

$PGL(2)$ Оперы на $\mathcal{D}^*$ - нумассонова структура

$$\bullet L = k \partial_z + \begin{pmatrix} h(z)/2 & f(z) \\ e(z) & -h(z)/2 \end{pmatrix} = k \partial_z + A$$

$$e(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e_n z^{-n-1}, \quad f(z) = \sum f_n z^{-n-1}, \quad h(z) = \sum h_n z^{-n-1}$$

$$\{L\} \subset (\widehat{S\ell_2})^*_R \quad \text{Скобка Костанта - Карумов}$$

$$\text{ВНО} \quad \{e(z), e(w)\} = 0 = \{f(z), f(w)\}$$

$$\{e(z), f(w)\} = h(w) \delta(z, w) + k \partial_w \delta(z, w)$$

$$\{h(z), e(w)\} = 2e(w) \delta(z, w)$$

$$\{h(z), f(w)\} = -2f(w) \delta(z, w)$$

$$\{h(z), h(w)\} = 2k \partial_w \delta(z, w)$$

$$\delta(z, w) = \sum_{a+b=-1} z^a w^b$$

$$\phi(z) \delta(z, w) = \phi(w) \delta(z, w)$$

Пример $\{e_n, f_m\} = h_{n+m} + nk \delta_{n+m,0}$

• Пр-во операторов $\{L \mid e(z) = 1\} / \hat{N}$

$$\hat{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Замеч Действие
Гамильтоново

$\hat{N}$ на $\{L\}$

$$L(z) = \sum L_n z^{-n}$$

Канон. преобр

$$L \mapsto g L g^{-1}$$

$$A \mapsto g A g^{-1} - k g' g^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h/2 & F \\ e & -h/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 0 & 2' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{h}{2} + 2e & F - 2h - 2'k - 2^2 e \\ e & -\frac{h}{2} - 2e \end{pmatrix}$$

Гамильтониан

$$H = \sum \alpha_{-m} e_m \quad \text{соотв.} \quad \begin{pmatrix} 0 & \sum \alpha_n \bar{z}^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \hat{\mathfrak{h}}$$

$e(z) : \{L\} \rightarrow \hat{\mathfrak{h}}^*$ — отобра моментоб

$$\hat{\mathfrak{h}} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & \bar{z}^{-n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\hat{\mathfrak{h}}^* \simeq \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{z}^{n-1} & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \bar{z}^{-n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow H \begin{pmatrix} 0 & \bar{z}^{-n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_n$$

$$L \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e(z) & 0 \end{pmatrix}$$

Пример

$$f_n \bar{z}^{-n-1} \mapsto \bar{z}^{-n-1} \left(f_n - \sum \alpha_{-m} h_{n+m} + n \alpha_n k \right)$$

$$\{f_n, H\} = \sum \alpha_{-m} (-h_{n+m}) + n \alpha_n k$$

$$\bullet \quad \left(\partial_z + \begin{pmatrix} h/2 & f \\ 1 & -h/2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} k\psi_1' + \frac{\hbar}{2}\psi_1 + f\psi_2 = 0 \\ k\psi_2' + \psi_1 - \frac{\hbar}{2}\psi_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k(\frac{\hbar}{2}\psi_2 - \psi_2'k)' + \frac{\hbar}{2}(\frac{\hbar}{2}\psi_2 - \psi_2'k) + f\psi_2 = 0 \\ \psi_1 = \frac{\hbar}{2}\psi_2 - \psi_2'k \end{cases}$$

$$-k^2\psi_2'' + \psi_2\left(\frac{\hbar^2}{4} + k\frac{\hbar'}{2} + f\right) = 0$$

— координата на прав оператор

$$t(z) = \frac{\hbar^2}{4} + k\frac{\hbar'}{2} + f = \sum t_n \bar{z}^{-n-2} \text{ инварианта относительно } \hat{N}$$

- Любой опер однозначно приводится к виду

$$k\partial_z + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\frac{\hbar^2}{4} + k\frac{\hbar'}{2} + f$ — похоже на Казимир $e(z) \rightarrow 1$

$$\{t(z), t(w)\} = \left\{ f(z) + \frac{1}{4} h^2(z) + \frac{k}{2} h'(z), \quad f(w) + \frac{1}{4} h^2(w) + \frac{k}{2} h'(w) \right\}$$

$$= f(w)h(w)\delta(z,w) + k \partial_w (f(w)\delta(z,w)) - h(z)f(w)\delta(z,w) + \frac{k}{2} h(z)h(w)\partial_w \delta(z,w) + \frac{k^2}{2} \partial_w (h(z)\partial_w \delta(z,w)) - k \partial_z (f(w)\delta(z,w)) + \frac{k^2}{2} \partial_z (h(w)\partial_w \delta(z,w)) + \frac{k^3}{2} \partial_z \partial_w \partial_w \delta(z,w)$$

$$= -\frac{k^3}{2} \partial_w^3 \delta(z,w)$$

$$h(z) \partial_w \delta(z,w) = (h(w) + (z-w)h'(w) + \dots) \delta_w'(z-w)$$

$$+ \partial_w \delta(z,w) \left(2kf(w) + \frac{k}{2} h(w)^2 + k^2 h'(w) \partial_w \delta(z,w) \right)$$

$$+ \delta(z,w) \left(kf'(w) + \frac{k}{2} h(w)h'(w) + \frac{k^2}{2} h''(w) \right)$$

$$= -\frac{k^3}{2} \partial_w^3 \delta(z,w) + 2k t(w) \partial_w \delta(z,w) + k t'(w) \delta(z,w)$$

$$\{t_n, t_m\} = k(n-m) t_{n+m} - \frac{k^3}{2} \delta_{n+m,0} \frac{n^3-n}{12} \quad \text{Баракорд}$$

Рескампировка генераторов + рескампировка
слюбка $\rightarrow$ убирает константы

$$\left(\frac{S(Sl_2)}{(p(z)-1)} \right)^{\nearrow}$$

$$\downarrow \\ [t(z)]$$