

План

1. Комплекс де Рама для G
2. Кокогомоли с коэф-тами в модуле
3. кокогомоли простых алгебр
4. Резольвента, производный функтор
5. кокогомоли как произв. функтор
6. кокогомоли коммутативных алгебр

Комплекс де Рама

Знаем
 \mathcal{A}_G - алгебра для соотв. гр G
 алгебра левоинвар. вект. полей на G

Предл 1 Комплекс де Рама

$$d: \Lambda^{n-1} \mathcal{A}_G^* \otimes C^\infty(G) \rightarrow \Lambda^n \mathcal{A}_G^* \otimes C^\infty(G)$$

$$d\omega(x_1, \dots, x_n) = \sum_j (-1)^{j-1} x_j (\omega(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n)) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j-1} \omega([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n)$$

↑
между x_i, x_j

Кокогомоли с коэф-тами в модуле

Опр Кокогомоли алгебры \mathcal{A} на \mathcal{A}_G с коэф. в \mathcal{A} -модуле

$H^i(\mathcal{A}_G, M)$ - кокогомоли комплекса Шевале

Опр комплекс Шевале

$$C^i = \Lambda^i \mathcal{A}_G^* \otimes M$$

$$d(\omega \otimes m)(x_1, \dots, x_n) = \sum_j (-1)^{j-1} \omega(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n) \otimes x_j m + \sum_{i < j} (-1)^{i+j-1} \omega([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n) \otimes m$$

$$+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j-1} \omega([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n) \text{ от}$$

Замерами при $M = C^\infty(G)$ являются Мезане
становятся комплексом де Рама

Коромологией компактной алгебры Ли \mathfrak{g}

Предложение $H(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) \cong H_{dR} G = (\wedge \mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$
 \mathfrak{g} — компактная алгебра Ли
 G — связная компактная группа
 доказано
 1) удерживать де Рама
 2) $d=0$ после удерживания

Док-во

$$\dots \rightarrow \wedge^k \mathfrak{g}^* \otimes C^\infty(G) \xrightarrow{d} \wedge^{k+1} \mathfrak{g}^* \otimes C^\infty(G) \rightarrow \dots$$

$$\downarrow \rho \quad \uparrow i \quad \downarrow \rho \quad \uparrow i$$

$$\rightarrow \wedge^k \mathfrak{g}^* \xrightarrow{d} \wedge^{k+1} \mathfrak{g}^* \rightarrow$$

$$\rho(w) = \int_G dg \lambda_g^*(w)$$

$\int_G dg = 1$
 $\lambda_e = Id : G \rightarrow G$
 $\lambda_g : G \rightarrow G$

$$\lambda_g^*(w) = [w]$$

- 1) $\rho \circ i = Id$ ← инв. форма при упр-и оставляет себя
- 2) $[i] \circ [\rho] = Id$

↑
 при удерживании все элементы имеют канонич. форму

$$[\rho] = [i]^{-1} \leftarrow \text{универсальное}$$

Пример $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \supset \mathfrak{su}_2$

$$SU(2) = G$$

$$H_{dR}(SU(2)) \cong H(\mathfrak{sl}_2, \mathbb{C}) = (\wedge \mathfrak{sl}_2^*)^{\mathfrak{sl}_2}$$

как $mn-1$
 $SU(2) \cong S^3$
 $H^0 \cong \mathbb{C}$
 $H^1 \cong \mathbb{C}$
 $H^2 \cong \mathbb{C}$
 $H^3 \cong \mathbb{C}$

$$\wedge^0 \mathfrak{sl}_2^* = \mathbb{C} \Rightarrow (\wedge^0 \mathfrak{sl}_2^*)^{\mathfrak{sl}_2} = \mathbb{C}$$

$$\wedge^1 \mathfrak{sl}_2^* = \mathbb{C}^3 \Rightarrow (\wedge^1 \mathfrak{sl}_2^*)^{\mathfrak{sl}_2} = 0$$

□

$$\cup V(2) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

$$\lambda^1 \mathfrak{sl}_2^* = \mathbb{P}^1 \Rightarrow (\lambda^1 \mathfrak{sl}_2^*)^2 = 0$$

$$\lambda^2 \mathfrak{sl}_2^* = \mathbb{P}^3 \Rightarrow 0$$

$$\lambda^3 \mathfrak{sl}_2^* = \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{C}$$

Лемма для любого алгебры \mathfrak{g}

$$H(\mathfrak{g}, M_1 \oplus M_2) = H(\mathfrak{g}, M_1) \oplus H(\mathfrak{g}, M_2)$$

Доказ. d - диагональная матрица

Пример 4 Рассмотрим попарно алгебры \mathfrak{g} с коэф. в V_λ - неприв. непривисимым \mathfrak{g} -м $\Rightarrow 0$

$$H(\mathfrak{g}, V_\lambda) = 0, \text{ если } \lambda \neq 0.$$

Доказ.

$$1) \mathbb{C}^\infty(\mathfrak{g}) \supset \underbrace{V_\lambda \otimes V_\lambda^*}_{\text{или}} = \text{End}(V_\lambda)$$

$$\chi_{ij}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\chi_{ij}(\mathfrak{g}) \leftarrow \text{соотв. матрицы}$$

$$\xi \in V_\lambda, \eta \in V_\lambda^* \rightarrow \eta R(\mathfrak{g}) \xi$$

2) вполне унитарность \mathfrak{g} на $\mathbb{C}^\infty(\mathfrak{g})$, т.к. инв. с.к. \mathfrak{g} -е.

$$3) \mathbb{C}^\infty(\mathfrak{g}) = \mathbb{C} \oplus V_\lambda \otimes V_\lambda^* \oplus M$$

$$H(\mathfrak{g}, \mathbb{C}^\infty(\mathfrak{g})) = H(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) \oplus H(\mathfrak{g}, V_\lambda \otimes V_\lambda^*) \oplus H(\mathfrak{g}, M)$$

равно

Теорема Компактная попарно алгебры \mathfrak{g} $H(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$

$$H(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) = \mathbb{C} [\xi_{2f-1}, \dots, \xi_{2k-1}]$$

где $\xi \dots$ - ортонормирующие переменные

f_i - степень i -ого кагандера

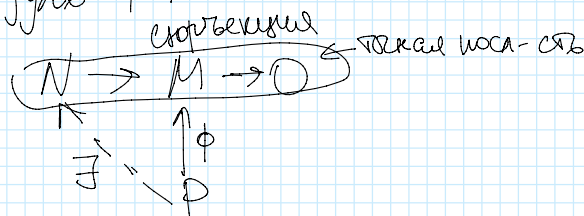
$$\mathfrak{sl}_n \quad f_1=2, f_2=3 \dots f_{n-1}=n$$

На примере \mathfrak{sl}_2 $C = e + f + \frac{1}{2}h^2$ $f_1=2$

$$H(\mathfrak{sl}_2, C) = \mathbb{C}[\xi_3] = \mathbb{C} + 0 + 0 + \mathbb{C}\xi_3$$

Резольвента и Производный функтор

Опр Проективный модуль P :



Пример Свободный модуль проективен

Опр Проективная резольвента - это комплекс \mathcal{M}

$$\rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow 0 \quad z \quad H_0 = M$$

$$H_i = 0, i \neq 0$$

Производный функтор

Опр Левый производный функтор $L^i F$ -

функтор, который строится по F , где F - точный функтор

$$M \longrightarrow H^i(F(P_\bullet(M)))$$

$$\text{Опр } \text{Ext}^i(M, N) = L^i F(N); \text{ где } F(M) = \underline{\text{Hom}}(M, N)$$

Теперь...

Теорема

Коксизомный алгебра для \mathfrak{g} :

$$H^i(\mathfrak{g}, M) \equiv \text{Ext}^i(\mathbb{C}, M)$$

Пример

Комплексы Кошны

$$K_i \equiv \underbrace{\Lambda^i \mathbb{R}^n}_{\text{дифференциалы}} \otimes \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$$

$$K_i \xrightarrow{d} K_{i-1}$$

$$d = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Умб

полностью тривиальными:

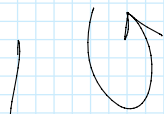
$$H_0 = \mathbb{R}, H_i = 0, i \neq 0$$

Док-во

$$v = \sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\Omega^k(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{L_v} \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$$

← ~~множители~~

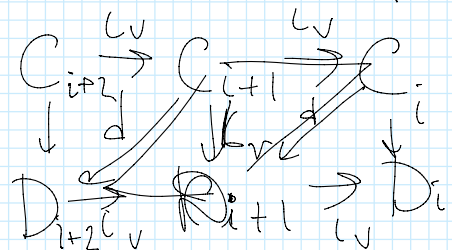


$L_v \leftarrow$ морфизм комплексов

расщепление $\rightarrow L_v = dL_v + L_v d \leftarrow$ гом-идеал Пуанкаре

$$\text{Если } [v, \omega] = 0 \text{ то } H_i \rightarrow 0 \subset H_i$$

$L_v \leftarrow$ коммутатор \circ отображение



Коксизомный комплекс Кошны \equiv

— морфизм комплексов \rightarrow морфизм комплексов \rightarrow морфизм комплексов \rightarrow морфизм комплексов

Корольковичи полиномика Кошине \Leftrightarrow
 = корольковичи ивб отн. раск. форму
 Каше есть ивб отн. раск. форму

$$\omega = x^n dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \xrightarrow{\lambda} \lambda^{n+k} \omega$$

\Downarrow инвариант только константы

Пример \mathbb{R} f -мех $f(x)$ - 0-форма
 $f(x)\xi$ - 1-форма
 $d = x \frac{\partial}{\partial x}$
 $d f(x) = 0$
 $d(f(x)\xi) = \underbrace{x f(x)} \leftarrow$ когда это 0?

$$0 \leftarrow \mathbb{C}[x] \xleftarrow{d_k} \mathbb{C}[x] \cdot \xi \leftarrow 0$$

$$H_0 = \mathbb{C}[x] / \text{Im } d_k \quad H_1 = \text{Ker } d_k$$

\parallel
 $\mathbb{C} \quad \quad \quad \mathbb{0}$

Свободная резольвента $P^\bullet(\mathbb{C})$ - в каждой степени $\mathbb{C}[x]$ -модуль

$$\text{Ext}^i(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = L^i F(\mathbb{C}) = H^i(F(P^\bullet(\mathbb{C})))$$

$$F(N) = \text{Hom}(M, N)$$

$$P^\bullet(\mathbb{C}): 0 \rightarrow \mathbb{C}[x] \xrightarrow{\cdot x} \mathbb{C}[x] \rightarrow 0$$

\downarrow как $\mathbb{C}[x]$ -модуль

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}[x]}(\mathbb{C}[x], \mathbb{C}) = \mathbb{C}$$

$$\mathbb{C}[x, y] / (x \cdot y)$$

$\text{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$

$$F(P^\bullet(\mathbb{C})): 0 \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{0} \mathbb{C} \rightarrow 0$$

$$H_1^0(F(P^\bullet(\mathbb{C}))) = H_1^0(F(P^\bullet(\mathbb{C}))) = \mathbb{C}$$

\parallel

$$\text{Ext}^0 \qquad \qquad \text{Ext}^1$$

$$\mathbb{C}[x, y] / (x \cdot y)$$

$$\text{Ext}^i(\mathbb{C}[x], \mathbb{C}[y])$$

$$g = \mathbb{C} \quad i, j = 0$$

$\mathbb{C}[x]$ - y-ideal. $\text{mod. } g$

$$H^0(\mathcal{O}_Y, \mathbb{C}) =$$

$$S^1$$

$$\mathbb{R}, \mathbb{R}$$

$$M \xrightarrow{\varphi} N$$

$$\text{Hom}(M, \mathbb{C}) \xleftarrow{\varphi^*} \text{Hom}(N, \mathbb{C})$$

$$\downarrow$$

$g: N \rightarrow \mathbb{C}$

$$g \circ \varphi \longleftarrow g$$