Доклад по когомологиям

6 ноября 2020 г. 14:30

План

1. Комплекс де Рама для G
2. Когомологии с коэф-тами в модуле
3. когомологии простых алгебр
4. Резольвента, производный функтор
5. когомологии как произв. функтор
6. когомологии нильпотентных алгебр

Комплекс де Рама

Замечание $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли соотв. гр G

алгебра левоинвар. век. полей на G

Предл 1 Комплекс де Рама

$$d: \Lambda^{n-1}\mathfrak{g}^* \otimes C^\infty(G) \to \Lambda^n \mathfrak{g}^* \otimes C^\infty(G)$$

$$d\omega(X_1\wedge\ldots\wedge X_n) = \sum_j (-1)^{j-1} X_j(\omega(X_1\wedge\ldots\wedge\hat{X}_j\wedge\ldots X_n)) +$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j-1}\omega([X_i,X_j]\wedge X_1 \ldots \wedge X_n)$$

нету X_i, X_j

Когомологии с коэф-тами в модуле

Опр Когомологиями алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с коэф. в $\mathfrak{g}$-модуле

$H^\bullet(\mathfrak{g}, M)$ – когомологии комплекса Шевале

Опр комплекс Шевале

$$C^i = \Lambda^i \mathfrak{g}^* \otimes M$$

$m \in M$

$$d(\omega\otimes m)(X_1\wedge\ldots\wedge X_n) = \sum_j (-1)^{j-1}\omega(X_1\ldots\wedge\hat{X}_j\wedge\ldots X_n)\otimes X_j m +$$

$$+ \sum (-1)^{i+j-1}\omega([X_i,X_j]\wedge X_1\ldots\wedge\hat{X}_i\wedge\ldots\wedge\hat{X}_j\wedge\ldots X_n)\otimes m$$

$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j-1}\,\omega([X_i,X_j]\wedge X_1\wedge\ldots\wedge\hat{X}_i\wedge\ldots\wedge\hat{X}_j\wedge\ldots X_n)\otimes m$$

Замечание при $M = C^\infty(G)$ комплекс Шевалле становится комплексом де Рама

Когомологии комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$

Предложение $H(\mathfrak{g},\mathbb{C}) \underset{\uparrow}{=} H_{dR}G \underset{\uparrow}{=} (\Lambda\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$

$\mathfrak{g}$ — комплексная комплексиф. ал. Ли вещесть. доказал

G — соотв. компактная группа

1) усреднить с G-стороны

2) $d=0$ после усреднения

Док-во

$$\begin{array}{ccccc}\ldots \to \Lambda^k\mathfrak{g}^*\otimes C^\infty(G) & \xrightarrow{d} & \Lambda^{k+1}\mathfrak{g}^*\otimes C^\infty(G) & \to & \ldots\\ p\downarrow\uparrow i & & p\downarrow\uparrow i & & \\ \to \Lambda^k\mathfrak{g}^* & \xrightarrow{d} & \Lambda^{k+1}\mathfrak{g}^* & \longrightarrow & \end{array}$$

$p(w) = \int_G dg\, \lambda_g^*(w)$

инв. мера Хаара

$\int_G dg = 1$

$\lambda_e = Id : G \to G$

$\lambda_g : G \to G$

$\underline{[\lambda_g^*(w)] = [w]}$

1) $p\circ i = Id \leftarrow$ инв. форма при уср-и остается собой

2) $[i]\circ[p] = Id$ (отоб. на когомол.)

при усреднении не меняется класс когомологий формы

$[p] = [i]^{-1} \leftarrow$ изоморфные

□

Пример $\mathfrak{g} = sl_2(\mathbb{C}) \supset su_2$

$$SU(2) = G$$

$$H_{dR}(SU(2)) \underset{\uparrow}{=} \underline{H(sl_2,\mathbb{C})} \underset{\uparrow}{=} (\Lambda sl_2^*)^{sl_2}$$

$\|$

как мн-е

$SU(2) \cong S^3$

$H^0 \quad H^1 \quad H^2 \quad H^3$

$\Lambda^0 sl_2^* = \mathbb{C} \Rightarrow (\Lambda^0 sl_2^*)^{sl_2} = \mathbb{C}$

$\Lambda^1 sl_2^* = \mathbb{C}^3 \Rightarrow (\Lambda^1 sl_2^*)^{sl_2} = 0$

$SU(2) - S$

$H^0 \quad H^1 \quad H^2 \quad H^3$

$\mathbb{C}, 0, 0, \mathbb{C}$

$\Lambda^1 sl_2^* = \mathbb{C}^3 \Rightarrow (\Lambda^1 sl_2^*)^{sl_2} = 0$

$\Lambda^2 sl_2^* = \mathbb{C}^3 \Rightarrow 0$

$\Lambda^3 sl_2^* = \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{C}$

Лемма g - любая алг. Ли

$$H(g, M_1 \oplus M_2) = H(g, M_1) \oplus H(g, M_2)$$

Док-во d - блочнодиагональная матрица.

Предл 4 Когомологии полупр. алгебры g с коэф. в V_λ - непр. нетривиальное пр-и $= 0$

$$H(g, V_\lambda) = 0, \text{ если } \lambda \neq 0.$$

Док-во

1) $C^\infty(G) \supset \underline{V_\lambda} \otimes V_\lambda^* = \mathrm{End}(V_\lambda)$

как представление

$x_{ij}: G \to \mathbb{C}$

$x_{ij}(G) \leftarrow$ соотв. матричный эл

$\xi \in V_\lambda, \eta \in V_\lambda^* \quad g \to \eta R(g) \xi$

2) вполне приводимость для $C^\infty(G)$, т.к. инв. ск. пр-е

3) $C^\infty(G) = \mathbb{C} \oplus V_\lambda \otimes V_\lambda^* \oplus M$

$V_0 \otimes V_0^*$ что-то

$$\boxed{H(g, C^\infty(G)) = H(g, \mathbb{C}) \oplus H(g, V_\lambda)^{\oplus \dim \lambda} \oplus H(g, M)}$$

равны

0

Теорема Когомологии полупростой алгебры Ли g $H(g, \mathbb{C})$

$$H(g, \mathbb{C}) = \mathbb{C}[\xi_{2f_1 - 1}, \dots \xi_{2f_k - 1}],$$

где $\xi_{\dots}$ — антикоммутирующие переменные

f_i — степень i-ого казимира

$$\mathfrak{sl}_n \qquad f_1=2,\ f_2=3 \dots f_{n-1}=n$$

<u>На примере $\mathfrak{sl}_2$</u> $\quad c = ef+fe+\frac{1}{2}h^2 \quad f_1=2$

$$H(\mathfrak{sl}_2,\mathbb{C}) = \mathbb{C}[\xi_3] = \underbrace{\mathbb{C}} + 0 + 0 + \underbrace{\mathbb{C}\xi_3}$$

Резольвента и производный функтор

<u>Опр</u> Проективный модуль P:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\text{сюръекция}"] & M \arrow[r] & 0 \\ & P \arrow[u, "\phi"'] \arrow[ul, dashed, "\exists"] & \end{tikzcd}$$

точная посл-сть

<u>Пример</u> Свободный модуль проективен

<u>Опр</u> Проективная резольвента модуля M — это комплекс

$$\to P_2 \to P_1 \to P_0 \to 0 \quad : \quad H_0 = M,\ H_i = 0,\ i \neq 0$$

Производный функтор

<u>Опр</u> Левый производный функтор L^iF — функтор, который строится по F, где F — точный справа

$$M \longrightarrow H^i(F(P_\bullet(M)))$$

<u>Опр</u> $Ext^i(M,N) = L^iF(N)$; где $F(M) = Hom(M,N)$

Теорема

Теорема
Когомологии алгебры Ли $\mathfrak{g}$:

$$H^i(\mathfrak{g}, M) = \mathrm{Ext}^i(\mathbb{C}, M)$$

Пример Комплекс Кошуля

$$K_i = \underbrace{\Lambda^i \mathbb{R}^n}\otimes \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$$

$$K_i \xrightarrow{d} K_{i-1} \xrightarrow{d}$$

$$d = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

Утв гомологии этого комплекса:

$$H_0 = \mathbb{R}, \quad H_i = 0, \ i \neq 0$$

Док-во $v = \underline{\sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i}}$

ι_v ← свертка

$$\Omega^k(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\iota_v} \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$$

← ~~по~~ полиномиальные

L_v ← морфизм комплексов

$L_v = d\iota_v + \iota_v d$ ← ι_v — гомотопное отображение

растяжение, диф-л де Рама

$\mathrm{Spec}[L_v] \ni H_i \to 0 \subset H_i$

$$\begin{tikzcd}
C_{i+2} \arrow[r, "\iota_v"] \arrow[d] & C_{i+1} \arrow[r, "\iota_v"] \arrow[d, "k_v"] \arrow[dl] & C_i \arrow[d] \arrow[dl] \\
D_{i+2} \arrow[r, "\iota_v"] & D_{i+1} \arrow[r, "\iota_v"] & D_i
\end{tikzcd}$$

Когомологии комплекса Кошуля =

= когомологии ... от растяжения форм

Когомологии комплекса Кошуля =
= когомологии инв. отн. растяжения форм

Какие есть инв отн. раст. формы

$\omega = x^n dx_{i_1} \wedge \ldots dx_{i_k} \overset{\lambda}{\to} \lambda^{n+k}\omega$

$\Downarrow$ инвариантны только константы

Пример $\mathbb{R}$ f - мн-н

$f(x)$ - 0-формы

$f(x)\xi$ - 1-формы

$d = x\frac{\partial}{\partial\xi}$

$d f(x) = 0$

$d(f(x)\xi) = \underbrace{x f(x)}$ ← когда это 0?

$$0 \leftarrow \mathbb{C}[x] \xleftarrow{d_k} \mathbb{C}[x]\cdot\xi \leftarrow 0$$

$H_0 = \mathbb{C}[x]/\operatorname{Im} d_k$ $\quad$ $H_1 = \operatorname{Ker} d_k$

$\quad \| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$

$\quad \mathbb{C} \qquad\qquad\qquad\qquad 0$

Свободная резольвента $P^\bullet(\mathbb{C})$ - в категории $\mathbb{C}[x]$-модулей

$$\operatorname{Ext}^i(\mathbb{C},\mathbb{C}) = L^i F(\mathbb{C}) = H^i(F(P^\bullet(\mathbb{C})))$$

$F(N) = \operatorname{Hom}(M, N)$

$$\underline{P^\bullet(\mathbb{C})}: 0 \to \mathbb{C}[x] \xrightarrow{\cdot x} \mathbb{C}[x] \to 0$$

$\Downarrow$ как $\mathbb{C}[x]$-модуль

$M, \underline{\mathbb{C}}$

$\operatorname{Hom}(\mathbb{C}[x], \mathbb{C}) = \mathbb{C}$

$\mathbb{C}[x,y]/(x,y)$

$\mathrm{Hom}(\mathbb{C}[x], \mathbb{C}) \quad \mathbb{C}$

$\mathbb{C}[x,y]/(x\cdot y)$

$F(P^\bullet(\mathbb{C})): 0 \to \mathbb{C} \xleftarrow{0} \mathbb{C} \to 0$

$\mathrm{Ext}^i(\mathbb{C}[x], \mathbb{C}[y])$

$\underset{\mathrm{Ext}^0}{\underset{\|}{H^0}}(F(P^\bullet(\mathbb{C}))) = \underset{\mathrm{Ext}^1}{\underset{\|}{H^1}}(F(P^\bullet(\mathbb{C}))) = \mathbb{C}$

$g = \mathbb{C} \quad [,] = 0$

$\mathbb{C}[x]$ унив. обер. g

$H^0(g, \mathbb{C}) =$

S^1

$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$

$M \xrightarrow{\varphi} N$

$\mathrm{Hom}(M, \mathbb{C}) \xleftarrow{F(\varphi)} \mathrm{Hom}(N, \mathbb{C})$

$\quad g: N \to \mathbb{C}$

$g \circ \varphi \longleftarrow\!\!\mid \; g$