13 ноября 2020 г. 14:39

<u>Опр</u> Проективный модуль P —

$\forall N, M$

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\ & P \arrow[u, "\phi"'] \arrow[ul, dashed, "\exists"] & \end{tikzcd}$$

<u>Пример</u> Свободный модуль проективен

<u>Опр</u> Инъективный модуль I:

$\forall N, M$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & M \arrow[dl, dashed, "\exists"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

<u>Опр</u> Проективная резольвента модуля M

$P_\bullet(M): \ldots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to 0$, $\quad H_i = 0,\ i \neq 0$, $\quad H_0 = M$

проективные модули

<u>Опр</u> Инъективная резольвента M:

$I^\bullet(M): \quad 0 \to I^0 \to I^1 \to \ldots$ $\quad H^i = 0,\ i \neq 0$, $\quad H^0 = M$

<u>Опр</u> 1) Если F – точный справа функтор, то L^iF называется левым произв. функтором, если

$$L^iF(M) = H_i(F(P_\bullet(M)))$$

2) Если F – точный слева

$$R^iF(M) = H^i(F(I^\bullet(M)))$$

<u>Ext и Tor</u>

О... $Ext^i(M,N) = R^iF(N)$

Опр 1) $\mathrm{Ext}^i(M,N) = R^iF(N)$
где $F(N) = \mathrm{Hom}(M,N)$

2) $\mathrm{Ext}^i(M,N) = L^iF(M)$,
где $F(M) - \mathrm{Hom}(M,N)$

Утв Опр-е 1 и 2 эквивалентны

То же самое для Tor

1) $\mathrm{Tor}^i(M,N) = L^iF(N)$
$F(N) = M \otimes_A N$

2) $\mathrm{Tor}^i(M,N) = L^iF(M)$
$F(M) = M \otimes_A N$

Утв (1) = (2)

Когомологии алгебр Ли

Опр $H^\bullet(\mathfrak{g}, M) = R^\bullet(\mathrm{Inv}(M))$

$\mathrm{Inv}\, M \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathbb{C}, M)$, $\mathbb{C}$ — тривиальный модуль

$\mathrm{Inv}\, M = \left\{ x \,\middle|\, \begin{matrix} x \in M \\ \mathfrak{g}x = 0 \end{matrix} \right\}$

Предл $H^\bullet(\mathfrak{g}, M) = \mathrm{Ext}^\bullet(\mathbb{C}, M) = L^\bullet F(\mathbb{C})$
$F(N) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(N, M)$

Следствие
$H^\bullet(\mathfrak{g}, M) = H^\bullet(\mathrm{Hom}(P^\bullet, M))$, где $P^\bullet$

$H(\mathfrak{g}, M) = H(\mathrm{Hom}(P, M))$, где P ← проективная резольвента для $\mathbb{C}$

<u>Утв</u> Проективной резольвентой трив. модуля $\mathbb{C}$ является гомологический комплекс Шевалле с модулем $M = U(\mathfrak{g})$, в смысле действия слева

<u>Опр</u> гомол. компл. Шевалле для M:

$$\Lambda^k\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{C}} M \xrightarrow{d} \Lambda^{k-1}\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{C}} M \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Lambda^0\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{C}} M \to 0$$

$$d(X_1\wedge\dots\wedge X_k\otimes m) = \sum(-1)^{j-1} X_1\wedge\dots\wedge\hat{X}_j\wedge\dots\wedge X_k\otimes \underbrace{X_j m}_{\cap\, U_{i-k+1}(\mathfrak{g})}$$

$d^2 = 0$ $\quad \Lambda^k\mathfrak{g}\otimes U_{i-k}(\mathfrak{g})$ $\quad + \sum(-1)^{i+j-1}[X_i, X_j]\wedge X_1\dots\hat{X}_i\wedge\dots\wedge\hat{X}_j\dots X_k\otimes \underbrace{m}$

$\Lambda^{k-1}\mathfrak{g}\otimes U_{i-k}(\mathfrak{g})$ $\cap$ $U_{i-k+1}(\mathfrak{g})$

<u>Док-во утв-а</u> 1) <u>Гомологический комплекс Шевалле</u> при $M = U(\mathfrak{g})$ — комплекс $\mathfrak{g}$-модулей

це действие $\mathfrak{g}$: происходит на 2ую компоненту!

$X \in \mathfrak{g}$: $\quad X\cdot(X_1\wedge\dots X_k\otimes m) = -X_1\wedge\dots\wedge X_k\otimes(m\cdot X)$; поэтому d коммут с действием

2) Почему это проективные модули? потому, что свободные!

3) а) вычислить гомологии Кошуля

б) показать, что они такие же как и у Шевалле с $U(\mathfrak{g})$

а) <u>Опр</u> комплекс Кошуля $K_i = \Lambda^i\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}[x_1\dots x_n]$

Опр

$$K_i = \underbrace{\Lambda^i \mathbb{C}^n}_{=\mathbb{C}[\xi_1\dots\xi_n]} \otimes \mathbb{C}[x_1\dots x_n]$$

$$d: K_i \to K_{i-1} \qquad K_\bullet = \bigoplus_j K_\bullet[j]$$

$$d = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \qquad K_\bullet[j] = \bigoplus_{m=0} \Lambda^m \mathbb{C}^n \otimes \underline{\underline{S^{j-m}\mathbb{C}^n}}$$

гомологии этого комплекса:

$$H_0(K_\bullet) = \mathbb{C}, \quad H_i(K_\bullet) = 0, \ i \neq 0.$$

единств. град.

$$H_0(K_\bullet[0]) = \underline{\underline{\mathbb{C}}}, \qquad H(K_\bullet[j]) = 0, \ j \neq 0$$

б) Сведем комплекс $C^\bullet$ к комплексу $K^\bullet$

$$C^\bullet = \bigcup_{i=1}^{\infty} C^\bullet[i], \qquad C[0] \subset C[1] \subset C[2] \subset \dots$$

$$C^\bullet[i] = \bigoplus_{j=0}^{i} \Lambda^j \mathfrak{g} \otimes U_{i-j}(\mathfrak{g})$$

ПБВ-фильтрация в $U(\mathfrak{g})$

$$d: \Lambda^j \mathfrak{g} \otimes U_{i-j}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \Lambda^{j-1}\mathfrak{g} \otimes U_{i-j+1}(\mathfrak{g})$$

$$C^\bullet[i] \supset C^\bullet[i-1]$$

I. $$C^\bullet[i] / C^\bullet[i-1] = K[i] := \bigoplus_{j=0} \Lambda^j \mathfrak{g} \otimes S^{i-j}\mathfrak{g}$$

ПБВ + совпадение диф-ла

$$\Lambda^n \mathfrak{g} \otimes U_k(\mathfrak{g}) / _{\Lambda^n \mathfrak{g} \otimes U_{k-1}(\mathfrak{g})} \xrightarrow{d} \Lambda^{n-1}\mathfrak{g} \otimes U_{k+1}(\mathfrak{g}) / \Lambda^{n-1}\mathfrak{g} \otimes U_k(\mathfrak{g})$$

$$d(x_1 \wedge \dots \wedge x_n \otimes m) = \sum (-1)^{j-1} x_1 \wedge \dots \wedge \hat{x}_j \wedge \dots \wedge x_n \otimes x_j m$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j-1} [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \dots \wedge \hat{x}_i \wedge \dots \wedge \hat{x}_j \wedge \dots \wedge x_n \otimes m$$

II. Лемма $\quad C \supset D, \ H(C/D) = 0$

II. Лемма $\quad C \supset D, \; H(C/D)=0$

$$\Downarrow$$

$$H(C) = H(D)$$

Док-во

$$0 \to D \to C \to C/D \to 0$$

$$\Downarrow$$

длинная когомологиях

$$H^{i-1}(\underbrace{C/D}_{=0}) \to H^i(D) \to H^i(C) \to H^i(\underbrace{C/D}_{=0}) \to H^{i+1}(D) \to \dots$$

$$H^i(D) = H^i(C)$$

Применение

$$H(C[0]) = \mathbb{C}$$

пом. ком-к Шевалле

$$C[0] = K[0] = \mathbb{C}$$

$$H(C[1]/C[0]) = H(K[1]) = 0$$

$\Downarrow$ по лемме

$$H(C[1]) = H(C[0])$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{H(C[i]) = H(C[0])}$$

III. $\quad C = \bigcup_{i=0}^{\infty} C[i]$

$$H(C) \ni [x] \qquad x \in \underline{C[i]}$$

$$\Downarrow$$

$[x] \leftarrow$ будет гомологией в $H(C[i])$

$$H(C) = H(C[0]) = \mathbb{C}$$

в $H(C[i])$

$$H(C) = H(C[0]) = \mathbb{C}$$

$H_0(C) = \mathbb{C}$

$H_i(C) = 0,\ i \neq 0$

Теорема (эк-в-сть 2 опр-й)

$$H^{\circ}(\mathfrak{g}, M) \overset{= \mathrm{Ext}^{\circ}(\mathbb{C}, M)}{=} H^i(F(P^{\circ})) = H^i(C^{\circ})$$

$F(P^i) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(P^i, M)$

P^i — проект. резольвента трив. модуля

Когомол-ский комплекс Шевалле

Док-во

$$\dots \to \Lambda^1\mathfrak{g} \otimes U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{d} \Lambda^0\mathfrak{g} \otimes U(\mathfrak{g}) \to 0$$

$$\downarrow F \qquad\qquad \downarrow F$$

$$\leftarrow \Lambda^1\mathfrak{g}^* \otimes M \xleftarrow{F(d)} \Lambda^0\mathfrak{g}^* \otimes M \leftarrow 0$$

Лемма

$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(U(\mathfrak{g}), M) \cong$

$\cong M$

Диф-л из Гом. к. Шевалле $\longrightarrow$ Диф-л. из ког. к Шевалле

Гомо

$$d(x_1 \wedge \dots \wedge x_n \otimes m) = \sum (-1)^{j-1} x_1 \wedge \dots \wedge \hat{x}_j \wedge \dots \wedge x_n \otimes x_j m + \sum_{i<j} (-1)^{i+j-1} [x_i, x_j] \wedge \dots \wedge \hat{x}_i \wedge \dots \wedge \hat{x}_j \dots \otimes m$$

$\downarrow$ применение Hom

Когомо

$$d(\omega(x_1 \wedge \dots \wedge x_n)) = \sum (-1)^{j-1} (x_j \omega)(x_1 \dots \wedge \hat{x}_j \wedge \dots x_n) + \dots$$
$$+ \sum (-1)^{i+j-1} \omega([x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \dots \wedge \hat{x}_i \wedge \hat{x}_j \dots \wedge x_n)$$

Когомологии Нильпотентных алгебр

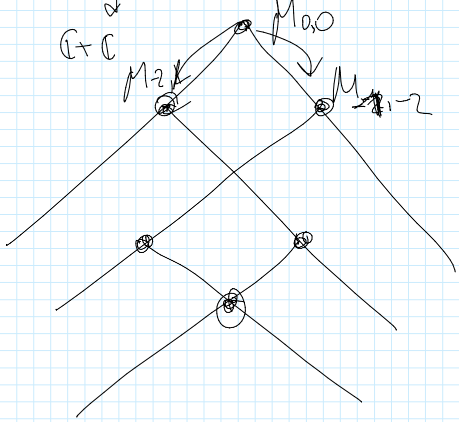
Утв $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g} \leftarrow$ полупростая ($\mathfrak{sl}_3$)

$$H_0(n_-, \mathbb{C}) = H_3(n_-, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$$
$$H_2(n_-, \mathbb{C}) = H_1(n_-, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^2$$

<u>Упр</u> резольвента

$$0 \to M_{-2,-2} \to M_{-3,0} \oplus M_{0,-3} \to M_{-2,1} \oplus M_{1,-2} \to M_{0,0} \to 0$$

$$\begin{array}{cccc} M_{-2,-2} & M_{-3,0} \oplus M_{0,-3} & M_{-2,1} \oplus M_{1,-2} & M_{0,0} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow F & \downarrow F \\ \mathbb{C} & \mathbb{C}+\mathbb{C} & \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{array}$$



$$\mathrm{Hom}(\underbrace{U(a)}_{= M_\lambda}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$$

$$H^k(n_-, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{|\{w \mid \ell(w) = k\}|}$$

$$\dots \to \bigoplus_{\ell(w)=2} M_{w(\rho)-\rho} \to \bigoplus_{\ell(w)=1} M_{w(\rho)-\rho} \to M_0 \to 0$$