- Замены переменных.

Пусть x_α - однородные координаты на G_+.

$$J^a \mapsto \sum P^a_\alpha(x)\,\partial_\alpha \text{ представление в } \mathbb{C}[G_+]$$

Другие координаты $\tilde{x}_\alpha = x_\alpha + X(x_{\beta<\alpha})$, $\tilde{\partial}_\alpha = \partial_\alpha + \sum D^\beta_\alpha(x)\,\partial_\beta$

$$J^a \mapsto \sum \tilde{P}^a_\alpha(x)\,\tilde{\partial}_\alpha \qquad \tilde{P}^a_\alpha = \sum_\beta P^a_\beta(x+X)\,D^\beta_\alpha$$

Аффинизация $J^a \mapsto \sum :P^a_\alpha(a^*(z))\,a_\alpha(z): + B^a(a^*(z), \partial a^*(z))$

можно заменить переменные

- Пример sl_3

- $$N_t = \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{12} \\ 0 & 1 & x_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{13}+x_{12}x_{23} \\ 0 & 1 & x_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_{12} & x_{13}+x_{12}x_{23} \\ 0 & 1 & x_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{12}+\varepsilon & x_{13}+x_{12}x_{23} \\ 0 & 1 & x_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad e_1 \mapsto \partial_{12} - x_{23}\partial_{13}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_{12} & x_{13}+x_{12}x_{23} \\ 0 & 1 & x_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & x_{13}+x_{12}x_{23}+x_{12}\varepsilon \\ 0 & 1 & x_{23}+\varepsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad e_2 \mapsto \partial_{23}$$

$$h_1 \mapsto -2x_{12}\partial_{12} - x_{13}\partial_{13} + x_{23}\partial_{23} \qquad h_2 \mapsto -2x_{23}\partial_{23} - x_{13}\partial_{13} + x_{12}\partial_{12}$$

- Другие координаты

$$N_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \tilde{x}_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{x}_{12} & \tilde{x}_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{x}_{12} & \tilde{x}_{13} \\ 0 & 1 & \tilde{x}_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x}_{12} = x_{12} \qquad \tilde{x}_{23} = x_{23} \qquad \tilde{x}_{13} = x_{13} + x_{12} x_{23}$$

$$\tilde{\partial}_{12} = \partial_{12} - x_{23}\partial_{13} \qquad \tilde{\partial}_{23} = \partial_{23} - x_{12}\partial_{13} \qquad \tilde{\partial}_{13} = \partial_{13}$$

$$e_1 \mapsto \tilde{\partial}_{12} \qquad e_2 \mapsto \tilde{\partial}_{23} + x_{12}\tilde{\partial}_{13}$$

$$h_1 \mapsto -2\tilde{x}_{12}\tilde{\partial}_{12} - \tilde{x}_{13}\tilde{\partial}_{13} + \tilde{x}_{23}\tilde{\partial}_{23} \qquad h_2 \mapsto -2\tilde{x}_{23}\tilde{\partial}_{23} - \tilde{x}_{13}\tilde{\partial}_{13} + \tilde{x}_{12}\tilde{\partial}_{12}$$

- Аффинно $e_1(z) = a_{12}(z) - a^*_{23}(z)\, a_{13}(z) = \tilde{a}_{12}(z)$

$$e_2(z) = a_{23}(z) = \tilde{a}_{23}(z) + a^*_{12}(z)\, a_{13}(z)$$

Замена переменных

$$\tilde{a}^*_{12} = a^*_{12} \qquad \tilde{a}^*_{23} = a^*_{23} \qquad \tilde{a}^*_{13} = a^*_{13} + a^*_{12} a^*_{23}$$

$$\tilde{a}_{12} = a_{12} - a^*_{23} a_{13} \qquad \tilde{a}_{23} = a_{23} - a^*_{12} a_{13} \qquad \tilde{a}_{13} = a_{13}$$

- Вертексные алгебры $M_{\diamond}$ и $\tilde{M}_{\diamond}$ изоморфны. Дают изоморфные модули Вакимото

- Индуктивная конструкция

$$G \to G_- \backslash G \to G_-G_0 \backslash G$$
$$\cup$$
$$G_0 \times G_+ \to G_+$$

У нас
$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h} \oplus \langle e_i, f_i \rangle$

Действие $\mathfrak{g}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d] & Vect(G_0 \times G_+) & \mathfrak{g} \arrow[r] & Vect(G_+) \\
\mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}[G_+] \oplus Vect(G_+) \arrow[ur, dotted] \arrow[urrr, dotted] & & &
\end{tikzcd}$$

<u>Пример</u> sl_3 $\qquad \mathfrak{g}_0 = \langle \bar{e}_1, \bar{f}_1, \bar{h}_1, \bar{h}_2 \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{13} \\ 0 & 1 & x_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{13} - \varepsilon x_{23} \\ 0 & 1 & x_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad e_1 \mapsto \bar{e}_1 - x_{23} \partial_{13}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{13} \\ 0 & 1 & x_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{13} \\ 0 & 1 & x_{23} + \varepsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad e_2 \mapsto \partial_{23}$$

$h_1 \mapsto \bar{h}_1 - x_{13}\partial_{13} + x_{23}\partial_{23}$ $\qquad$ $h_2 \mapsto \bar{h}_2 - x_{13}\partial_{13} - 2x_{23}\partial_{23}$

Аффинизируя $\quad e_1(z) \mapsto \bar{e}_1(z) - a^*_{23}(z)a_{13}(z) \mapsto a_{12}(z) - a^*_{13}(z)\,a_{23}(z)$

$e_2(z) \mapsto a_{23}(z) \mapsto a_{23}(z)$

Скрининг I рода — $\int S_1(z)dz = \int e^{-\frac{1}{\varkappa}(\alpha_1, \varphi(z))} a_{12}(z)dz$ — коммутирует с $\widehat{sl}_2$ и $a_{13}, a_{23}, a^*_{13}, a^*_{23}$

II рода — $\int \tilde{S}_1(z)dz = \int e^{(\alpha^\vee_1, \varphi(z))} a_{12}^{-\varkappa}(z)dz$

$\alpha^\vee_1$ — кокорень

- Замеч $\quad a_{12}$ — это $-e^L_1$ — это инвариантная формула, верна в любой системе координат

$$\begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{12} \\ 0 & 1 & x_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{12}-\varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{12} \\ 0 & 1 & x_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

После замены переменных $\quad -e^L_1 = \tilde{a}_{12} + \tilde{a}^*_{23}\,\tilde{a}_{12}$

Для второго скрининга берем другие координаты

$e_1 \mapsto \tilde{\partial}_{12}$ $\qquad$ $e_2 \mapsto \tilde{\partial}_{23} + \tilde{x}_{12}\tilde{\partial}_{13} = \bar{e}_2 + \tilde{x}_{12}\tilde{\partial}_{13}$

$\tilde{h}_1 \mapsto 2\tilde{x}_{12}\tilde{\partial}_{12} - \tilde{x}_{13}\tilde{\partial}_{13} + \tilde{x}_{23}\tilde{\partial}_{23} = \bar{h}_1 - 2\tilde{x}_{12}\bar{\partial}_{12} - \tilde{x}_{13}\tilde{\partial}_{13}$

$\tilde{h}_2 \mapsto 2\tilde{x}_{23}\tilde{\partial}_{23} - \tilde{x}_{13}\tilde{\partial}_{13} + \tilde{x}_{12}\tilde{\partial}_{12} = \bar{h}_2 - 2\tilde{x}_{23}\bar{\partial}_{23} - \tilde{x}_{13}\tilde{\partial}_{13}$

$$\begin{tikzcd}
V_{k_c}(\mathfrak{g}) \arrow[r] \arrow[dr] & V_{k_{c_0}}(\mathfrak{g}_0) \otimes M_{\mathfrak{g}_+} \arrow[d] \\
 & \pi \otimes M_{\mathfrak{g}_0} \otimes M_{\mathfrak{g}_+}
\end{tikzcd}$$

Скрининг I рода — $S_2(z) = e^{-\frac{1}{\varkappa}(\alpha_2, \varphi(z))}\tilde{a}_{23}(z) = e^{-\frac{1}{\varkappa}(\alpha_2, \varphi(z))}(-e_2^L(z))$

II рода — $\tilde{S}_2(z) = e^{(\alpha_2^\vee, \varphi(z))}\tilde{a}_{23}^{-\varkappa}(z) = e^{(\alpha_2^\vee, \varphi(z))}(-e_2^L(z))^{-\varkappa}$

<u>Теор</u> Образ $V_{k_c}(\mathfrak{g}) \subset W_{0,k_c}$ лежит в ядре $\tilde{S}_i = \oint e^{(\alpha_i^\vee, \varphi(z))}(e_i^L(z))^{-\varkappa} dz$

Бозонизация зависит от i

Центр на критическом уровне

Опр $\mathfrak{z}(\hat{\mathfrak{g}})$ — центр вертексной алгебры $V_{k_c}(\mathfrak{g})$

Т.е это $w \in V_{k_c}(\mathfrak{g})$ т.ч. $Y(w,z)$ коммут. с $\forall$ $Y(w',z')$

$\Updownarrow$

$w \in V_{k_c}(\mathfrak{g})$ т.ч. $Y(w,z)$ коммут. с $\forall$ $J^a(z')$

$\Updownarrow$

$w \in V_{k_c}(\mathfrak{g})$ т.ч. $J^a_n w = 0 \quad n \geq 0$

$\Updownarrow$

$w \in V_{k_c}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}[[t]]}$

Пример $w = \sum J_{a,-1} J^a_{-1} |vac\rangle$ — Сугавара

$$Y(w,z) = \sum :J^a(z) J_a(z):$$

Общий план

Шаг 1 $V_{k_c}(\mathfrak{g}) \longrightarrow M_{\mathfrak{g}} \otimes \pi_0$ — вложение

отобр. Вакимото

Шаг 2 Образ $\mathfrak{z}(\hat{\mathfrak{g}})$ лежит в π_0

Замеч $\pi_0 = \mathfrak{z}(M_{\mathfrak{g}} \otimes \pi_0)$

Шаг 3 Образ $\mathfrak{z}(\hat{\mathfrak{g}}) \subset \bigcap \operatorname{Ker} \overline{V}_i[1]$,

где $\overline{V}_i[1] = \overline{S}_i \big|_{\pi_0}$ $\quad$ $\overline{S}_i$ — $k \to k_c$ предел $\tilde{S}_i$

Шаг 4 $\mathfrak{z}(\hat{\mathfrak{g}}) = W_{c\ell}({}^L\mathfrak{g}) = \operatorname{Fun} Op_{{}^L\mathfrak{g}}(D)$ = алгебра многочленов

Найдем характер

Ленглендс двойств алгебра

оперы

Шаг 1 $V_{k_c}(\mathfrak{g}) \longrightarrow M_{\mathfrak{g}} \otimes \pi_0$ — вложение

Лемма $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{Diff}(N_+) \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ — вложение

Идея д-ва Классический предел

$S(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}[T^*N_+] \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ вложение

двойств к $\underline{\mathfrak{g}} \longleftarrow T^*N_+ \times \mathfrak{h} = N_+ \times \mathfrak{n}_+^* \times \mathfrak{h} = N_+ \times \mathfrak{b}_-$

$g_+(\beta_0+\beta_-)g_+^{-1} \longleftarrow (g_+, \beta_0+\beta_-)$

отобр $1 \longleftrightarrow 1$ на откр. плот. множ.

$\square$

В аффинном случае

- Сводим к классическому случаю
- Аргумент с джетами

Шаг 2 Образ $\mathfrak{Z}(\hat{\mathfrak{g}})$ лежит в π_0

Идея д-ва. Шаг 1 В $M_{\hat{\mathfrak{g}}} \otimes \pi_0$ есть базис вида

$$\prod b_{i_a, l_a} \prod e^L_{\beta_b, m_b} \prod a^*_{\alpha_c, n_c} |vac\rangle$$

генераторы левого действия

(используется "треугольность" перехода от a_2 к e^L_2)

Шаг 2 Образ $\mathfrak{Z}(\hat{\mathfrak{g}})$ инвариантен относительно $n_+[[t]]$,
Операторы $b_{i,n}$, $e^L_{\beta,m}$ коммутируют с $n_+[[t]]$
Действие $n_+[[t]]$ на $\mathbb{C}[a^*_{\alpha,n}]vac$ косвободно.
Значит образ $\mathfrak{Z}(\hat{\mathfrak{g}})$ порожден $\prod b_{i_a, n_a} \prod e^L_{\beta_b, m_b} |vac\rangle$

Шаг 3 Образ $\mathfrak{Z}(\hat{\mathfrak{g}})$ имеет вес 0 по $\mathfrak{h}$.
Операторы $b_{i,n}$ имеют вес 0
$e^L_{\beta,m}$ имеют вес <0 $\Rightarrow$ образ $\mathfrak{Z}(\hat{\mathfrak{g}})$ порожден $\prod b_{i_a, n_a} |vac\rangle$

$\square$

Шаг 3   Для $\mathfrak{sl}_2$

$$\tilde S(z) = :\exp\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{b_n}{n} z^{-n}\Big)\ \exp\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varkappa \frac{p_n+q_n}{-n} z^{n}\Big):$$ нулевые моды

$$\varkappa = k + k_c$$

$\oint \tilde S(z)\,dz$ – степени 1.

$$[b_n, b_m] = n\varkappa\, \delta_{n+m,0}$$

Обозн $\bar V[n]$ через $\sum_{n\geq 0} \bar V[-n] z^n = \exp\Big(\sum_{n>0} \frac{b_{-n}}{n} z^n\Big)$

операторы рождения

Тогда

$$\bar S w = \underbrace{b_1 w}_{\sim\varkappa} + \bar V[-1]\big(\underbrace{b_2}_{\sim\varkappa} + \underbrace{b_1^2}_{\sim\varkappa^2}\big) w + V[-2]\ \big(\underbrace{b_1^3}_{\sim\varkappa^3} + \underbrace{b_1 b_2}_{\sim\varkappa^2} + \underbrace{b_3}_{\sim\varkappa}\big) w$$

$$+ \underbrace{\varkappa(p_1+q_1)}_{\sim\varkappa} w + \varkappa V[-1]\big(\underbrace{(p_2+q_2)}_{\sim\varkappa} + \underbrace{(p_1+q_1)^2}_{\sim\varkappa^2}\big) w + \ldots$$

В лидирующем порядке по $\varkappa$.

$$= \sum_{n\geq 0} \bar V[-n]\, b_{n+1} + \sum_{n\geq 0} \bar V[-n] (p_{n+1} + q_{n+1})$$

Следств. В ограничении на π_0 предел $\int \bar{S}(z)dz$ равен $\sum \bar{V}[-n]\, b_{n+1}$

- Для произвольной Δ

Предл. В ограничении на π_0 предел $\int S_i(z)dz$ равен $\sum V_i[-n]\, b_{i,n+1}$ где

$$V_{i,-n} = \exp\left(\sum \frac{b_{i,-n}}{-n} z^n\right) \qquad [b_{j,n}, b_{i,m}] = a_{ji}\,\delta_{n+m}$$

Транспонированная матр Картана, т.к. кокорни $\alpha_i^\vee$