sum_{j>i+1}\left(z_{i+1\,j}\frac{\partial}{\partial z_{i+1\,j}}-z_{ij}\frac{\partial}{\partial z_{ij}}\right)-2z_{i\,i+1}\frac{\partial}{\partial z_{i\,i+1}}$$

$$f_i\longmapsto(\lambda_i-\lambda_{i+1})z_{i,i+1}+\sum_{j<i}z_{j,i+1}\frac{\partial}{\partial z_{ji}}-$$
$$-\sum_{j>i}z_{i\,i+1}z_{ij}\frac{\partial}{\partial z_{ij}}+\sum_{j>i+1}(z_{i\,i+1}z_{i+1\,j}-z_{ij})\frac{\partial}{\partial z_{i+1\,j}}$$

<u>Замечание.</u> При $n=2$ мы получим для веса $(\lambda,0)$, $z_{12}=z$

$$e\longmapsto\frac{\partial}{\partial z}$$

$$h\longmapsto\lambda-2z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$f\longmapsto\lambda z-z^2\frac{\partial}{\partial z}$$

## • Структура модуля.

<u>Определение</u>. Пусть $\mathfrak{g}$ – простая алгебра Ли,

$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $M_\lambda = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \Big/ \Big(\mathcal{U}(\mathfrak{n}_+)\big(\underbrace{\mathcal{U}(\mathfrak{h})}_{S(\mathfrak{h})} - \lambda\big)\Big)_L$

$M_\lambda = \bigoplus_\mu M_\lambda[\mu]$ – Весовые подпр-ва. – модуль Верма.

Контрградиентно-двойственным модулем называется

$M_\lambda^+ = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}} (M_\lambda[\mu])^*$ с действием $x \in \mathfrak{g}$, $\lambda \in M_\lambda[\mu]^*$

$x: \mu \longmapsto (\omega(x))^*(\mu)$

где $\omega(e_\alpha) = e_{-\alpha}$; $\omega(h_\alpha) = h_\alpha$

<u>Замечание</u>. Определение для $W_\lambda^+$ аналогично.

<u>Замечание</u>. При общих $\lambda$ $M_\lambda^+ \cong M_\lambda$

<u>Доказательство.</u> $h|_{M_\lambda[\mu]} = \mu(h) = h|_{(M_\lambda[\mu])^*}$

$\Rightarrow tr(q^{h}|_{M_\lambda}) = tr(q^{h}|_{M_\lambda})$

$\mu_\lambda \in (M_\lambda[\lambda])^* \setminus \{0\} \Rightarrow e_\alpha(\mu_\lambda)(x) = \mu_\lambda(\underbrace{e_{-\alpha}(x)}_{\in \bigoplus_{\mu \neq \lambda} M_\lambda[\mu]^*}) = 0$

$\Rightarrow \mu_\lambda$ – старший вектор веса $\lambda \Rightarrow M_\lambda \longrightarrow M_\lambda^+$

При общих $\lambda$ это инъекция из равенства характеров это сюрьекция. ∎

<u>Теорема</u>. $W_\lambda \cong M_\lambda^+$

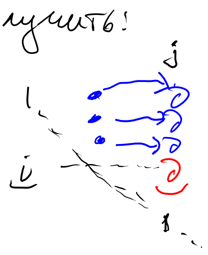
<u>Лемма</u>. $\forall v \in \mathbb{C}[z_{ij}]$ $\exists$ моном $E_{i_1 j_1} \cdots E_{i_k j_k}$, $i_l < j_l$

такой, что $E_{i_1 j_1} \cdots E_{i_k j_k}(v) = \underset{\mathbb{C}^*}{c} \cdot 1$

<u>Доказательство.</u> (Леммы).

Аналогично предложению можно получить:

$\underset{(i<j)}{E_{ij}} \longmapsto \frac{\partial}{\partial z_{ij}} + \sum_{k<i} z_{ki} \frac{\partial}{\partial z_{kj}}$



$1 \quad z_{12} > z_{13} > z_{14} > \dots$

$1 \quad z_{23} \quad \vdots$

Если упорядочить $\{z_{ij}\}$ лексикографически по $(ij)$, то набор $E_{ij}$ получается из $\{\frac{\partial}{\partial z_{ij}}\}$ строго треугольным преобразованием с коэфф. в $\mathbb{C}[z_{ij}] \Rightarrow E_{ij}(f) = 0$ $\forall i < j \Rightarrow f = const$

Пусть $P \in W_\lambda$, тогда либо $P = c \cdot 1$, либо $\exists i<j : E_{ij}(P) \neq 0$
Но максимальный вес, входящий в $E_{ij}(P) <$ макс. вес входящий в $P$. Далее утв. следует из индукции по весу. ∎

<u>Замечание</u>. Можно доказывать $\mathbb{C}[z_\alpha]^{\mathfrak{g}_+} \cong \mathbb{C}$ более геометрично:
Правое действие $G_+$ на $G_+$ транзитивно, если $e_\alpha(f) = 0$ $\forall \alpha$
$f(g_+) = f(g_+ h_+) \Rightarrow f = const$.

<u>Доказательство.</u> (Утверждения):

Рассмотрим $W_\lambda^+ = \bigoplus_\mu (W_\lambda[\mu])^*$.

Обозначим $w^\lambda \in W_\lambda^+$: $w^\lambda(1) = 1$
$w^\lambda(w) = 0$ $\forall w \in \bigoplus_{\mu \neq \lambda} W_\lambda[\mu]$

<u>Предложение</u>. (Упр.) $w^\lambda$ – старший вектор веса $\lambda$.

<u>Следствие.</u> $\exists \varphi^*: M_\lambda \longrightarrow W_\lambda^+$: $\varphi^*(|\lambda\rangle) = w^\lambda$

Переходя к двойственному, получаем: $\varphi: W_\lambda \longrightarrow M_\lambda^+$.

$\forall w \in W_\lambda \Rightarrow \varphi(w)(e_{-\alpha_1} \cdots e_{-\alpha_k}|\lambda\rangle) = \varphi^*(e_{-\alpha_1} \cdots e_{-\alpha_k}|\lambda\rangle)(w) =$

$= (e_{-\alpha_1} \cdots e_{-\alpha_k})(\varphi^*(|\lambda\rangle))(w) = \varphi^*(|\lambda\rangle)(e_{\alpha_k} \cdots e_{\alpha_1}(w)) = w^\lambda(e_{\alpha_k} \cdots e_{\alpha_1}(w))$

<u>Предложение</u>. $\varphi$ – инъекция.
<u>Доказательство.</u> (Предложения)

Пусть $v \in W_\lambda$, $v \neq 0$, тогда из леммы: $\exists$ моном $e_{\alpha_1} \cdots e_{\alpha_k}$:

$e_{\alpha_1} \cdots e_{\alpha_k}(v) = c \cdot 1$ тогда

$\varphi(v)(e_{-\alpha_k} \cdots e_{-\alpha_1}(v_\lambda)) = \varphi(c \cdot 1)(v_\lambda) = c \neq 0 \Rightarrow \varphi(v) \neq 0$ ∎

<u>Предложение</u>. $\varphi$ – сюрьекция.

<u>Доказательство.</u> (Предложения)

Для $M^\lambda$: $\chi_{M^\lambda} = \frac{x^\lambda}{\prod_{i>j}(1 - x_i x_j^{-1})}$

Для $W_\lambda$: и $E_{ii} \longmapsto \lambda_i + \sum_{j<i} z_{ji} \frac{\partial}{\partial z_{ji}} - \sum_{j>i} z_{ij} \frac{\partial}{\partial z_{ij}}$ "

$\Rightarrow \underset{(i<j)}{z_{ij}} \rightsquigarrow x_i^{-1} x_j \Rightarrow \chi_{W_\lambda} = \frac{x^\lambda}{\prod_{i<j}(1 - x_i^{-1} x_j)} = \frac{x^\lambda}{\prod_{i>j}(1 - x_i x_j^{-1})}$

∎