$$H_i(z_1,\dots,z_n)=\sum_{j\neq i}\frac{\Omega_{ij}}{z_i-z_j}+\chi^{(i)}\in U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$$

регулярный $\chi\in\mathfrak{g}^*\simeq\mathfrak{g}$

макс. ком. подалгебра

$$\mathcal{A}_\chi(z_1,\dots,z_n)\subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$$

$$\Psi$$

$$H_i(z_1,\dots,z_n)\qquad i=1,\dots,n$$

класс. аналог

$$A_\chi(z_1,\dots,z_n)\subset S(\mathfrak{g})^{\otimes n}$$

макс. пуас. комм. пуасс. алгебра

$n=1$ (Григорьев) $A_\chi=\langle\partial_\chi^k\varphi_b\rangle$ $\varphi_b\in Z(U(\mathfrak{g}))$ $b=1,\dots,\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$ $k=0,1,\dots,\dim\varphi_b-1$

(Иванов)

$$\begin{array}{ccc} S^\bullet(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]) & \xrightarrow{ev_{z_1}\otimes\cdots\otimes ev_{z_n}\otimes\chi(ev_\infty)} & S(\mathfrak{g})^{\otimes n} \\ \cup & & \cup \\ A_{univ} & \longrightarrow & A_\chi(z_1,\dots,z_n) \end{array}$$

$\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t^{-1}]$

Не зависит от $z_1,\dots,z_n$ & χ

$$A_{univ}=\mathbb{C}[D^k i_{-1}\varphi_b]$$

$i_{-1}(x)=x\otimes t^{-1}$
$x\in\mathfrak{g}$

макс. пуас. коммут.

своб. пор.

$b=1,\dots,\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$
$k=0,1,2,\dots$

D - дифф.

$$D(x\otimes t^{-k})=-k\,x\otimes t^{-k-1}$$

(Моторин)

более явн

$$\begin{array}{ccc} Y(\mathfrak{g}[_N]) & \xrightarrow{ev_{z_1}\otimes\cdots\otimes ev_{z_n}} & U(\mathfrak{g}[_N])^{\otimes n} \\ \cup & & \cup \\ B(\chi) & \longrightarrow & \mathcal{A}_\chi(z_1,\dots,z_n) \end{array}$$

(Васильев)

$$\begin{array}{ccc} U(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]) & \xrightarrow{ev_{z_1}\otimes\cdots\otimes ev_{z_n}\cdot\chi(ev_\infty)} & U(\mathfrak{g})^{\otimes n} \\ \cup & & \cup \\ \mathcal{A}^{univ} & \longrightarrow & \mathcal{A}_\chi(z_1,\dots,z_n) \end{array}$$

Аффинные алгебры Ли

$$0 \to \underset{\underset{K}{\psi}}{\mathbb{C}} \to \hat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g} \otimes \underset{\underset{X \otimes t^{l} = X_l}{\psi}}{\mathbb{C}[t, t^{-1}]} \to 0$$

$$[X_l, Y_m] = [X, Y]_{l+m} + l \langle X, Y \rangle \delta_{l+m,0} \cdot K$$

$$[X \otimes f(t), Y \otimes g(t)] = [X, Y] \otimes f(t) \cdot g(t) + \langle X, Y \rangle \cdot \operatorname{Res}_{t=0} df \cdot g \cdot K$$

$$\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}})_k = \mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}}) / (K - k)$$

Далее $\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}})_k$, $\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}})$ – пополненные

<u>Теорема</u> Алгебра $\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}})_k$ имеет центр только при $k = k_c$; в этом случае

[Фейгин Френкель]

крит. уровень

пополнено

$$Z_{\hat{\mathfrak{g}}} := Z(\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}})_{k_c}) \simeq \mathbb{C}[S_{b,(l)}]$$

$b = 1, \ldots, \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$
$l \in \mathbb{Z}$

Для $\hat{sl}_2$ $\quad Z_{\hat{sl}_2} = \mathbb{C}[T_l]$

$$T(z) = :e(z) f(z): + :f(z) e(z): + \frac{1}{2} :h(z)^2:$$

$$T(z) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} T_l z^{-l-2}$$

<u>Определим</u> $\hat{\mathfrak{g}}_- := t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]$

$$\hat{\mathfrak{g}}_+ := \mathfrak{g}[t]$$

вак. модуль

$$\mathbb{V}_{0,k} := \operatorname{Ind}_{\hat{\mathfrak{g}}_+ \oplus \mathbb{C}K}^{\hat{\mathfrak{g}}} (\mathbb{C}_{0,k}) = \mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}}) \big/ \mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}})(\hat{\mathfrak{g}}_+, K - k)$$

как $\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}}_-)$ модуль $\longrightarrow\ \simeq\ \mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}}_-)$

УнВ

$$\mathfrak{Z}_{\hat{\mathfrak g}} \twoheadrightarrow \mathrm{End}_{U(\hat{\mathfrak g})}(\mathbb{V}_{0,k}) \simeq \mathbb{V}_{0,k}^{\hat{\mathfrak g}_+} \simeq$$

как вект. пр-в

$$\simeq \left(U(\hat{\mathfrak g}) \big/ (\hat{\mathfrak g}_+, K-k) \right)^{\hat{\mathfrak g}_+}$$

имеет структ. алгебра квант. гам. редукция

$$\mathfrak{Z}_{\hat{\mathfrak g}} \twoheadrightarrow \mathrm{End}_{U(\hat{\mathfrak g})}(\mathbb{V}_{0,k}) \subset \mathrm{End}_{U(\hat{\mathfrak g}_-)}(\mathbb{V}_{0,k}) \simeq$$

$$\simeq U(\hat{\mathfrak g}_-)^{op} = U(t^{-1}\mathfrak g[t^{-1}])$$

Образ композиции $\mathcal{A}_{univ}$

$$\mathbb{C}[S_{b,(\ell)}] \simeq \mathfrak{Z}_{\hat{\mathfrak g}} \twoheadrightarrow \mathcal{A}_\chi(z_1,\dots,z_n)$$

$$\mathrm{Spec}\, \mathfrak{Z}_{\hat{\mathfrak g}} \longleftrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{A}_\chi(z_1,\dots,z_n))$$

$\in$ p образ вложения?

знач $S_{b,(\ell)}$ на p это собственные значения

какие собств. значения высших гам.

Альт. интерпретация $\mathfrak{Z}_{\hat{\mathfrak g}}$

$\mathfrak g = \mathfrak{gl}_n$ $$\hat{\mathfrak g}_1^* /\!/_{P_-} N_+ = M^{-1}(p_-)/N_+$$

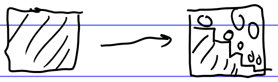
$\mathrm{Lie}\, N_+ = \mathfrak n[t,t^{-1}]$ $\mathfrak n \subset \mathfrak g$ $\langle x,y\rangle$ $\operatorname{Res}_{t=0} dt \cdot g$

$$p_- = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak g/\mathfrak b[t,t^{-1}] \simeq \mathfrak n_+^*[t,t^{-1}]$$

$\hat{\mathfrak g}_1^* \subset \hat{\mathfrak g}^*$

лин. функц. на K принимают знач. 1

$M : \hat{\mathfrak g}_1^* \longrightarrow \mathfrak n_+^*[t,t^{-1}]$ — ограничение



$$\left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 1 & * & * & * & * \\ & 1 & * & * & * \\ & & 1 & * & * \\ 0 & & & 1 & * \end{pmatrix} \right\} \Big/ N_+ \;=$$

действ. для $\mathfrak{g}_1^*$

$$= \left\{ d + \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 1 & * & * & * \\ & 1 & * & * \\ 0 & & 1 & * \end{pmatrix} dt \right\} \Big/ N_+ \;=$$

сопряж.

связн. $D^\times$
$\parallel$
$\operatorname{Spec}\mathbb{C}[[t,t^{-1}]]$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{связности на расслоении на } D^\times \text{ с флагом } 0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n \text{ — все рассл.} \\ \text{т.ч. } \nabla \mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_{i+1} \otimes \Omega^1 \\ \qquad \nabla \text{ инд. } \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i \otimes \Omega^1 \end{array} \right\}$$

$=:$ G-оперы на $D^\times$

опр.

Можно опр. $\mathrm{Op}_G(X)$

кривая

Теорема 1 $\quad Z_{\hat{\mathfrak{g}}} \simeq \mathrm{Fun}(\mathrm{Op}_{^LG}(D^\times))$

Теорема 2

глоб. диф. операт. на $\mathrm{Bun}_G(X)$

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} \mathcal{A}_\chi(z_1,\ldots,z_n) & \hookrightarrow & \operatorname{Spec} Z_{\hat{\mathfrak{g}}} \\ \wr\| & & \wr\| \\ \left\{ \begin{array}{l} {}^LG\text{-операм на } \mathbb{P}^1 \\ \text{с регул. особенностями} \\ \text{в точках } z_1,\ldots,z_n,\infty \end{array} \right\} & \hookrightarrow & \mathrm{Op}_{^LG}(D^\times) \end{array}$$

безмонодр.

Апендикс понятие спектра

$$\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$x_1 \mapsto \alpha_1, \quad \dots, \quad x_n \mapsto \alpha_n$$

$$\mathbb{A}^n = \mathrm{Spec}\,[x_1,\dots,x_n] \longleftarrow \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$$

$$\psi \qquad\qquad\qquad\qquad \shortparallel$$

$$(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \longleftarrow\!\shortmid \; p$$

$$A_\chi(z_1,\dots,z_n) \circlearrowright V_{\lambda_1}\otimes\dots\otimes V_{\lambda_n}$$

$$\shortparallel \qquad\qquad\qquad\qquad \psi$$

$$\mathbb{C}[H_1,\dots,H_n] \qquad\qquad v_\lambda$$

$$H_i v_\lambda = \lambda_i v_\lambda$$

$$\mathbb{C}[S_{b,(e)}] \twoheadrightarrow \mathbb{C}[H_1,\dots,H_n] \twoheadrightarrow \mathbb{C}$$

$$H_i \longmapsto \lambda_i$$

$$(\mu_{b,(e)}) \longleftarrow\!\shortmid (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \longleftarrow p$$

собст. вектор Годена

$\Updownarrow$

точка в $\mathrm{Spec}\, Z_{\hat{\mathfrak{g}}}$