Скобка Костанта–Кириллова.
Метод сдвига аргумента.
Подалгебры Мищенко–Фоменко.

I.

Опр.

$\{\ \}_{KK} : \Lambda^2 S(\mathfrak{g}) \longrightarrow S(\mathfrak{g})$:

(i) $\forall x, y \in \mathfrak{g} : \{x, y\}_{KK} = [x, y]$

(ii) $\{\ ,\ \}_{KK}$ – скобка Пуассона.

Утв. $\mathfrak{g}$ – полупростая алг. Ли

Орбиты коприсоед. действия $O(p) \subseteq \mathfrak{g}^*$:

(i) Имеют структуру симпл. мн-я.

(ii) Являются Пуассоновыми подмногообразиями $(\mathfrak{g}^*, \{\ ,\ \}_{KK})$.

II. Цель: Найти коммутативную подалгебру в $S(\mathfrak{g})$.

$\nearrow Z(S(\mathfrak{g}))$

Предл. $Z(S(\mathfrak{g})) = S(\mathfrak{g})^G$

Д-во: ...

Предл.

$$S(\mathfrak{g})^G = S(\mathfrak{h})^{Stab_{Ad}(\mathfrak{h})} = S(\mathfrak{h})^{W(\mathfrak{h})}, \text{ где } W(\mathfrak{h}) = {}^{stab_{Ad}(\mathfrak{h})}/_{C_L(\mathfrak{h})}$$

Д-во: ...

Замеч. $W(\mathfrak{h})$ нетривиально действует на Φ (системе корней $\mathfrak{g}$)

Д-во: $[g] \in W(\mathfrak{h}) \Rightarrow [h, Ad_g(e_\alpha)] = Ad_g\left((\alpha, Ad_{g^{-1}}(h)) \cdot e_\alpha\right) = (Ad_g(\alpha), h) Ad_g(e_\alpha)$

$\Rightarrow Ad_g(\alpha) \in \Phi$. ∎

Замеч. Ad_g сохр. $(,)$.

Предл. $W(\Phi) \subseteq W(\mathfrak{h})$

Д-во: Отражение s_α (α-простой) реализуется $Ad_{\exp\left(\frac{\pi i}{\sqrt{2(\alpha,\alpha)}}(e_\alpha + e_{-\alpha})\right)}$

(При фиксации $(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 1$)

Пример: $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$: $\alpha = h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\exp(..) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -h.$$

∎

Утв. $W(\mathfrak{h}) = W(\Phi)$

Теорема. $\mathfrak{h}^{W(\Phi)} \cong \mathbb{C}^r$

$$S(\mathfrak{g})^G = S(\mathfrak{h})^{W(\Phi)} = \mathbb{C}[\varphi_1, \dots, \varphi_r]; \ \deg(\varphi_i) = d_i.$$

Пример: $A_{n-1} = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid i \neq j, \ 1 \leq i, j \leq n\}$ $\quad \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$

$\Delta = \{\epsilon_i - \epsilon_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$

$W = S_n$;

$$S(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}))^{SL_n(\mathbb{C})} = \left(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] / (\textstyle\sum x_i)\right)^{S_n} = \mathbb{C}[\underset{2}{e_2}, \underset{3}{e_3}, \dots, \underset{n}{e_n}]$$

$2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n! = |W|$

$2(2 + 3 + \ldots + n) - (n-1) = (n+2)(n-1) - (n-1) = n^2 - 1 = \dim(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}))$

Пример: $D_n = \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j, \ 1 \leq i, j \leq n, \ i \neq j\}$; $\quad \mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$

$\Delta = \{\underbrace{\epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2 - \epsilon_3, \dots, \epsilon_{n-1} - \epsilon_n}_{\text{Транспозиция}}, \underbrace{\epsilon_{n-1} + \epsilon_n}_{\text{смена знака у } \epsilon_{n-1}, \epsilon_n}\}$ ~~+ транспозиция~~

$W = S_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1}$

$$S(\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C}))^{SO_{2n}(\mathbb{C})} = \left(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^{S_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1}}\right) = \mathbb{C}[x_1^2, x_2^2, \dots, x_{n-1}^2, x_n^2, x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n]^{S_n} =$$

$$= \mathbb{C}[e_1^{(2)}, \dots, e_n^{(2)}, e_n^{(1)}] / (e_n^{(2)} - (e_n^{(1)})^2) = \mathbb{C}[\underset{2}{e_1^{(2)}}, \underset{4 \ldots}{\dots}, \underset{2(n-1)}{e_{n-1}^{(2)}}, \underset{n}{e_n^{(1)}}]$$

$2 \cdot \ldots \cdot 2(n-1) \cdot n = 2^{n-1} \cdot n! = |W|$

$2(2 + 4 + \ldots + 2(n-1) + n) - n = 2n^2 - n = \frac{4n^2 - 2n}{2} = \frac{2n(2n-1)}{2} = \dim(\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C}))$.

Утв. (i) $\prod_i d_i = |W|$

(ii) $\sum_i (2d_i - 1) = \dim(\mathfrak{g})$ $\left(\Leftrightarrow \sum_i d_i = \frac{\dim(\mathfrak{g}) + r}{2}\right)$

Док-во:

Пусть $\mathfrak{h} = \langle x_1, \dots, x_r \rangle$;

$W \curvearrowright \mathbb{C}[\mathfrak{h}]_k$

$$\dim\left(\mathbb{C}[\mathfrak{h}]_k^W\right) = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} tr\left(w|_{\mathbb{C}[\mathfrak{h}]_k}\right)$$

Пусть $\lambda_i^{(w)}$ – с. зн. w на $\mathfrak{h}$.

Тогда $tr\left(w|_{\mathbb{C}[\mathfrak{h}]_k}\right) = h_k\left(\{\lambda_i^{(w)}\}\right)$

$$\dim_q(\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W) = \frac{1}{|W|} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{w \in W} q^k h_k(\{\lambda_i^{(w)}\}) = \frac{1}{|W|} \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{(1 - q\lambda_i)}$$

С другой стороны:

$$\dim_q(\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W) = \dim_q(\mathbb{C}[\varphi_1, \dots, \varphi_r]) = \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{1 - q^{d_i}}$$

$$\sum_{w \in W} \frac{1}{|W|} \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{(1 - q\lambda_i^{(w)})} = \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{1 - q^{d_i}}$$

$$\frac{1}{|W|}\left(\frac{1}{(1-q)^r} + (\#\text{отражений}) \cdot \frac{1}{2(1-q)^{r-1}} + \ldots\right) = \prod_{i=1}^{r}\left(\frac{1}{d_i(1-q)} + \frac{d_i - 1}{2d_i} + \ldots\right)$$

$\Downarrow$

(i) $|W| = \prod_{i=1}^{r} d_i$

$$\frac{\#\text{отражений}}{2|W|} = \sum_{i=1}^{r} \frac{d_i - 1}{2\prod_{j=1}^{r} d_j}$$

$$\frac{\dim(\mathfrak{g}) - r}{2} = \#\text{отражений} = \sum_{i=1}^{r} d_i - r$$

(ii) $\dim(\mathfrak{g}) = 2\left(\sum_{i=1}^{r} d_i\right) - r$

∎

Замеч.: В общей точке $p \in \mathfrak{g}^*$ $\{\varphi_i = c_i \in \mathbb{C}\}$ – уравнения, задающие $\mathcal{O}(p)$.

Утв. Для общих $\{c_i\}_{i=1}^{r}$: $\{\varphi_i = c_i \in \mathbb{C}\}$ – орбита коир. действия.

Пример: $\nearrow A_{n-1}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.

$\{\varphi_i\}_{i=2}^{n} = \{e_i\}_{i=2}^{n}$

$$\varphi_i(y) = c_i \Leftrightarrow \chi_y(\lambda) = \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq n-1)}}^{n} (-1)^{n-i} c_{n-i} \lambda^i$$

Если $D(\{c_i\}) = \prod_{i \neq j}(\lambda_i - \lambda_j)^2 \neq 0$, то y сопряжён $diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Тогда $y \in \{\varphi_i(y) = c_i\} \Leftrightarrow y \in \mathcal{O}(diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n))$

Если $D(\{c_i\}) = 0$, то $\exists i \neq j: \lambda_i = \lambda_j =: \lambda$, тогда

$\mathcal{O}(diag(\lambda, \lambda, \dots)) \subseteq \{\varphi_i(y) = c_i\}$

$\#$

$$\mathcal{O}\left(\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots \\ & 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix}\right) \subseteq \{\varphi_i(y) = c_i\}$$

Д-во: (Утв.) Общая орбита пересекает $\mathfrak{h}$ по конечному множеству (орбите W).

Пусть есть две различных орбиты W: $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$.

Выберем (линейные) координаты на $\mathfrak{h}$ так чтобы x_1 было различным для всех точек $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$.

Построим интерполяционный многочлен от x_1 $P(x)$:

$P(x) = 1$, если x - первая координата точки из $\mathcal{O}_1$.

$P(x) = 0$, если x - первая координата точки из $\mathcal{O}_2$.

Определим $Q \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$: $Q(x^1, \dots, x^r) = P(x^1)$.

Усредним $Q_W(x) = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} Q(w(x)) \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$

Тогда $Q_W|_{\mathcal{O}_1} \equiv 1$; $Q_W|_{\mathcal{O}_2} \equiv 0$.

С другой стороны $Q_W \in \mathbb{C}[\varphi_1, \dots, \varphi_r] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists i: \varphi_i|_{\mathcal{O}_1} \neq \varphi_i|_{\mathcal{O}_2} \Rightarrow \{\varphi_i\}$ разделяет общие орбиты.

Общие c_i задают общую орбиту $\Rightarrow$ ∎.

Вернёмся к скобкам.

Опр. Пусть $\alpha \in \mathfrak{g}^*$

$$\{\cdot,\cdot\}_\alpha : \Lambda^2 S(\mathfrak{g}) \longrightarrow S(\mathfrak{g})$$

(i) $\forall x,y \in \mathfrak{g}: \{x,y\}_\alpha = \alpha([x,y])$

(ii) $\{,\}_\alpha$ - скобка Пуассона

Опр $\{\cdot,\cdot\}^\alpha_\lambda := \{\cdot,\cdot\}_{KK} + \lambda\{\cdot,\cdot\}_\alpha$

Предл. $\{\cdot,\cdot\}^\alpha_\lambda$ - скобка Пуассона.

$$JI = \lambda\left(\{x,\{y,z\}_{KK}\}_\alpha + \{z,\{x,y\}_{KK}\} + \{y,\{z,x\}_{KK}\}^\alpha_\infty\right) =$$
$$= \lambda\left(\{x,\{y,z\}_{KK}\}_{KK} + \circlearrowleft\right)(\alpha) = 0 \quad \blacksquare$$

Обозн. $T_{\lambda\alpha}: \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$
$x \longmapsto x + \lambda\alpha$

Предл. $\forall f,g \in S(\mathfrak{g}): \{f\circ T_{\lambda\alpha}, g\circ T_{\lambda\alpha}\}^\alpha_\lambda = \{f,g\}_{KK}\circ T_{\lambda\alpha}$

Д-во:
RHS и LHS дифференцирования => проверим на $f,g\in\mathfrak{g}$
Заметим, что тогда $f\circ T_{\lambda\alpha}(p) = f(p) + f(\lambda\alpha)$

$$\{f\circ T_{\lambda\alpha}, g\circ T_{\lambda\alpha}\}^\alpha_\lambda(p) = \{f,g\}^\alpha_\lambda(p) = [f,g](p) + \lambda[f,g](\alpha) = [f,g](p+\lambda\alpha) = \{f,g\}_{KK}(p+\lambda\alpha)$$

$\blacksquare$

Зам. Конструкция скобки $\{\cdot,\cdot\}^\alpha_\lambda$ называется методом сдвига аргумента.

Предл. Пусть $f,g \in Z(S(\mathfrak{g}),\{,\}_{KK})$.
Тогда $\forall \lambda,\mu_1,\mu_2\in\mathbb{C}: \{f\circ T_{\mu_1\alpha}, g\circ T_{\mu_2\alpha}\}^\alpha_\lambda = 0$

Д-во:
Заметим, что при
$\lambda = \mu_1: \forall g\in S(\mathfrak{g})\quad \{f\circ T_{\mu_1\alpha}, g\}^\alpha_{\mu_1} = \{f, g\circ T_{-\mu_1\alpha}\}_{KK}\circ T_{\mu_1\alpha} = 0$

Тогда $f\circ T_{\mu_1\alpha} \in Z(\mathfrak{g}, \{,\}^\alpha_{\mu_1})$

Т.е. $\{f\circ T_{\mu_1\alpha}, g\circ T_{\mu_2\alpha}\}^\alpha_{\mu_1} = 0$

Аналогично: $\{f\circ T_{\mu_1\alpha}, g\circ T_{\mu_2\alpha}\}^\alpha_{\mu_2} = 0$

Тогда $\{f\circ T_{\mu_1\alpha}, g\circ T_{\mu_2\alpha}\}^\alpha_\lambda$ - функция, линейная по λ и равная 0 в двух точках $(\lambda=\mu_1, \lambda=\mu_2)$.

Следовательно: $\{f\circ T_{\mu_1\alpha}, g\circ T_{\mu_2\alpha}\}^\alpha_\lambda \equiv 0$ $\blacksquare$

Опр Пусть $\varphi_i \in Z(G)$ из Теоремы.
$$H_i^{(j)} := \frac{1}{j!}\left(\frac{d}{d\mu}\right)^j(\varphi_i\circ T_{\mu\alpha})\quad ;\ 0\le j < d_i$$

Следствие: $\{H_i^{(j)}\}_{\substack{i=1,\dots,r \\ j=0,\dots,d_i-1}}$ - Набор гамильтонианов в инволюции.

Посчитаем H: $\#H = \sum_{i=1}^{r} d_i = \frac{\dim(\mathfrak{g}) + r}{2}$

Размерность орбиты (в общей точке): $\dim(O(y_0)) = \dim(\mathfrak{g}) - r$

$$\#H = \frac{\dim(O(y_0))}{2} + \underbrace{r}_{\text{центр}}$$

Пример: $\mathfrak{g} = sl_2(\mathbb{C})$

$\Phi = \frac{1}{2}h^2 + e\cdot f + f\cdot e$

$\alpha = h$

Тогда: $e\circ T_{\lambda\alpha}(p) = e(p) + \lambda e(\alpha) = e(p)$

$f\circ T_{\lambda\alpha}(p) = f(p) + \lambda f(\alpha) = f(p)$

$h\circ T_{\lambda\alpha}(p) = h(p+\lambda\alpha) = h(p) + \lambda\underbrace{(h,h)}_{2}$

$$\Phi\circ T_{\lambda\alpha} = \Phi + 2\lambda h + \frac{1}{2}\lambda^2$$

$\Rightarrow H^{(1)} = 2h$
$H^{(0)} = \Phi$

III Доказательство независимости.

Теорема. Пусть $a \in \mathfrak{g}$ – в общем положении.
Система $\{H_i^{(j)}\}$ интегрируема по Лиувиллю.

Д-во: Осталось д-ть независимость.

Введём $U_i^{(j)} \in \mathfrak{g}$: $d(\varphi_i)\big|_{x+\lambda a} = \sum\limits_{j=0}^{d_i-1} \lambda^j U_i^{(j)}(x)$;

$$(x+\lambda a, [d\varphi_i|_{x+\lambda a}, \bullet]) = \{\varphi_i, \bullet\}_{KK}(x+\lambda a) = 0 \Rightarrow [x+\lambda a, d\varphi_i|_{x+\lambda a}] = 0$$

$$(U^{(-1)} \equiv 0)$$

Тогда: $\sum\limits_{j=0}^{d_i-1} \left([x, U_i^{(j)}] + [a, U_i^{(j-1)}]\right)\lambda^j = 0$

$$[x, U_i^{(0)}] = 0 \quad (1)$$
$$[x, U_i^{(j)}] + [a, U_i^{(j-1)}] = 0. \quad (2)$$
$$[a, U_i^{(d_i-1)}] = 0 \quad (3)$$

Предл. $\left\langle \{U_i^{(d_i-1)}\}_{i=1}^{r} \right\rangle = C_{\mathfrak{g}}(a)$

Д-во:

Заметим: $U_i^{(d_i-1)} = d\varphi_i|_a \in C_{\mathfrak{g}}(a)$

$C_{\mathfrak{g}}(a) = (T_a\mathcal{O}(a))^{\perp}$

Действ.: $(b, x) = 0 \ \forall x \in T_a\mathcal{O} \Leftrightarrow (b, [y, a]) = 0 \ \forall y \in \mathfrak{g} \Leftrightarrow [b, a] = 0$

$$\bigcap_{i=1}^{r} (U_i^{(d_i-1)})^{\perp} = T_a\mathcal{O}(a)$$
$$\Downarrow$$
$$\bigoplus_{i=1}^{r} \langle U_i^{(d_i-1)} \rangle = (T_a\mathcal{O}(a))^{\perp}$$
$$\Downarrow$$
$$\bigoplus_{i=1}^{r} \langle U_i^{(d_i-1)} \rangle = C_L(a) =: H(a) \quad \blacksquare$$

Пусть теперь Σ – система корней G, соотв. разложению отн. $H(a)$.
Σ_i^+ – корни, разлагающиеся в сумму i простых положительных $(i>0)$
$\Sigma_i^- = -\Sigma_i^+$

$$V_i^+ := \bigoplus_{\alpha \in \Sigma_i^+} X_\alpha \ ; \ V_i^- := \bigoplus_{\alpha \in \Sigma_i^-} X_\alpha$$

Заметим, что $\forall x \in V_k^+ \quad \mathrm{ad}_x : V_i^+ \longrightarrow V_{i+k}^+$.

Лемма. для $x \in V_1^+$ в общем положении

$$\mathrm{ad}_x : \begin{matrix} H(a) \longrightarrow V_1^+ \\ V_i^+ \longrightarrow V_{i+1}^+ \end{matrix} \quad \text{– сюрьекции}$$

Д-во:

Рассмотрим $x = \sum\limits_{k=1}^{r} e_{\alpha_k}$; $y = 2\sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i^*$;

Построим z: (x, y, z) были sl_2-тройкой:

$z = \sum\limits_{k=1}^{r} \beta_k e_{-\alpha_k}$: $[x, z] = y \Leftrightarrow (\alpha_j, [x, z]) = 2 \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{r} (\alpha_j, \alpha_k)\overset{0}{\underset{\shortparallel}{(e_{\alpha_k}, e_{-\alpha_k})}}\beta_k = 2$ – невыр. линейная система $\Rightarrow \exists z$

Тогда $\mathfrak{g}$ раскладывается в сумму r неприводимых представлений $sl_2(\mathbb{C})$.

$\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_y - 2i) = V_i^+ \quad (i>0)$

$\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_y - 2i) = V_{-i}^- \quad (i<0)$

$\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_y) = H(a)$

$\mathfrak{g} = \bigoplus\limits_{k=1}^{r} V_{\lambda_k}$

$V_i^+ = \bigoplus\limits_{k=1}^{r} (V_{\lambda_k} \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_y - 2i)) = \bigoplus\limits_{\ell=1}^{m} v_{\lambda_\ell}^i$; $v_\ell^i \in (V_{\lambda_\ell} \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_y - 2i))$

Но тогда $v_\ell^{i-1} \neq 0 \Rightarrow v_\ell^i = \mathrm{ad}_x(v_\ell^{i-1}) \Rightarrow V_i^+ \subseteq \mathrm{Im}(\mathrm{ad}_x)$ $\blacksquare$

Из леммы $\Rightarrow \left\langle \{[U_i^{(d_i-1)}, x]\}_{i=1}^{r} \right\rangle = V_1^+$

(2) $\Rightarrow$ $\mathrm{ad}_a(U_i^{d_i-2}) = [U_i^{(d_i-1)}, x]$
$$\Downarrow$$
$$U_i^{d_i-2} = (\mathrm{ad}_a)^{-1}([U_i^{(d_i-1)}, x])$$

Т.к. $(\mathrm{ad}_a)|_{V_i^+}$ – изоморфизм.
$$\Downarrow$$
$$V_1^+ = \left\langle \{U_i^{d_i-2}\}_{i=1}^{r} \right\rangle$$

Предл. $V_j^+ = \left\langle \{U_i^{d_i-j-1}\}_{i=1}^{r} \right\rangle$

Д-во:
Индукция:
База – есть.
Шаг:

Из леммы $\{[U_i^{d_i-j-1}, x]\}_{i=1}^{r}$ порождают V_{j+1}^+.

Тогда в силу (2): $[U_i^{d_i-j-1}, x] = \mathrm{ad}_a(U_i^{d_i-j-2}) \Rightarrow \{U_i^{d_i-j-2}\}_{i=1}^{r}$ порождают V_{j+1}^+. $\blacksquare$.

Следствие: $\dim\left(\left\langle \{U_i^{d_i-j}\}_{i=1;\,j=1}^{r;\,d_i} \right\rangle\right) = r + \dfrac{\dim(\mathfrak{g}) - r}{2} = r + \dfrac{\dim(\mathcal{O}(x))}{2}$ $\blacksquare$

Следствие: $\dim\left(\left\langle \{dH_i^{(j)}|_{\mathcal{O}(p)}\} \right\rangle\right) = \dfrac{\dim(\mathcal{O}(p))}{2}$