• Обозначения / введение.

Пусть $\mathfrak{g}$ – простая алг. Ли, $\mathfrak{h} \ni h$

Тогда $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_-$

$$\mathfrak{g}_\pm = \bigoplus_{\substack{\alpha(h)>0 \\ (<0)}} \mathfrak{g}_\alpha \; ; \quad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha(h)=0} \mathfrak{g}_\alpha$$

<u>Пример</u>: $\mathfrak{g} = sl_n(\mathbb{C})$; $h = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\sum_i \lambda_i = 0$, $\lambda_i > \lambda_{i+1}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$

$\mathfrak{g}_\pm = \mathfrak{n}_\pm$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$;

Можно рассм. $G_\pm = \langle \exp(\mathfrak{g}_\pm) \rangle$

$G_0 = \langle \exp(\mathfrak{g}_0) \rangle$

$G_- G_0 G_+ \subseteq G$ – откр. подмножество.

<u>Замечание</u>. $G_0 G_-$ – подгруппа $\quad G_0 \ltimes_{Ad} G_-$

<u>Замечание</u>. $g \in G_- G_0 G_+ \Rightarrow g = g_- g_0 g_+$

То $g_\pm, g_0$ определены однозначно.

<u>Пример</u>: $G = SL_n(\mathbb{C})$, $h = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ —//—

g – общая матр. $\Rightarrow$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ x_{i>j} & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & z_{i<j} \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$\{x_{..}, y_., z_{..}\}$ – лок. коорд. на $SL_n(\mathbb{C})$

– Разложение.

$\Delta_k = \begin{bmatrix} 1 \dots k \\ 1 \dots k \end{bmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow$ общая g.

Клетка Брюа и определение модуля.

Определение. Рассмотрим $\underset{\text{„нижнетреуг."}}{G_-}G_0\backslash G = \{G_-G_0 g \mid g\in G\}$.

$G_-G_0\backslash G_-G_0G_+ \cong G_+ \subseteq G_-G_0\backslash G$. — наз. (Большой откр. клеткой Брюа)

Пример: $G = sl_n(\mathbb{C})$; $h = diag(\lambda_1\cdot \mathbb{1}_{n_1\times n_1}, \lambda_2\cdot\mathbb{1}_{n_2\times n_2},\dots, \lambda_k \mathbb{1}_{n_k\times n_k})$
$\lambda_i<\lambda_{i+1}$, $\lambda_i\in\mathbb{R}$

$G_0 = \{ diag(B_1,\dots,B_k) \mid B_i\in GL_{n_i}(\mathbb{C}), \prod \det(B_i)=1\}$.

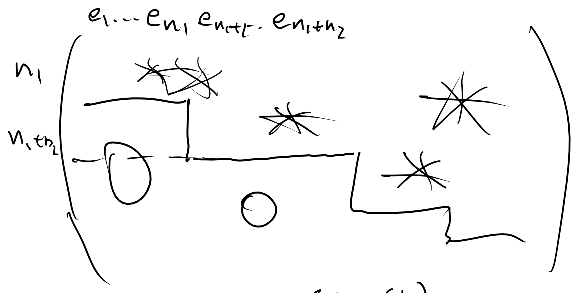
$G_- = \left\{\begin{pmatrix} \mathbb{1}_{n_1\times n_1} & * & * & \dots \\ & \mathbb{1}_{n_2\times n_2} & * & \\ 0 & & \ddots & \end{pmatrix}\right\}$; $G_0G_- = \left\{\begin{pmatrix} \ddots & * \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}\right\}$.

Рассмотрим: $\mathcal{F}_{V,(n_1,\dots,n_k)} = \{0\subset V_1\subset\dots\subset V_k=\mathbb{C}^n \mid \dim(V_j)=\sum_{\ell=1}^{j} n_\ell, 1\le j\le k\}$

$SL_n(\mathbb{C}): \{V_i\} \xmapsto{g} \{gV_i\}$.

Упр. действие транзитивно.

$\mathcal{F}_{V,(n_1,\dots,n_k)} = SL_n(\mathbb{C}) / Stab(\{V_i = Span(\{e_1,\dots,e_{\sum n_j}\})\})$



$= G_0G_-$

$\mathcal{F}_{V,(n_1,\dots,n_k)} = SL_n(\mathbb{C}) / G_0G_-$.

Замечание. $\mathfrak{g} \longrightarrow Vect(G_-G_0\backslash G) \xrightarrow[\text{сужение}]{} Vect(G_+) \circlearrowright Fun(G_+)$

$G_-G_0\backslash G \circlearrowleft G$

Предст. $\mathfrak{g}$, где пр-во — функции на G_+.

Пусть $\lambda: G_0 \longrightarrow \mathbb{C}^*$ — характер.

Определение. $W_\lambda = \{ f\in\mathbb{C}[G_-G_0G_+] \mid f(g_-g_0g_+) = \lambda(g_0)\cdot f(g_+)\}$

$G_0G_-\backslash G \circlearrowleft G$

$\mathfrak{g} \longrightarrow Vect(G_0G_-\backslash G) \curvearrowright W_\lambda$ — задаёт представление

Более явно: $\forall x\in\mathfrak{g}$ $\quad x(f)(g_+) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\big(f(g_+\exp(tx))\big) =$

$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\big(f((g_+\exp(tx))_0(g_+\exp(tx))_+)\big) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\big(\lambda((g_+\exp(tx))_0)\big) f(g_+) +$

$+ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\big(f((g_+\exp(tx))_+)\big)$

В частности $\lambda\equiv 1 \rightsquigarrow$ ранее определённое действие $\mathfrak{g}$ на $Fun(G_+)$

Пример $sl_2(\mathbb{C})$: $\lambda\left(\begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}\right) = y_1^{\lambda}$; $y_2 = \frac{1}{y_1}$.

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{g_+};$$

$$\exp(te) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \exp(th) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}; \quad \exp(tf) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(g_+ e^{te})_0 = 1; \quad (g_+ e^{te})_+ = g_+ e^{te}$$

$$e(g_+) = \cancel{\frac{d}{dt}\left(\lambda(1)\right)}^{\,0} g_+ + \frac{d}{dt}(g_+ e^{te}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow e \longmapsto \frac{\partial}{\partial z}$$

$h(g_+)$:
$$\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & ze^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}}_{(g_+e^{th})_0}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & ze^{-2t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{(g_+e^{th})_+}$$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\left(\lambda\left(\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\right)\right) = \lambda$$

1: $\lambda \cdot g_+$; 2: $\frac{d}{dt}\left(\begin{pmatrix} 1 & ze^{-2t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -2z \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\frac{d}{dt}\left(f(g_+ e^{th})\right) = \lambda f(g_+) + (-2z)\partial_z\left(f(g_+)\right)$$

$$h \longmapsto \lambda - 2z\partial_z.$$

<u>Упр</u> Действие f - ?.