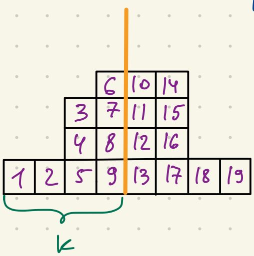
$Y_{n,\ell}(\sigma) \simeq W(\pi)$

- $\pi = (q_1, \dots, q_\ell)$ — пирамида, $n \geq \max(q_1, \dots, q_\ell)$
- $\sigma = (s_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ — матрица сдвигов, построенная по π.

$0 \leq k \leq \ell$: $q_1 \leq \dots \leq q_k$; $q_k \geq q_{k+1} \geq \dots \geq q_\ell$.

$$s_{ij} = \begin{cases} \#\{c = \overline{1,k} \mid i > n - q_c \geq j\}, & \text{если } i \geq j \\ \#\{c = \overline{k+1,\ell} \mid i \leq n - q_c < j\}, & \text{если } i \leq j. \end{cases}$$

$n = 6$, 2 пустые строки.

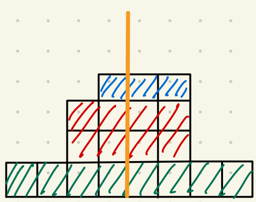


s_{ij} = # пустых клеток от конца (начала) i-ой (j-ой) строки до конца (начала) j-ой (i-ой) при $i \leq j$ ($i \geq j$).

- $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ — допустимое разбиение n то есть

$s_{i,j} = 0$ при $\lambda_1 + \dots + \lambda_{a-1} + 1 \leq i,j \leq \lambda_1 + \dots + \lambda_a$ =

= диагональные блоки размеров $\lambda_1 \times \lambda_1, \dots, \lambda_m \times \lambda_m$ лежат внутри нулевых диагональных блоков в σ.

$\pi =$ , $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & \boxed{0} & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 2 & \boxed{0} \end{pmatrix}$

размеры нулевых блоков = высоты прямоугольных блоков в π.

- $D^{(r)}_{a;i,j},\ E^{(r)}_{a;i,j},\ F^{(r)}_{a;i,j} \in Y_{n,l}(\sigma) \simeq \dfrac{Y_n(\sigma)}{\left(D^{(r)}_{1;i,j} \mid r > l - s_{1,n} - s_{n,1}\right)}$

Положим $\quad s_{a,b}(\nu) = s_{\nu_1+\dots+\nu_a,\ \nu_1+\dots+\nu_b}$

$$E^{(r)}_{a,b;i,j} = \left[E^{(r-s_{b-1,b}(\nu))}_{a,b-1;i,h},\ E^{(s_{b-1,b}(\nu)+1)}_{b-1;h,j}\right]$$

$1 \le h \le \nu_b$ ↑ любой

$E^{(r)}_{a,a+1;i,j} = E^{(r)}_{a;i,j}$ при
- $1 \le a < b \le m$
- $i = \overline{1,\nu_a}$, $j = \overline{1,\nu_b}$
- $r > s_{a,b}(\nu)$

$$F^{(r)}_{a,b;i,j} = \left[F^{(s_{b,b-1}(\nu)+1)}_{b-1;i,h},\ F^{(r-s_{b,b-1}(\nu))}_{a,b-1;h,j}\right]$$

$1 \le h \le \nu_b$ ↑ любой

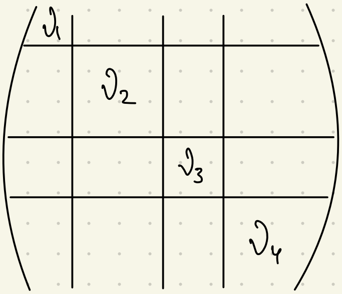
$F^{(r)}_{a,a+1;i,j} = F^{(r)}_{a;i,j}$ при
- $1 \le a < b \le m$
- $i = \overline{1,\nu_b}$, $j = \overline{1,\nu_a}$
- $r > s_{b,a}(\nu)$

$(p_1, \dots, p_n)$ — длины строк пирамиды π и

$p_a(\nu) = p_{\nu_1+\dots+\nu_a}$

Теорема Мономы от элементов
- $D^{(r)}_{a;i,j}$ при $0 < r \le p_a(\nu)$, $a = \overline{1,m}$; $i,j = \overline{1,\nu_a}$
- $E^{(r)}_{a,b;i,j}$ при $s_{a,b}(\nu) < r \le s_{a,b}(\nu) + p_a(\nu)$; $a < b$
- $F^{(r)}_{a,b;i,j}$ при $s_{b,a}(\nu) < r \le s_{b,a}(\nu) + p_a(\nu)$; $a < b$

взятые в любом (фиксированном порядке) образуют базис $Y_{n,e}(\sigma)$.



$$G^{(r)}_{a,b;i,j} = \begin{cases} D^{(r)}_{a;i,j}, & \text{при } a=b \\ E^{(r)}_{a,b;i,j}, & \text{при } a<b \\ F^{(r)}_{b,a;i,j}, & \text{при } a>b \end{cases}$$

$$s_{a,b}(\nu) < r \le s_{a,b}(\nu) + p_{\min(a,b)}(\nu)$$

Фильтрация на $Y_{n,e}(\sigma)$:

$$\deg D^{(r)}_{a;i,j} = \deg E^{(r)}_{a,b;i,j} = \deg F^{(r)}_{a,b;i,j} = r$$

$F_d Y_{n,e}(\sigma) = \operatorname{span}$ всех мономов степени $\le d$.

- $d^{(r)}_{a;i,j}$; $e^{(r)}_{a;i,j}$; $f^{(r)}_{a;i,j} \in U(\mathfrak{p})$. $\longleftarrow$ все они степени r.

$F_d U(\mathfrak{p}) = \operatorname{span}$(мономы от $e_{ij} \in \mathfrak{p}$ $\deg \le d$) $\rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow F_d W(\pi) = W(\pi) \cap F_d U(\mathfrak{p})$$

Теорема Имеется изоморфизм фильтр. алгебр

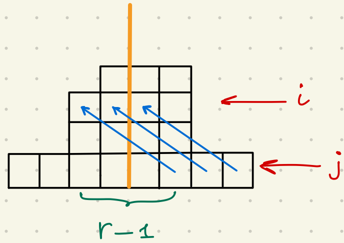
$$Y_{n,e}(\sigma) \simeq W(\pi):$$

$$D^{(r)}_{a;i,j} \longmapsto d^{(r)}_{a;i,j}, \quad E^{(r)}_{a;i,j} \longmapsto e^{(r)}_{a;i,j}, \quad F^{(r)}_{a;i,j} \longmapsto f^{(r)}_{a;i,j}$$

Доказательство = оставшаяся часть доклада.

Π — пирамида высоты $\le n$ и $(p_1, \dots, p_n)$ — длины строк.

$$C_{ij}^{(r)} = \sum_{\substack{r_h = i,\, r_k = j \\ c_k - c_h + 1 = r}} e_{hk}$$



Лемма $C_{ij}^{(r)}$ при $1 \le i, j \le n$ и $s_{ij} < r \le s_{ij} + p_{\min(i,j)}$ образуют базис $\ker(\mathrm{ad}\, e)$.

$$e = \sum e_{hk}$$

Д-во Пусть $A = \sum_{k,l} a_{kl} e_{kl} \in \ker(\mathrm{ad}\, e)$

$$[e, A] = \sum_{\substack{r_i = r_j \\ c_i = c_j - 1}} \sum_{k,l} a_{kl} \left(e_{il} \delta_{jk} - e_{kj} \delta_{li}\right) = \sum_{\substack{r_i = r_k, \\ c_i = c_k - 1}} a_{lj} e_{ij} \delta_{kl}$$

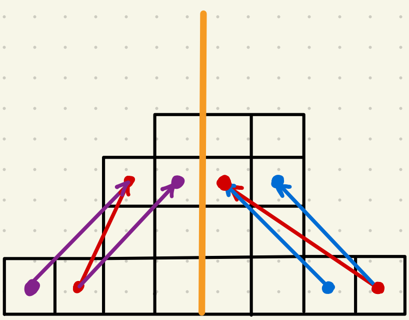
$(j, k, l) \mapsto (k, l, j)$

$$- \sum_{\substack{r_l = r_j \\ c_l = c_j - 1}} a_{ik} e_{ij} \delta_{lk} = \sum_{i,j} e_{ij} \left(\sum_{\substack{k:\, r_i = r_k \\ c_k = c_i + 1}} a_{kj} - \sum_{\substack{l:\, r_j = r_l \\ c_l = c_j - 1}} a_{il} \right) = 0$$

$(i, k, l) \mapsto (l, i, k)$

$\Updownarrow$

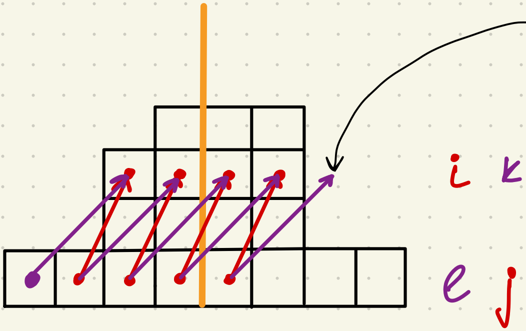
$\forall\, i, j$: имеем $a_{kj} = a_{il}$, где $r_k = r_i$, $r_l = r_j$, $c_k = c_i + 1$, $c_l = c_j - 1$



вот так записываются наши равенства.

i k
k
l j
l

Рассмотрим 2 случая: синие и фиолетовые.



это значит, что коэффициент при e_{ij} в коммутаторе есть не разность $a_{kj} - a_{il}$, но $-a_{il} \Rightarrow a_{il} = 0$

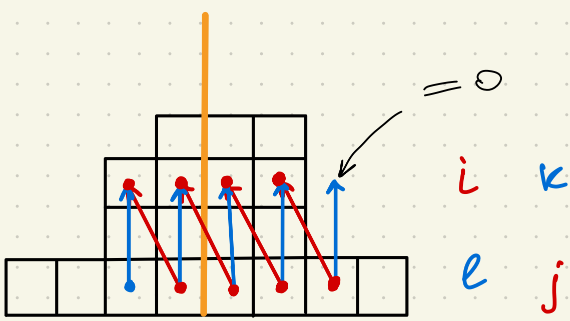
Тем самым $\ker(\operatorname{ad} e) \subset \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}_i$. В прошлом семестре это было очевидно из теории представлений $\mathfrak{sl}_2$.

$\ker(\operatorname{ad} e)$ = пр-во старших векторов в $\mathfrak{g}$ как $\mathfrak{sl}_2$-модуле. Теперь же градуировка на $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ не всегда приходит из действия п/п элемента $\mathfrak{sl}_2$-тройки для e.

Теперь синий случай.

Из здравого смысла $c_j - c_i \leq s_{i,j} + p_{\min(i,j)}$.

Если же $c_j - c_i \leq s_{i,j}$, то



$= 0$

$\Rightarrow c_j - c_i > s_{ij}$

$c_j - c_k + 1 = c_l - c_i + 1 =$

$= c_j - c_i > s_{i,j}$

Предложение $\dim F_d Y_{n,e}(\sigma) = \dim F_d W(\pi)$

Д-во $\dim F_d W(\pi) = \dim F_d \operatorname{gr} W(\pi)$

Пусть e, h, f — sl_2 тройка в gl_N (sl_N). Тогда

$\operatorname{gr} W(\pi) \simeq \mathbb{C}[e + \ker \operatorname{ad} f] \leftarrow$ в прошлом семестре доказали для дынкиновской градуировки. В этом семестре градуировка не всегда дынкиновская, но все прежние аргументы сработают.

$$\Downarrow$$

$$\dim F_d W(\pi) = \dim F_d \mathbb{C}[e + \ker \operatorname{ad} f]$$

Введём обозначение $H = \sum_{k=1}^{N} c_k e_{kk} \leftarrow$ порождает градуировку на gl_N.

$$[H, e_{ij}] = (c_j - c_i) e_{ij}, \quad [H, e] = 2e$$

$$\mathbb{C}[e + \ker \operatorname{ad} f] \simeq S(\ker(\operatorname{ad} f)^*) \overset{tr(\cdot,\cdot)}{\simeq} S(\ker \operatorname{ad} e).$$

$tr(\cdot,\cdot)$ — ad-инвариантна $\Rightarrow$ изоморфизм сохраняет градуировку.

Итого: $\dim F_d W(\pi) = \dim F_d S(\ker \operatorname{ad} e)$

С другой стороны, из теоремы о базисе $Y_{n,e}(\sigma)$ имеем биекцию на базисах $Y_{n,e}(\sigma)$ и $S(\ker \operatorname{ad} e)$. $\blacksquare$

$Y_{n,l}(\sigma) \simeq W(\pi)$: Продолжение

Напоминание: пирамида $\pi = (q_1, \dots, q_l)$,

$n \geq \max(q_1, \dots, q_l) \rightsquigarrow Y_{n,l}(\sigma)$; $W(\pi) = \mathcal{U}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{m}}$, где

$\mathfrak{p} = \bigoplus\limits_{r \geq 0} \mathfrak{g}_r$, $\mathfrak{m} = \bigoplus\limits_{r<0} \mathfrak{g}_r$, действие $\mathfrak{m}$ на $\mathfrak{p}$ = присоединённое + проекция вдоль $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_n) I_\chi$, $I_\chi = \{ x - \chi(x) \mid x \in \mathfrak{m} \}$.

$$\chi : \mathfrak{m} \to \mathbb{C}$$
$$x \mapsto (x, e)$$

Ещё есть элементы $d^{(r)}_{a;i,j}$, $e^{(r)}_{a;i,j}$, $f^{(r)}_{a;i,j} \in F_r \mathcal{U}(\mathfrak{p})$:

$$T(u) = \left(T_{i,j;0}(u)\right)_{i,j=\overline{1,n}}, \quad T_{i,j;0} = \sum_{r \geq 0} T^{(r)}_{i,j;0} u^{-r}$$

${}^{\sigma}f(u)\, {}^{\sigma}d(u)\, {}^{\sigma}e(u) = T(u)$ — гауссово разложение для $T(u)$.

$$d^{(r)}_{a;i,j} = T^{(r)}_{\nu_1+\dots+\nu_{a-1}+i,\ \nu_1+\dots+\nu_{a-1}+j;\ \nu_1+\dots+\nu_{a-1}}$$

$$e^{(r)}_{a;i,j} = T^{(r)}_{\nu_1+\dots+\nu_{a-1}+i,\ \nu_1+\dots+\nu_a+j;\ \nu_1+\dots+\nu_a}$$

$$f^{(r)}_{a;i,j} = T^{(r)}_{\nu_1+\dots+\nu_a+i,\ \nu_1+\dots+\nu_{a-1}+j;\ \nu_1+\dots+\nu_a}$$

Теорема $Y_{n,l}(\sigma) \simeq W(\pi)$

$$D^{(r)}_{a;i,j} \mapsto d^{(r)}_{a;i,j},\quad E^{(r)}_{a;i,j} \mapsto e^{(r)}_{a;i,j},\quad F^{(r)}_{a;i,j} \mapsto f^{(r)}_{a;i,j}$$

В прошлый раз: $\dim F_d W(\pi) = \dim F_d Y_{n,l}(\sigma)$

Доказательство теоремы:

Произвольное $\nu \rightsquigarrow \nu$ с минимальной длиной т.е.

ν_i = размер i-го диагонального блока из нулей в σ.

Пусть $\nu, \tilde\nu$ — допустимые разбиения n.

${}^{\nu}Y_n(\sigma), {}^{\tilde\nu}Y_n(\sigma) \hookrightarrow Y_n$; $F, D, E \longmapsto$ гауссовы элементы матрицы $T(u) = (t_{ij}(u))$

два вложения (для ν и для $\tilde\nu$) с одинаковыми образами.

${}^{\nu}F\,{}^{\nu}D\,{}^{\nu}E = {}^{\tilde\nu}F\,{}^{\tilde\nu}D\,{}^{\tilde\nu}E$ и ${}^{\nu}f\,{}^{\nu}d\,{}^{\nu}e = {}^{\tilde\nu}f\,{}^{\tilde\nu}d\,{}^{\tilde\nu}e \in U(\mathfrak{p})$.

Везде дальше ν_i = высота прямоугольных блоков в π.

Индукция по l: $l = 1 \Rightarrow \pi = (q) \Rightarrow$

- $$\sigma = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\, n-q \\ \}\, q \end{array} \\ \underbrace{\quad}_{n-q}\ \underbrace{\quad}_{q} \end{array} \qquad \text{или} \qquad \sigma = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\, n-q \\ \}\, q \end{array} \\ \underbrace{\quad}_{n-q}\ \underbrace{\quad}_{q} \end{array}$$

$k=0$ $\qquad\qquad$ $k=1$

- $e = \sum e_{ij} = 0 \Rightarrow W(\pi) = U(\mathfrak{gl}_q)$, $m = 0$, $\mathfrak{gl}_N = \mathfrak{g}_0$

$r_i = r_j,\ c_i = c_j - 1$ $\qquad$ $d^{(r)}_{a;i,j} = T^{(r)}_{\nu_1+\dots+\nu_{a-1}+i,\ \nu_1+\dots+\nu_{a-1}+j;\ \nu_1+\dots+\nu_{a-1}}$

- $d^{(1)}_{2;i,j} = T^{(1)}_{i,j;q} = \tilde{e}_{ij} = e_{ij} + \delta_{ij}(n-q)$ $\qquad$ $\nu_1 = q$, $\nu_2 = n-q$

мономы от

- $Y_{n,1}(\sigma) = \mathrm{span}\big(G^{(r)}_{a,b;i,j}$ при $s_{a,b}(\nu) < r \le s_{a,b}(\nu) + p_{\min(a,b)}(\nu)\big)$

$\Longrightarrow Y_{n,1}(\sigma) = \mathrm{span}(\text{мономы от } D^{(1)}_{2;i,j})$

$m = 2$ и $p_1 = 0 \Longrightarrow a = b = 2 \quad S_{2,2}(\nu) = 0, \; P_2(\nu) = 1 \Longrightarrow r = 1.$

$$\Downarrow$$

$Y_{n,1}(\sigma) \simeq U(\mathfrak{gl}_q), \; D^{(1)}_{2;i,j} \mapsto e_{ij}.$ ← из соотношений

$$[D^{(r)}_{a;i,j}, D^{(s)}_{b;h,k}] = \delta_{a,b} \sum_{t=0}^{\min(r,s)-1} \left(D^{(r+s-1-t)}_{a;i,k} D^{(t)}_{a;h,j} - D^{(t)}_{a;i,k} D^{(r+s-1-t)}_{a;h,j} \right)$$

$e_{ij} + \delta_{ij}(n-q) = \tilde{e}_{ij}$

$e_{ij} \mapsto \tilde{e}_{ij}$ — автоморфизм $U(\mathfrak{gl}_q)$ и база доказана.

$$[e_{ij}, e_{\alpha\beta}] = \delta_{j\alpha} e_{i\beta} - e_{\alpha j}\delta_{\beta i} = \delta_{j\alpha}\tilde{e}_{i\beta} - \delta_{j\alpha}\delta_{i\beta}(n-q) - \delta_{\beta i}\tilde{e}_{\alpha j} + \delta_{j\alpha}\delta_{i\beta}(n-q) = \delta_{j\alpha}\tilde{e}_{i\beta} - \delta_{\beta i}\tilde{e}_{\alpha j}$$

$$[e_{ij}, e_{\alpha\beta}] = [\tilde{e}_{ij}, \tilde{e}_{\alpha\beta}]$$

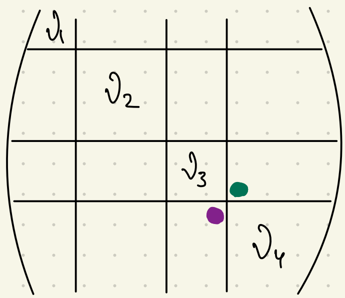
Индукционный переход: $t = \vartheta_m = \min(q_1, q_\ell)$

Два случая, соответствующие разным коумножениям:

- $t = n$ или $S_{n-t, n-t+1} \neq 0$ ← Δ_R

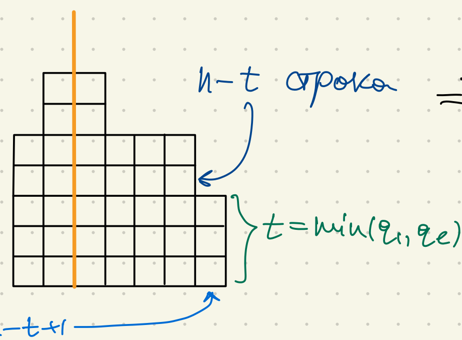
$\sigma = 0$ и $\pi = (n, \dots, n)$

- $t = n$ или $S_{n-t+1, n-t} \neq 0$ ← Δ_L



Рассмотрим первый случай.

$\Pi =$



$\Longrightarrow q_1 \geq q_\ell.$

Откусим от Π последний столбец

$\dot{\Pi} = (q_1, \dots, q_{\ell-1}).$

$\pi \rightsquigarrow \sigma$, $\dot{\pi} \rightsquigarrow \dot{\sigma} = \begin{cases} s_{i,j}-1, & \text{при } i \le n-t < j \\ s_{i,j} & \text{иначе.} \end{cases}$

λ — допустимое разбиение для $\sigma \Rightarrow$ оно допустимо для $\dot{\sigma}$.

нулевые диагональные блоки не уменьшаются.

$\pi \rightsquigarrow \mathfrak{gl}_N = \bigoplus_r \mathfrak{g}_r$, $\mathfrak{g}_r = \mathrm{span}(e_{ij} \mid c_j - c_i = r)$

$\mathfrak{p} = \bigoplus_{r \ge 0} \mathfrak{g}_r$, $\mathfrak{m} = \bigoplus_{r<0} \mathfrak{g}_r$, $e = \sum_{\substack{r_i = r_j \\ c_j - c_i = 1}} e_{ij} \in \mathfrak{g}_1$.

Хотим $Y_{n,e}(\sigma) \simeq W(\pi)$, $D_{a;i,j}^{(r)} \mapsto d_{a;i,j}^{(r)}, \ldots$.

Аналогично $\dot{\pi} \rightsquigarrow \mathfrak{gl}_{N-t} = \bigoplus_r \dot{\mathfrak{g}}_r$, $\dot{\mathfrak{p}}, \dot{\mathfrak{m}}, \dot{e}$.

Знаем, что $Y_{n,e-1}(\dot{\sigma}) \simeq W(\dot{\pi})$, $\dot{D}_{a;i,j}^{(r)} \mapsto \dot{d}_{a;i,j}^{(r)}, \ldots$.

Имеется гомоморфизм фильтрованных алгебр

$\Delta_R : Y_{n,e}(\sigma) \hookrightarrow Y_{n,e-1}(\dot{\sigma}) \otimes \underbrace{U(\mathfrak{gl}_t)}_{U(\mathfrak{p})} \leftarrow \deg(e_{ij}) = 1$

Стратегия: Найти $X \subset W(\pi)$, $\varphi : X \longrightarrow U(\dot{\mathfrak{p}}) \otimes U(\mathfrak{gl}_t)$

т.ч. $\varphi(F_d X) = \Delta_R(F_d Y_{n,e}(\sigma)) \subset Y_{n,e-1}(\dot{\sigma}) \otimes U(\mathfrak{gl}_t) \overset{\text{индукция}}{=}$

$= W(\dot{\pi}) \otimes U(\mathfrak{gl}_t) \subset U(\dot{\mathfrak{p}}) \otimes U(\mathfrak{gl}_t)$

Тогда проверили в прошлый раз; Δ_R инъективно

$\dim F_d W(\pi) = \dim F_d Y_{n,e}(\sigma) = \dim \Delta_R(F_d Y_{n,e}(\sigma)) =$

$= \dim \varphi(F_d X) \le \dim F_d X \le \dim F_d W(\pi) \Rightarrow$ везде р-ва

- $X = W(\Pi)$
- $\varphi : W(\Pi) \longrightarrow U(\dot{\mathfrak{p}}) \otimes U(\mathfrak{gl}_t)$ инъективно.

$\Downarrow$

$\varphi^{-1} \circ \Delta_R : Y_{n,\ell}(\sigma) \longrightarrow W(\Pi)$ изоморфизм.

Вложение $U(\mathfrak{gl}_{N-t}) \hookrightarrow U(\mathfrak{gl}_N)$: $\tilde{e}_{ij}$ для Π:

$$\tilde{e}_{ij} = (-1)^{c_j - c_i} (e_{ij} + \delta_{ij} \rho_{c_j}), \text{ где } \rho_k = n - q_k - q_{k+1} - \dots - q_\ell$$

$$[\tilde{e}_{ij}, \tilde{e}_{\alpha\beta}] = \tilde{e}_{i\beta} \delta_{j\alpha} - \tilde{e}_{\alpha j} \delta_{i\beta} - \delta_{\alpha j} \delta_{i\beta} (\rho_{c_i} - \rho_{c_j})$$

есть аналогичные $\tilde{e}_{ij}$ для $\dot{\Pi}$.

$i : U(\mathfrak{gl}_{N-t}) \hookrightarrow U(\mathfrak{gl}_N)$: $\tilde{e}_{ij}$ для $\dot{\Pi} \longmapsto \tilde{e}_{ij}$ для Π.

$i(U(\dot{\mathfrak{p}})) \subset U(\mathfrak{p})$

Лемма $r > 0$ и $\forall\ 1 \le h \le t$. В $U(\mathfrak{p})$ выполнено

- $$d^{(r)}_{a;i,j} = i(\dot{d}^{(r)}_{a;i,j}) + \delta_{a,m} \Big(\sum_{k=1}^{t} i(\dot{d}^{(r-1)}_{a;i,k}) \tilde{e}_{N-t+k, N-t+j} + [i(\dot{d}^{(r-1)}_{a;i,h}), \tilde{e}_{N-2t+h, N-t+j}] \Big)$$
- $$e^{(r)}_{a;i,j} = i(\dot{e}^{(r)}_{a;i,j}) + \delta_{a,m-1} \Big(\sum_{k=1}^{t} i(\dot{e}^{(r-1)}_{a;i,k}) \tilde{e}_{N-t+k, N-t+j} + [i(\dot{e}^{(r-1)}_{a;i,h}), \tilde{e}_{N-2t+h, N-t+j}] \Big)$$
- $$f^{(r)}_{a;i,j} = i(\dot{f}^{(r)}_{a;i,j})$$

Д-во $f^{(r)}_{a;i,j} = T^{(r)}_{\nu_1+\ldots+\nu_a+i,\ \nu_1+\ldots+\nu_{a-1}+j;\ \nu_1+\ldots+\nu_a} =$

$$= \sum_{s=1}^{r} \sum_{\substack{1\le i_1,\ldots,i_s\le N\\ 1\le j_1,\ldots,j_s\le N\\ +\text{условия}}} \operatorname{sign}(r_{j_1})\cdot\ldots\cdot\operatorname{sign}(r_{j_{s-1}})\,\tilde{e}_{i_1 j_1}\cdot\ldots\cdot\tilde{e}_{i_s j_s}$$

$$\operatorname{sign}(r_j) = \begin{cases} -1, & r_j \le \nu_1+\ldots+\nu_a \\ 1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

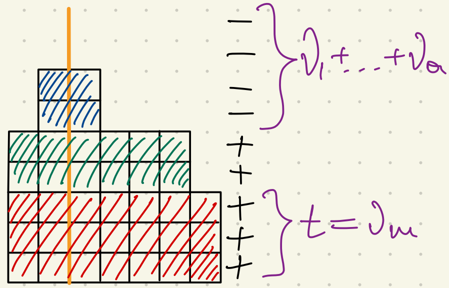
Условия:

1 $\deg(e_{i_1 j_1}) + \ldots + \deg(e_{i_s j_s}) = r$

2 $c_{i_\alpha} \le c_{j_\alpha}, \quad \alpha = \overline{1,s}$

3 $\operatorname{sign}(r_{j_\alpha}) = + \Rightarrow c_{j_\alpha} < c_{i_{\alpha+1}}, \quad \alpha = \overline{1,s-1}$

4 $\operatorname{sign}(r_{j_\alpha}) = - \Rightarrow c_{j_\alpha} \geq c_{i_{\alpha+1}}, \quad \alpha = \overline{1,s-1}$



5 $r_{i_1} = \nu_1+\ldots+\nu_a+i, \quad r_{j_s} = \nu_1+\ldots+\nu_{a-1}+j$

6 $r_{j_\alpha} = r_{i_{\alpha+1}}, \quad \alpha = \overline{1,s-1}$

$i_\alpha, j_\alpha \in \dot{\pi}, \quad \alpha = \overline{1,s-1}$

$\Uparrow$

2 $\Rightarrow \left(i_\alpha \in \pi\setminus\dot{\pi} \Rightarrow j_\alpha \in \pi\setminus\dot{\pi}, \alpha = \overline{1,s}\right)$, 3 $\Rightarrow j_\alpha \in \dot{\pi}$ при $\alpha = \overline{1,s-1}$

5 $\Rightarrow \nu_1+\ldots+\nu_{a-1}+1 \le r_{j_s} \le \nu_1+\ldots+\nu_a, \quad a \le m-1 \Rightarrow j_s \in \dot{\pi} \Rightarrow i_s \in \dot{\pi}$

Разберём теперь случай с $e^{(r)}_{m-1;i,j}$.

?

$$e^{(r)}_{m-1;i,j} = \dot{e}^{(r)}_{m-1;i,j} + \sum_{k=1}^{t} \dot{e}^{(r-1)}_{m-1;i,k}\,\tilde{e}_{N-t+k,N-t+j} +$$

$\forall\ 1 \le h \le t$ $\qquad + \left[\dot{e}^{(r-1)}_{m-1;i,h},\ \tilde{e}_{N-2t+h,N-t+j}\right]$

$$e^{(r)}_{m-1;i,j} = T^{(r)}_{\nu_1+\dots+\nu_{m-2}+i,\ \nu_1+\dots+\nu_{m-1}+j;\ \nu_1+\dots+\nu_{m-1}} =$$

$$= \sum_{s=1}^{r} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_s \\ j_1,\dots,j_s}} \dots\dots \quad + \text{условия}$$

② $C_{i_\alpha} \le C_{j_\alpha}$, $\alpha = \overline{1,s}$ $\Longrightarrow$ $i_1,\dots,i_{s-1}, j_1,\dots,j_{s-1} \in \dot{\Pi}$

и, если $j_s \in \dot{\Pi}$, то $i_s \in \dot{\Pi}$.

③ $\mathrm{Sign}(r_{j_\alpha}) = + \Rightarrow C_{j_\alpha} < C_{i_{\alpha+1}}$, $\alpha = \overline{1,s-1}$

для j_s строка фиксирована в условиях, а для i_s мы её выбираем

- $j_s \in \dot{\Pi} \rightsquigarrow \dot{e}^{(r)}_{m-1;i,j}$
- $j_s \in \Pi \setminus \dot{\Pi}$ и $i_s \in \Pi \setminus \dot{\Pi} \rightsquigarrow \sum_{k=1}^{t} \dot{e}^{(r-1)}_{m-1;i,k}\, \tilde{e}_{N-t+k,N-t+j}$
- $j_s \in \Pi \setminus \dot{\Pi}$ и $i_s \in \dot{\Pi} \rightsquigarrow \left[\dot{e}^{(r-1)}_{m-1;i,h},\ \tilde{e}_{N-2t+h,N-t+j}\right]$?

$s = \overline{1,r-1}$

$r-1$, а не r, потому что в сумме слева нет слагаемых с $s=r$:

$\deg(e_{i_1j_1}) + \dots + \deg(e_{i_rj_r}) = r$, $\deg(e_{i_\alpha j_\alpha}) = C_{j_\alpha} - C_{i_\alpha} + 1$

$C_{j_\alpha} \geqslant C_{i_\alpha} \Rightarrow C_{j_\alpha} = C_{i_\alpha}$, но $j_r \in \Pi \setminus \dot{\Pi}$, а $i_r \in \dot{\Pi}$ $\times$

$$\left[\dot{e}^{(r-1)}_{m-1;i,h},\ \tilde{e}_{N-2t+h,N-t+j}\right] = \sum_{s=1}^{r-1} \sum_{\substack{\bar{i}_1,\dots,\bar{i}_s \in \dot{\Pi} \\ \bar{j}_1,\dots,\bar{j}_s}} \mathrm{Sign}(r_{\bar{j}_1}) \cdot\ldots\cdot \mathrm{Sign}(r_{\bar{j}_{s-1}})\, \cdot$$

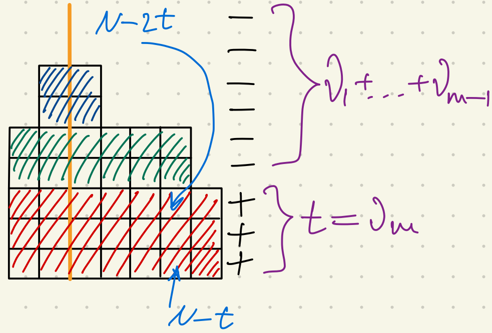
$$\cdot \left[\tilde{e}_{\bar{i}_1\bar{j}_1} \cdot\ldots\cdot \tilde{e}_{\bar{i}_s\bar{j}_s},\ \tilde{e}_{N-2t+h,N-t+j}\right]$$

можем забыть.

$$\left[\tilde{e}_{ij}, \tilde{e}_{i'j'}\right] = \tilde{e}_{ij'}\,\delta_{ji'} - \tilde{e}_{i'j}\,\delta_{ij'} - \delta_{i'j}\,\delta_{ij'}(\rho_{c_i} - \rho_{c_j})$$

$$[\tilde{e}_{\bar{i}_\alpha \bar{j}_\alpha}, \tilde{e}_{N-2t+h,\, N-t+j}] =$$

$$= \tilde{e}_{\bar{i}_\alpha,\, N-t+j}\,\delta_{\bar{j}_\alpha,\, N-2t+h}$$



в последнем столбце $\dot{\Pi}$

если $\bar{j}_\alpha = N-2t+h$, $\alpha \neq s$, то ✗ с (3 $\operatorname{sign}(r_{\bar{j}_\alpha}) = + \Rightarrow C_{\bar{j}_\alpha} < C_{\bar{i}_{\alpha+1}}, \alpha = \overline{1,s-1}$)

$\Downarrow$

$\alpha = s$

в ф-ле Лейбница выживет только слагаемое с $\alpha = s$

$$[\dot{e}^{(r-1)}_{m-1;i;h}, \tilde{e}_{N-2t+h,\, N-t+j}] = \sum_{s=1}^{r-1} \sum_{\substack{\bar{i}_1,\dots,\bar{i}_s \\ \bar{j}_1,\dots,\bar{j}_s}\in\dot{\Pi} + \text{условия}} \operatorname{sign}(r_{\bar{j}_1})\cdot\ldots\cdot\operatorname{sign}(r_{\bar{j}_{s-1}})$$

$$\tilde{e}_{\bar{i}_1\bar{j}_1}\cdot\ldots\cdot\tilde{e}_{\bar{i}_{s-1}\bar{j}_{s-1}}\cdot\tilde{e}_{\bar{i}_s,\, N-t+j}\cdot\delta_{\bar{j}_s,\, N-2t+h}$$

Условия:

1 $\deg(e_{\bar{i}_1\bar{j}_1}) + \ldots + \deg(e_{\bar{i}_s\bar{j}_s}) = r-1$

2 $C_{\bar{i}_\alpha} \leq C_{\bar{j}_\alpha}$, $\alpha = \overline{1,s}$

3 $\operatorname{sign}(r_{\bar{j}_\alpha}) = + \Rightarrow C_{\bar{j}_\alpha} < C_{\bar{i}_{\alpha+1}}$, $\alpha = \overline{1,s-1}$

4 $\operatorname{sign}(r_{\bar{j}_\alpha}) = - \Rightarrow C_{\bar{j}_\alpha} \geq C_{\bar{i}_{\alpha+1}}$, $\alpha = \overline{1,s-1}$

про это можно забыть

5 $r_{\bar{i}_1} = \nu_1 + \ldots + \nu_{m-2} + i$

$r_{\bar{j}_s} = \nu_1 + \ldots + \nu_{m-1} + h$

6 $r_{\bar{j}_\alpha} = r_{\bar{i}_{\alpha+1}}$, $\alpha = \overline{1,s-1}$

В условиях 2, 5 можно забыть про $\bar{j}_s$, а 1 означает, что $\deg(e_{\bar{i}_1\bar{j}_1}) + \ldots + \deg(e_{\bar{i}_s,\, N-t+j}) = r$.

$Y_{n,l}(\sigma) \simeq W(\pi)$: Продолжение 2

$W(\pi) = U(\mathfrak{p})^{\mathfrak{m}}$, где $\mathfrak{p} = \bigoplus\limits_{r \geq 0} \mathfrak{g}_r$, $\mathfrak{m} = \bigoplus\limits_{r<0} \mathfrak{g}_r$,

действие $\mathfrak{m}$ на $\mathfrak{p}$ = присоединённое + проекция вдоль $U(\mathfrak{gl}_n) I_\chi$, $I_\chi = \{x - \chi(x) \mid x \in \mathfrak{m}\}$; $\chi : \mathfrak{m} \to \mathbb{C}$
$x \mapsto (x, e)$

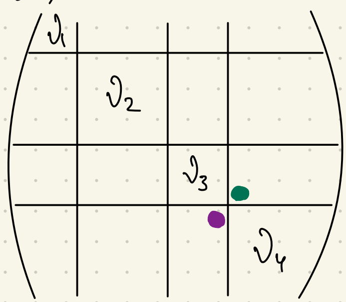
Теорема $Y_{n,l}(\sigma) \simeq W(\pi)$

$$D^{(r)}_{a;i,j} \mapsto d^{(r)}_{a;i,j}, \quad E^{(r)}_{a;i,j} \mapsto e^{(r)}_{a;i,j}, \quad F^{(r)}_{a;i,j} \mapsto f^{(r)}_{a;i,j}$$

В прошлые разы: $\dim F_d W(\pi) = \dim F_d Y_{n,l}(\sigma)$

Начало док-ва теоремы: индукция по l. База $l = 1$ — ок.

Индукционный переход: $t = \vartheta_m = \min(q_1, q_l)$



- $t = n$ или $s_{n-t,n-t+1} \neq 0$ ← Δ_R

$\sigma = 0$ и $\pi = (n, \dots, n)$

- $t = n$ или $s_{n-t+1,n-t} \neq 0$ ← Δ_L

$\pi = (q_1, \dots, q_l)$, $\dot{\pi} = (q_1, \dots, q_{l-1})$.

$\mathfrak{gl}_N, \mathfrak{p}, \mathfrak{m}$ $\qquad$ $\mathfrak{gl}_{N-t}, \dot{\mathfrak{p}}, \dot{\mathfrak{m}}$. $\quad W(\dot{\pi}) = Y_{n,l-1}(\dot{\sigma})$.

d, e, f $\qquad$ $\dot{d}, \dot{e}, \dot{f}$

$$\tilde{e}_{ij} = (-1)^{c_j - c_i}(e_{ij} + \delta_{ij}\rho_{c_j}), \text{ где } \rho_k = n - q_k - q_{k+1} - \dots - q_l$$

$i : U(\mathfrak{gl}_{N-t}) \hookrightarrow U(\mathfrak{gl}_N)$: $\tilde{e}_{ij}$ для $\dot{\pi} \longmapsto \tilde{e}_{ij}$ для π.

Лемма $r>0$ и $\forall\ 1\leq h\leq t$.

- $$d^{(r)}_{a;i,j}=\dot{d}^{(r)}_{a;i,j}+\delta_{a,m}\Big(\sum_{k=1}^{t}\dot{d}^{(r-1)}_{a;i,k}\,\tilde{e}_{N-t+k,N-t+j}+\big[\dot{d}^{(r-1)}_{a;i,h},\tilde{e}_{N-2t+h,N-t+j}\big]\Big)$$
- $$e^{(r)}_{a;i,j}=\dot{e}^{(r)}_{a;i,j}+\delta_{a,m-1}\Big(\sum_{k=1}^{t}\dot{e}^{(r-1)}_{a;i,k}\,\tilde{e}_{N-t+k,N-t+j}+\big[\dot{e}^{(r-1)}_{a;i,h},\tilde{e}_{N-2t+h,N-t+j}\big]\Big)$$
- $$f^{(r)}_{a;i,j}=\dot{f}^{(r)}_{a;i,j}$$

Сейчас докажем $W(\pi)\simeq Y_{n,l}(\sigma)$

Имеется инъективный гомоморфизм фильтр. алгебр:

$$\Delta_R:\ Y_{n,l}(\sigma)\hookrightarrow Y_{n,l-1}(\dot{\sigma})\otimes U(\mathfrak{gl}_t)\underset{\text{индукция}}{\simeq} W(\dot{\pi})\otimes U(\mathfrak{gl}_t)\hookrightarrow U(\dot{\mathfrak{p}})\otimes U(\mathfrak{gl}_t).$$

- $$D^{(r)}_{a;i,j}\longmapsto \dot{d}^{(r)}_{a;i,j}\otimes 1+\delta_{a,m}\sum_{k=1}^{t}\dot{d}^{(r-1)}_{a;i,k}\otimes\big(e_{k,j}+\delta_{k,j}(n-t)\big)$$
- $$E^{(r)}_{a;i,j}\longmapsto \dot{e}^{(r)}_{a;i,j}\otimes 1+\delta_{a,m-1}\sum_{k=1}^{t}\dot{e}^{(r-1)}_{a;i,k}\otimes\big(e_{k,j}+\delta_{k,j}(n-t)\big)$$
- $$F^{(r)}_{a;i,j}\longmapsto \dot{f}^{(r)}_{a;i,j}\otimes 1.$$

Напоминание: Мономы от $G^{(r)}_{a,b;i,j}$ — базис $Y_{n,l}(\sigma)$.

$$G^{(r)}_{a,b;i,j}=\begin{cases}D^{(r)}_{a;i,j}, & \text{при } a=b,\\ E^{(r)}_{a,b;i,j}, & \text{при } a<b,\\ F^{(r)}_{b,a;i,j}, & \text{при } a>b\end{cases}\qquad s_{a,b}(\nu)<r\leq s_{a,b}(\nu)+p_{\min(a,b)}(\nu)$$

$\in F_r Y_{n,l}(\sigma)$

$$E^{(r)}_{a,b;i,j} = \left[E^{(r-s_{b-1,b}(\nu))}_{a,b-1;i,h},\ E^{(s_{b-1,b}(\nu)+1)}_{b-1;h,j}\right]$$

$1 \le h \le \nu_b$ — любой

$$F^{(r)}_{a,b;i,j} = \left[F^{(s_{b,b-1}(\nu)+1)}_{b-1;i,h},\ F^{(r-s_{b,b-1}(\nu))}_{a,b-1;h,j}\right]$$

Предложение. Следующие элементы лежат в $W(\pi)$:

- $d^{(r)}_{a;i,j}$ при $a=\overline{1,m}$, $i,j=\overline{1,\nu_a}$, $r>0$
- $e^{(r)}_{a;i,j}$ при $a=\overline{1,m-1}$, $i=\overline{1,\nu_a}$, $j=\overline{1,\nu_{a+1}}$, $r>s_{a,a+1}(\nu)$
- $f^{(r)}_{a;i,j}$ при $a=\overline{1,m-1}$, $i=\overline{1,\nu_{a+1}}$, $j=\overline{1,\nu_a}$, $r>s_{a+1,a}(\nu)$

$s_{\nu_1+\ldots+\nu_a,\ \nu_1+\ldots+\nu_{a+1}} \ \| \ s_{a,a+1}(\nu)$

Определим аналогично

$$g^{(r)}_{a,b;i,j} = \begin{cases} d^{(r)}_{a;i,j}, & \text{при } a=b, \\ e^{(r)}_{a,b;i,j}, & \text{при } a<b, \\ f^{(r)}_{b,a;i,j}, & \text{при } a>b \end{cases}$$

$g^{(r)}_{a,b;i,j} \in W(\pi)$

$s_{a,b}(\nu) < r \le s_{a,b}(\nu) + p_{\min(a,b)}(\nu)$

Важно: $g^{(r)}_{a,b;i,j} \in F_r W(\pi)$, потому что

$$\left[F_d\,U(\mathfrak{gl}_n), F_r\,U(\mathfrak{gl}_n)\right] \subset F_{d+r-1}\,U(\mathfrak{gl}_n)$$

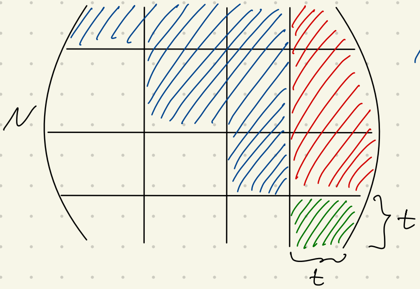
Обозначим $X = \operatorname{span}(\text{мономы от } g^{(r)}_{a,b;i,j}) \subset W(\pi)$

$$F_d X = \operatorname{span}(\text{мономы } \deg \le d).$$

Рассмотрим $\varphi: U(\mathfrak{p}) \twoheadrightarrow U(\dot{\mathfrak{p}}) \otimes U(\mathfrak{gl}_t)$

$\tilde{e}_{ij}$ для Π $\qquad\qquad$ $\tilde{e}_{ij}$ для $\dot{\Pi}$

$$\varphi(\tilde{e}_{ij}) = \begin{cases} \tilde{e}_{ij} \otimes 1, & \text{если } i,j \in \dot{\Pi} \\ 0, & \text{если } i \in \dot{\Pi},\ j \in \Pi \setminus \dot{\Pi} \\ 1 \otimes \left(e_{i-N+t,\, j-N+t} + \delta_{ij}(n-t)\right), & \text{если } i,j \in \Pi \setminus \dot{\Pi}. \end{cases}$$



$/////$ — $\dot{\mathfrak{p}}$, $\quad /////\ \simeq \mathfrak{gl}_t$

<u>Утв</u> φ — гомоморфизм.

Сравним $\varphi(X)$ и $\Delta_R(Y_{n,\ell}(\sigma)) \subset U(\dot{\mathfrak{p}}) \otimes U(\mathfrak{gl}_t)$.

- $f^{(r)}_{a;i,j} = \dot{f}^{(r)}_{a;i,j} \xmapsto{\varphi} \dot{f}^{(r)}_{a;i,j} \otimes 1 = \Delta_R(F^{(r)}_{a;i,j})$

- $d^{(r)}_{a;i,j} = \dot{d}^{(r)}_{a;i,j} + \delta_{a,m}\Big(\sum_{k=1}^{t} \dot{d}^{(r-1)}_{a;i,k}\, \tilde{e}_{N-t+k,\, N-t+j} +$

$\qquad 1 \le h \le t \qquad\qquad + \left[\dot{d}^{(r-1)}_{a;i,h},\ \tilde{e}_{N-2t+h,\, N-t+j}\right]\Big)$ $\quad 0$

$\Big\downarrow \varphi$

$\dot{d}^{(r)}_{a;i,j} \otimes 1 + \delta_{a,m}\Big(\sum_{k=1}^{t} \dot{d}^{(r-1)}_{a;i,k} \otimes \left(e_{k,j} + \delta_{kj}(n-t)\right)\Big) =$

$$= \Delta_R(D^{(r)}_{a;i,j}) \subset U(\dot{\mathfrak{p}}) \otimes U(\mathfrak{gl}_t)$$

- $e^{(r)}_{a;i,j} = \dot{e}^{(r)}_{a;i,j} + \delta_{a,m-1}\Big(\sum_{k=1}^{t} \dot{e}^{(r-1)}_{a;i,k}\, \tilde{e}_{N-t+k,\, N-t+j} +$

$\qquad + \left[\dot{e}^{(r-1)}_{a;i,h},\ \tilde{e}_{N-2t+h,\, N-t+j}\right]\Big)$ $\quad 0$

$\Big\downarrow \varphi$

$\Delta_R(E^{(r)}_{a;i,j})$

- $\varphi(g^{(r)}_{a,b;i,j}) = \Delta_R(G^{(r)}_{a,b;i,j})$

- $\varphi(F_d X) = \Delta_R(F_d Y_{n,e}(\sigma)) \subset U(\dot{\mathfrak{p}}) \otimes U(\mathfrak{gl}_t)$

$\Downarrow$ проверяли раньше $\quad$ Δ_R инъективно

$$\dim F_d W(\pi) \overset{\text{проверяли раньше}}{=} \dim F_d Y_{n,e}(\sigma) \overset{\Delta_R \text{ инъективно}}{=} \dim \Delta_R(F_d Y_{n,e}(\sigma)) =$$
$$= \dim \varphi(F_d X) \le \dim F_d X \le \dim F_d W(\pi) \Rightarrow X = W(\pi)$$

и $W(\pi) \overset{\varphi}{\simeq} \varphi(W(\pi)) = \Delta_R(Y_{n,e}(\sigma)) \simeq Y_{n,e}(\sigma)$

φ и Δ_R – изоморфизмы на свои образы, которые совпадают.

$$\varphi^{-1} \circ \Delta_R : Y_{n,e}(\sigma) \xrightarrow{\sim} W(\pi), \quad D^{(r)}_{a;i,j} \mapsto d^{(r)}_{a;i,j}, \ \ldots$$

Теперь докажем, что $d, e, f \in W(\pi) = U(\mathfrak{p})^{\mathfrak{m}}$

$\mathfrak{m} \curvearrowright U(\mathfrak{p})$: $\mathrm{ad} + \mathrm{pr}_\chi$, $\quad U(\mathfrak{gl}_N) = U(\mathfrak{p}) \oplus U(\mathfrak{gl}_N) I_\chi$

$I_\chi = \{x - \chi(x) \mid x \in \mathfrak{m}\}$, $\quad \chi : U(\mathfrak{m}) \longrightarrow \mathbb{C}$, $\quad \underset{\substack{\Uparrow \\ \mathfrak{m}}}{x} \mapsto (x, e)$

$$\tilde{e}_{ij} = (-1)^{c_i - c_j}(e_{ij} + \delta_{ij} \rho_{c_i}) \qquad \tilde{e}_{ij} \overset{\mathfrak{m}}{\mapsto} \begin{cases} -1, & r_i = r_j, \ c_j - c_i + 1 = 0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

При $i : U(\mathfrak{gl}_{N-t}) \hookrightarrow U(\mathfrak{gl}_N)$, $\tilde{e}_{ij}$ для $\dot{\pi} \mapsto \tilde{e}_{ij}$ для π
$U(\dot{\mathfrak{m}}) \hookrightarrow U(\mathfrak{m})$ и $\dot{\chi} = \mathrm{Res}\,\chi$.

Лемма 1

$d^{(r)}_{a;i,j} \in W(\pi)$ при $a = \overline{1, m-1}$, $r > 0$

не крайние слагаем. $\quad e^{(r)}_{a;i,j} \in W(\pi)$ при $a = \overline{1, m-2}$, $r > s_{a,a+1}(\nu)$

$f^{(r)}_{a;i,j} \in W(\pi)$ при $a = \overline{1, m-1}$, $r > s_{a+1,a}(\nu)$

Д-во $\quad d^{(r)}_{a;i,j} = \dot{d}^{(r)}_{a;i,j}$, $e^{(r)}_{a;i,j} = \dot{e}^{(r)}_{a;i,j}$, $f^{(r)}_{a;i,j} = \dot{f}^{(r)}_{a;i,j}$

эти элементы $\dot{\mathfrak{m}}$–инв. по предпол. индукции.

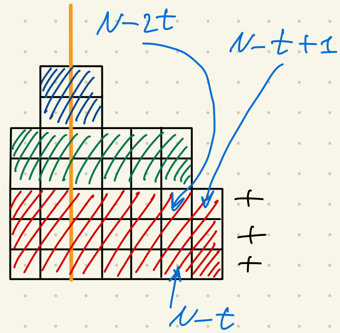
$\mathfrak{m} = \mathrm{span}(\dot{\mathfrak{m}}, e_{h,g} \mid h \in \Pi \setminus \dot{\Pi}, g \in \dot{\Pi})$

$\dot{d}^{(r)}_{a;i,j} = T^{(r)}_{\nu_1+\dots+\nu_{a-1}+i,\ \nu_1+\dots+\nu_{a-1}+j;\ \nu_1+\dots+\nu_{a-1}}$

$\dot{e}^{(r)}_{a;i,j} = T^{(r)}_{\nu_1+\dots+\nu_{a-1}+i,\ \nu_1+\dots+\nu_a+j;\ \nu_1+\dots+\nu_a} = \sum\limits_{\text{условия}} \pm \tilde{e}_{i_1 j_1} \cdots \tilde{e}_{i_s j_s}$

условия
$i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_s \in \dot{\Pi}$

$\dot{f}^{(r)}_{a;i,j} = T^{(r)}_{\nu_1+\dots+\nu_a+i;\ \nu_1+\dots+\nu_{a-1}+j;\ \nu_1+\dots+\nu_a}$



если $j_\alpha \in \dot{\Pi}$ и $j_\alpha \in$ красный блок, то

$\alpha = \overline{1, s-1}$ $\qquad C_{i_\alpha} < C_{i_{\alpha+1}} \Rightarrow j_\alpha < N-2t$

и $r_{j_s} \le \nu_1 + \dots + \nu_{m-2} + \nu_{m-1} \Rightarrow j_s \notin$ красный блок

$\Downarrow$

$j_1, \dots, j_s < N-2t$

$i_\alpha, j_\alpha \in \dot{\Pi} \Rightarrow [\tilde{e}_{i_\alpha j_\alpha}, \tilde{e}_{h,g}] = -\delta_{g,i_\alpha} \tilde{e}_{h,j_\alpha} \in I_\chi$

т.к. $C_h - C_{j_\alpha} \geq 2$.

$\mathrm{pr}_\chi [\tilde{e}_{h,g}, x^{(r)}_{a;i,j}] =$ пр-ло Лейбница + переносим $\mathfrak{m}$ направо

$\| \atop 0$

$x = d, e, f$

Лемма 2 $d^{(r)}_{m;i,j}$ и $e^{(r)}_{m-1;i,j}$ при $r > s_{m-1,m}(\nu)$ $\dot{\mathfrak{m}}$-инв.

Д-во

$$d^{(r)}_{m;i,j} = \dot{d}^{(r)}_{m;i,j} + \sum_{k=1}^{t} \dot{d}^{(r-1)}_{m;i,k} \tilde{e}_{N-t+k,N-t+j} + [\dot{d}^{(r-1)}_{m;i,h}, \tilde{e}_{N-2t+h,N-t+j}]$$

$1 \le h \le t$

$e_{\alpha,\beta} \in \dot{\mathfrak{m}} \Rightarrow [e_{\alpha\beta}, \dot{d}^{(r)}_{m;i,j}] = 0 = [e_{\alpha\beta}, \dot{d}^{(r-1)}_{m;i,h}]$ по предп. инд.

$C_\beta < C_\alpha$ и $\alpha, \beta \le N-t \Rightarrow \beta < N-2t \Rightarrow$

$$[e_{\alpha\beta}, \tilde{e}_{N-t+k,N-t+j}] = [e_{\alpha\beta}, \tilde{e}_{N-2t+h,N-t+j}] = 0 \qquad \blacksquare$$

Стратегия: Остались крайние случаи — $d^{(r)}_{m;i,j}$ и $e^{(r)}_{m-1;i,j}$.

Нужно доказать $\tilde{e}_{h,g}$ инв. при $h \in \Pi \setminus \dot{\Pi}$, $g \in \dot{\Pi}$.

Для $d^{(1)}_{m;i,j}$ и $d^{(2)}_{m;i,j}$ посчитаем руками.

Два случая:

1) $s_{m-1,m}(\nu) = 1$. Для $e^{(2)}_{m-1;i,j}$ проверим руками и докажем некоторые соотношения из $Y_{m,e}(\sigma)$:

$$d^{(r+1)}_{m;i,j} = [f^{(2)}_{m-1;i,g}, e^{(r)}_{m-1;g,j}] + \sum_{s=0}^{r} \tilde{d}^{(r+1-s)}_{m-1;g,g} d^{(s)}_{m;i,j}$$

$$e^{(r+1)}_{m-1;i,j} = [d^{(2)}_{m-1;i,g}, e^{(r)}_{m-1;g,j}] - \sum_{s=1}^{\partial_m - 1} d^{(1)}_{m-1;i,s} e^{(r)}_{m-1;s,j}$$

Индукция по $r \Rightarrow d^{(r)}_{m;i,j}$ и $e^{(r)}_{m-1;i,j}$ — m-инв.

2) $s_{m-1,m}(\nu) > 1$. $d^{(1)}_{m;i,j}$ — инв. При $r > 1$ докажем $\tilde{e}_{N-t+h,N-2t+g}$ — инв. при $1 \le h,g \le t$. Этого достаточно.

Лемма 3 Элементы $d^{(1)}_{m;i,j}$ и $d^{(2)}_{m;i,j}$; $e^{(2)}_{m-1;i,j}$ при $s_{m-1,m}(\nu) = 1$

$\tilde{e}_{h,g}$ — инвариантны при $h \in \Pi \setminus \dot{\Pi}$, $g \in \dot{\Pi}$.

Д-во $d^{(1)}_{m;i,j} = T^{(1)}_{\nu_1+\dots+\nu_{m-1}+i,\ \nu_1+\dots+\nu_{m-1}+j;\ \nu_1+\dots+\nu_{m-1}} =$

$$= \sum_{\substack{r_u=\nu_1+\dots+\nu_{m-1}+i,\\ r_v=\nu_1+\dots+\nu_{m-1}+j,\\ c_v=c_u}} \tilde e_{uv} \Rightarrow [d^{(1)}_{m;i,j}, \tilde e_{h,g}] = \sum_{\substack{r_u=\nu_1+\dots+\nu_{m-1}+i,\\ r_v=\nu_1+\dots+\nu_{m-1}+j,\\ c_v=c_u}} (\delta_{h,v}\tilde e_{ug} - \delta_{gu}\tilde e_{hv})$$

$\Cap$ m

$\delta_{h,v}\,\delta_{g,u} = 0$

$$pr_x [d^{(1)}_{m;i,j}, \tilde e_{h,g}] = \sum_{\substack{r_u=\nu_1+\dots+\nu_{m-1}+i,\\ r_v=\nu_1+\dots+\nu_{m-1}+j,\\ c_v=c_u}} -\delta_{h,v}\,\delta_{r_u,r_g}\,\delta_{c_g,c_u-1} +$$

$$+ \sum_{\substack{r_u=\nu_1+\dots+\nu_{m-1}+i,\\ r_v=\nu_1+\dots+\nu_{m-1}+j,\\ c_v=c_u}} \delta_{gu}\,\delta_{r_h,r_v}\,\delta_{c_v,c_h-1} = \delta_{c_g,c_h-1}\Big(-\delta_{r_g,\nu_1+\dots+\nu_{m-1}+i}\cdot \underbrace{\delta_{r_h,\nu_1+\dots+\nu_{m-1}+j}}_{\delta_{h,v}} + \delta_{r_h,\nu_1+\dots+\nu_{m-1}+j}\cdot \underbrace{\delta_{r_g,\nu_1+\dots+\nu_{m-1}+i}}_{\delta_{g,u}}\Big) = 0$$

потому что у нас всё лежит в самом нижнем блоке. ■

Лемма 4 Для $r>1$ и $\forall g$

соотношения из янгиана

- $$d^{(r+1)}_{m;i,j} = [f^{(2)}_{m-1;i,g}, e^{(r)}_{m-1;g,j}] + \sum_{s=0}^{r} \tilde d^{(r+1-s)}_{m-1;g,g}\, d^{(s)}_{m;i,j}$$
- $$e^{(r+1)}_{m-1;i,j} = [d^{(2)}_{m-1;i,g}, e^{(r)}_{m-1;g,j}] - \sum_{s=1}^{\nu_m-1} d^{(1)}_{m-1;i,s}\, e^{(r)}_{m-1;s,j}$$

Д-во Второе р-во. Из индукции знаем, что $\dot d$ и $\dot e$ удовл. соотн. янгиана $\Rightarrow$

$$[\dot d^{(2)}_{m-1;i,g}, \dot e^{(r)}_{m-1;g,j}] = \dot e^{(r+1)}_{m-1;i,j} + \sum_{s=1}^{\nu_m-1} \dot d^{(1)}_{m-1;i,s}\, \dot e^{(r)}_{m-1;s,j}$$

Из леммы выше $\dot d^{(2)}_{m-1;i,g} = d^{(2)}_{m-1;i,g}$ и

$$e^{(r)}_{m-1;g,j} = \dot e^{(r)}_{m-1;g,j} + \sum_{k=1}^{t} \dot e^{(r-1)}_{m-1;g,k} \tilde e_{N-t+k,N-t+j} + \\ + \left[\dot e^{(r-1)}_{m-1;g,h}, \tilde e_{N-2t+h,N-t+j}\right]$$

$N-t+k, N-t+j \in \Pi \setminus \dot\Pi \Rightarrow \left[\dot d^{(2)}_{m-1;i,g}, \tilde e_{N-t+k,N-t+j}\right] = 0$ и

$\left[\dot d^{(2)}_{m-1;i,g}, \tilde e_{N-2t+h,N-t+j}\right] = 0$, потому что $\dot d = \sum \pm \tilde e_{i_1 j_1} \dots \tilde e_{i_s j_s}$

и, если $j_\alpha \in$ нижний блок,

то $C_{j_\alpha} < C_{i_{\alpha+1}} \Rightarrow j_\alpha$ строго левее последнего столбца при $\alpha \le s-1$

и $r_{j_s} = \nu_1 + \dots + \nu_{m-2} + g \le \nu_1 + \dots + \nu_{m-2} + \nu_{m-1} \leftarrow$ выше нижнего блока.

Тогда $\left[d^{(2)}_{m-1;i,g}, e^{(r)}_{m-1;g,j}\right] = \left[\dot d^{(2)}_{m-1;i,g}, \dot e^{(r)}_{m-1;g,j}\right] +$

$$+ \sum_{k=1}^{t} \left[\dot d^{(2)}_{m-1;i,g}, \dot e^{(r-1)}_{m-1;g,k}\right] \tilde e_{N-t+k,N-t+j} + \quad \text{индукция}$$

$$+ \left[\left[\dot d^{(2)}_{m-1;i,g}, \dot e^{(r-1)}_{m-1;g,h}\right], \tilde e_{N-2t+h,N-t+j}\right] = \dot e^{(r+1)}_{m-1;i,j} +$$

$$\sum_{s=1}^{\nu_m-1} \dot d^{(1)}_{m-1;i,s} \dot e^{(r)}_{m-1;s,j} + \sum_{k=1}^{t} \left(\dot e^{(r+1)}_{m-1;i,k} + \sum_{s=1}^{\nu_m-1} \dot d^{(1)}_{m-1;i,s} \dot e^{(r)}_{m-1;s,k}\right) \cdot \\ \cdot \tilde e_{N-t+k,N-t+j} +$$

$$+ \left[\dot e^{(r+1)}_{m-1;i,h}, \tilde e_{N-2t+h,N-t+j}\right] + \sum_{s=1}^{\nu_m-1} \left[\dot d^{(1)}_{m-1;i,s} \dot e^{(r)}_{m-1;s,h},\right.$$

Лемма про e и $\dot{e}$

$$= e^{(r+1)}_{m-1;i,j} + \sum_{s=1}^{\vartheta_{m-1}} d_{m-1;i,s} e^{(r)}_{m-1;s,j}$$

$$\left[\tilde{e}_{N-2t+h,N-t+j}\right] =$$

можем вынести

$$\dot{d}^{(1)}_{m-1;i,s} = d^{(1)}_{m-1;i,s}$$

по тому же аргументу $\left[\dot{d}^{(1)}_{m-1;i,s}, \tilde{e}_{N-2t+h,N-t+j}\right] = 0$ ∎

Лемма 5 Пусть $t = n$ и $\ell > 1$ или $S_{m-1,m}(V) > 1$. Тогда

- $d^{(r)}_{m;i,j}$, $r > 1$
- $e^{(r)}_{m-1;i,j}$, $r > S_{m-1,m}(V)$

инвариантны относительно $\tilde{e}_{N-t+h,N-2t+g}$ при $1 \le h, g \le t$.

Д-во

$\ddot{\pi} = \pi$ без последних 2-х столбцов $\Rightarrow$ в $\ddot{\pi}$ стоят числа $1, \dots, N-2t$, потому что $S_{m-1,m}(V) > 1$.

Выразим d через $\dot{d}$.

$$d^{(r)}_{m;i,j} = \dot{d}^{(r)}_{m;i,j} + \sum_{\alpha=1}^{t} \dot{d}^{(r-1)}_{m;i,\alpha} \tilde{e}_{N-t+\alpha,N-t+j} +$$

$1 \le V \le t$

$$+ \left[\dot{d}^{(r-1)}_{m;i,V}, \tilde{e}_{N-2t+V,N-t+j}\right]$$

аналогично

$$\dot{d}^{(r)}_{m;i,j} = \ddot{d}^{(r)}_{m;i,j} + \sum_{\beta=1}^{t} \ddot{d}^{(r-1)}_{m;i,\beta} \tilde{e}_{N-2t+\beta,N-2t+j} +$$

$$+ \left[\ddot{d}^{(r-1)}_{m;i,V}, \tilde{e}_{N-3t+V,N-2t+j}\right]$$

$$d^{(r)}_{m;i,j} = A + B + C + D + E + F + G + H$$

$$A = \ddot{d}^{(r)}_{m;i,j}, \quad B = \sum_{\beta=1}^{t} \ddot{d}^{(r-1)}_{m;i,\beta}\, \tilde{e}_{N-2t+\beta,\, N-2t+j}$$

$$C = \left[\ddot{d}^{(r-1)}_{m;i,V}, \tilde{e}_{N-3t+V,\, N-2t+j}\right], \quad D = \sum_{\alpha=1}^{t} \ddot{d}^{(r-1)}_{m;i,\alpha}\, \tilde{e}_{N-t+\alpha,\, N-t+j}$$

$$E = \sum_{\alpha,\beta=1}^{t} \ddot{d}^{(r-2)}_{m;i,\beta}\, \tilde{e}_{N-2t+\beta,\, N-2t+\alpha}\, \tilde{e}_{N-t+\alpha,\, N-t+j}$$

$$F = \sum_{\alpha=1}^{t} \left[\ddot{d}^{(r-2)}_{m;i,V}, \tilde{e}_{N-3t+V,\, N-2t+\alpha}\right] \tilde{e}_{N-t+\alpha,\, N-t+j}$$

$$G = \sum_{\beta=1}^{t} \ddot{d}^{(r-2)}_{m;i,\beta} \left[\tilde{e}_{N-2t+\beta,\, N-2t+V}, \tilde{e}_{N-2t+V,\, N-t+j}\right]$$

$$H = \left[\ddot{d}^{(r-1)}_{m;i,V}, \left[\tilde{e}_{N-3t+V,\, N-2t+V}, \tilde{e}_{N-2t+V,\, N-t+j}\right]\right] =$$

$$= \left[\ddot{d}^{(r-1)}_{m;i,V}, \tilde{e}_{N-3t+V,\, N-t+j}\right]$$

Теперь подействуем $x = \tilde{e}_{N-t+h,\, N-2t+g}$ на $A, B, C, \ldots$

$1 \le h, g \le t$

$$[x, A] = 0 \Rightarrow pr_x [x, A] = 0$$

$$[x, B] = \sum_{\beta=1}^{t} \ddot{d}^{(r-1)}_{m;i,\beta} \left[x, \tilde{e}_{N-2t+\beta,\, N-2t+j}\right] = \ddot{d}^{(r-1)}_{m;i,g}\, \tilde{e}_{N-t+h,\, N-2t+j}$$

$$pr_x [x, B] = -\delta_{h,j}\, \ddot{d}^{(r-1)}_{m;i,g}$$

$$[x, C] = \left[\ddot{d}^{(r-1)}_{m;i,V}, \left[x, \tilde{e}_{N-3t+V,\, N-2t+j}\right]\right] = 0, \quad pr_x [x, C] = 0$$

$$[x, D] = \sum_{\alpha=1}^{t} \ddot{d}^{(r-1)}_{m;i,\alpha} \left[\tilde{e}_{N-t+h,\, N-2t+g}, \tilde{e}_{N-t+\alpha,\, N-t+j}\right] =$$

$$= -\delta_{h,j} \sum_{\alpha=1}^{t} \overset{\bullet\bullet(r-1)}{d}_{m;i,\alpha}\, \tilde{e}_{N-t+\alpha,\, N-2t+g}$$

$$pr_{\mathcal{X}}[X, D] = \delta_{h,j}\, \overset{\bullet\bullet(r-1)}{d}_{m;i,g}$$

$$\delta_{g,\beta}\, \tilde{e}_{N-t+h,\, N-2t+\alpha}$$

$$[X, E] = \sum_{\alpha,\beta=1}^{t} \overset{\bullet\bullet(r-2)}{d}_{m;i,\beta} \underbrace{\left[\tilde{e}_{N-t+h,\, N-2t+g},\, \tilde{e}_{N-2t+\beta,\, N-2t+\alpha}\right]}_{\shortparallel} \cdot$$

$$\cdot\, \tilde{e}_{N-t+\alpha,\, N-t+j} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{t} \overset{\bullet\bullet(r-2)}{d}_{m;i,\beta}\, \tilde{e}_{N-2t+\beta,\, N-2t+\alpha} \underbrace{\left[\tilde{e}_{N-t+h,\, N-2t+g},\, \tilde{e}_{N-t+\alpha,\, N-t+j}\right]}_{\shortparallel}$$

$$-\delta_{h,j}\, \tilde{e}_{N-t+\alpha,\, N-2t+g}$$

$$\left[\tilde{e}_{N-t+h,\, N-2t+\alpha},\, \tilde{e}_{N-t+\alpha,\, N-t+j}\right] = -\delta_{j,h}\, \tilde{e}_{N-t+\alpha,\, N-2t+\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$pr_{\mathcal{X}}[X, E] = -\overset{\bullet\bullet(r-2)}{d}_{m;i,g}\, \tilde{e}_{N-t+h,\, N-t+j} + t\,\delta_{j,h}\, \overset{\bullet\bullet(r-2)}{d}_{m;i,g} +$$

$$+ \delta_{h,j} \sum_{\beta=1}^{t} \overset{\bullet\bullet(r-2)}{d}_{m;i,\beta}\, \tilde{e}_{N-2t+\beta,\, N-2t+g}$$

аналогично $pr_{\mathcal{X}}[X, G] = -pr_{\mathcal{X}}[X, E]$

$$[X, F] = \sum_{\alpha=1}^{t} \left[\overset{\bullet\bullet(r-2)}{d}_{m;i,V},\, \tilde{e}_{N-3t+V,\, N-2t+\alpha}\right] \cdot$$

$$\cdot \left[\tilde{e}_{N-t+h,\, N-2t+g},\, \tilde{e}_{N-t+\alpha,\, N-t+j}\right] = \sum_{\alpha=1}^{t} \left[\overset{\bullet\bullet(r-2)}{d}_{m;i,V},\, \tilde{e}_{N-3t+V,\, N-2t+\alpha}\right]$$

$$\cdot\, (-\delta_{j,h})\, \tilde{e}_{N-t+\alpha,\, N-2t+g}$$

аналогично

$pr_{\mathcal{X}}[X, H] = -pr_{\mathcal{X}}[X, F]$

$$pr_{\mathcal{X}}[X, F] = \delta_{j,h} \left[\overset{\bullet\bullet(r-2)}{d}_{m;i,V},\, \tilde{e}_{N-3t+V,\, N-2t+g}\right]$$