Срез Слодови — продолжение

В прошлый раз:

- $\omega: \mathfrak{g}(-1)\times\mathfrak{g}(-1)\to\mathbb{C}$

  $\omega(x,y)=(e,[x,y])$ — невырожд. билин. форма

- $\ell\subset\mathfrak{g}(-1)$ — Лагранжево подпр-во: $\ell^{\perp\omega}=\ell$

  $$\mathfrak{m}=\ell\oplus\bigoplus_{i\le -2}\mathfrak{g}(i)$$

  $M\subset G$ — унипотентная гр. Ли соот. Ли $\mathfrak{m}$

- $M\curvearrowright\mathfrak{g}^*\rightsquigarrow \mu:\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{m}^*$ — огр. функционалов

Была обсуждена теорема

Теорема $$M\times \underset{\substack{\| \\ e+\ker \operatorname{ad} f}}{S}\simeq e+\mathfrak{m}^{\perp}=\mu^{-1}(e)$$

присоед. действие

А ещё мы посчитали размерности левой и правой частей и показали, что они равны.

Сегодня: 1) Пример $\mathfrak{sl}_n$
2) Модификация теоремы и док-во
3) Теорема Костанта для регулярного нильпотента — обобщение примера $\mathfrak{sl}_n$.

Пример $\mathfrak{sl}_n$

$$e=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix},\quad h=\begin{pmatrix} n-1 & & & & 0 \\ & n-3 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -n+3 & \\ 0 & & & & -n+1 \end{pmatrix}$$

$$f=\begin{pmatrix} 0 & & & & & 0 \\ n-1 & \ddots & & & & \\ & 2(n-2) & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 2(n-2) & 0 & \\ 0 & & & & (n-1) & 0 \end{pmatrix}$$

$S=\ ?$ Мы знаем, что $\dim S = \operatorname{rk}(\mathfrak{sl}_n) = n-1$

С другой стороны, $f, f^2, \ldots, f^{n-1} \in \ker \operatorname{ad} f$ и они ЛН.

$$S=\{e+t_1 f+t_2 f^2+\ldots+t_{n-1}f^{n-1} \mid t_1,\ldots,t_n\in\mathbb{C}\}$$

$$\mathbb{C}[S]=\mathbb{C}[t_1,\ldots,t_{n-1}]$$

А что с градуировкой ?

Соотв. $\mathfrak{sl}_2$ тройке

$\mathbb{C}^\times \curvearrowright S \quad (t, e+s) \mapsto e + t^2 \operatorname{Ad}_{\gamma(t^{-1})}(s)$, где $\gamma: \mathbb{C}^\times \hookrightarrow SL_2 \hookrightarrow G$, $t\mapsto \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1}\end{pmatrix}$

$\gamma(t^{-1}) f \gamma(t) = t^2 f$ поэтому $\deg t_i = 2+2i$

$\Updownarrow$

$([h,f]=-2f)$

Покажем, что ограничение функций $\mathbb{C}[sl_n^*]^{sl_n} \longrightarrow \mathbb{C}[S]$ — это изоморфизм.

как вект. пр-во

Заметим, что $\mathbb{C}[sl_n^*]^{sl_n} = ZU(sl_n)$. Поэтому скобка на $\mathbb{C}[S]$ будет тривиальной.

Образующие $\mathbb{C}[sl_n^*]^{sl_n}$ — это например коэфф. хар. многочлена матрицы $X=(X_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, где $X_{ij}(e_{kl}) = \delta_{ik}\delta_{jl}$

Наши образующие имеют вид: $k=\overline{2,n}$

$$l_k = \sum_{i_1,\dots,i_k} X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_k i_1} = tr(X^k)$$

т.к. $Ad_{\gamma(t^{-1})}(l_k) = l_k$ ведь l_k — G инв.

$$t.l_k = t^{-2k} l_k \Rightarrow l_k \text{ однородные и } \deg l_k = 2k$$

При ограничении ф-ий из $\mathbb{C}[sl_n^*]^{sl_n}$ на S мы получаем

$$(X_{ij}) \longmapsto e + t_1 f + \dots + t_{n-1} f^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ (n-1)t_1 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & 2(n-2)t_1 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ (\dots)\cdot t_{n-1} & \cdots & 2(n-2)t_1 & (n-1)t_1 & 0 \end{pmatrix}$$

i-я субдиагональ зависит только от t_i

Модификация теоремы и док-во

Раньше $\mathfrak{l}$ было лагранжевым: $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}^{\perp\omega}$

Теперь выберем его всего лишь изотропным: $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{l}^{\perp\omega}$

Тогда вместо $\mathfrak{m}$ появляются 2 алгебры:

$\mathfrak{m} = \mathfrak{l} \oplus \bigoplus_{i \leq -2} \mathfrak{g}(i)$ и $\mathfrak{n} = \mathfrak{l}^{\perp\omega} \oplus \bigoplus_{i \leq -2} \mathfrak{g}(i)$, $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{n}$

Пусть M и N соотв. их унипотентные гр.

Замечание $M \subset N$ норм. подгр.

Предл. (без док-ва) Пусть X — аффин. Пуассоново мн-е, $G \curvearrowright X$ сохраняя скобку и $H \subset G$ норм. подгр., которая действует на X гамильтоново с G эквив. отобр. моментов $\mu^*: \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*] \to \mathbb{C}[X]$.

Пусть $\mathbb{O} \subset \mathfrak{h}^*$ — G орбита и $I_{\mathbb{O}} = \{ f \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*] \mid f|_{\mathbb{O}} = 0 \}$

Тогда $\left(\mathbb{C}[X] / \mu^*(I_{\mathbb{O}})\mathbb{C}[X] \right)^G$ Пуассонова алгебра.

$M \curvearrowright \mathfrak{g}^*$ и пусть $\mu^*: \mathbb{C}[\mathfrak{m}^*] \to \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ отобр. момент.

$\mu: \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{m}^*$ — ограничение

Предл. (без док-ва)

1) $e \in \mathfrak{m}^*$ — N инв.

$"(e, \cdot)|_{\mathfrak{m}}$

2) $\mu^{-1}(e) = e + \mathfrak{m}^{\perp}$

Сейчас мы получим, что $N \curvearrowright \mu^{-1}(e)$ свободно и $S \simeq \mu^{-1}(e)/N$

Теорема Присоед. действие $N \times S \to e + \mathfrak{m}^{\perp}$ задаёт изоморфизм аффинных многообразий.

Д-во Во-первых проверим, что $Ad_N(S) \subset e + \mathfrak{m}^{\perp}$

Для этого достаточно проверить инфинит. аналог:

$\forall \eta \in \mathfrak{n}$ 1) $[\eta, \ker \operatorname{ad} f] \subset \mathfrak{m}^{\perp}$ $\Leftrightarrow$

2) $[\eta, e] \in \mathfrak{m}^{\perp}$

$\boxed{\mathfrak{p}.(e+E_1) \subset E_2 \Leftrightarrow \mathfrak{p}.e \subset E_2 \text{ и } \mathfrak{p}.E_1 \subset E_2}$

$\forall \eta \in \mathfrak{n}, \forall \xi \in \mathfrak{m}$

из-за град.

1) $\forall x \in \ker \operatorname{ad} f$ $(\xi, [\eta, x]) = 0$.

2) $(\xi, [\eta, e]) = 0$. если $\xi \in \mathfrak{l}$ и $\eta \in \mathfrak{l}^{\perp \mathfrak{m}}$, то

$$(\xi, [\eta, e]) = ([\xi, \eta], e) = \omega(\xi, \eta) = 0.$$

иначе 0 из-за градуировки

Покажем, что дифференц. присоед. действия $N \times S \to e + \mathfrak{m}^{\perp}$ биективен в точке $(1, e)$. В прошлый раз мы проверили, что размерности совпадают, поэтому достаточно показать, что дифф. инъективен

для погружения в e

т.е. $\mathfrak{n} \oplus \ker \operatorname{ad} f \longrightarrow \mathfrak{m}^{\perp}$ сюр.

$$(\eta, x) \longmapsto [\eta, e] + x$$

Из представлений sl_2 имеем $\operatorname{Im} \operatorname{ad} e \cap \operatorname{Ker} \operatorname{ad} f = 0$
и у нас отображение
$$\mathfrak{n} \oplus \operatorname{Ker} \operatorname{ad} f \to [\mathfrak{n}, e] \oplus \operatorname{Ker} \operatorname{ad} f$$
Но это изоморфизм т.к. $\mathfrak{n} \to [\mathfrak{n}, e]$
$\eta \mapsto [\eta, e]$ из предст. sl_2
т.к. в $\mathfrak{n}$ нет старших векторов.

из градуировки

Но $\operatorname{Ker} \operatorname{ad} f \subset \mathfrak{m}^\perp$ и $[\mathfrak{n}, e] \subset \mathfrak{m}^\perp$ ← показали выше
и дифф инъективен ⇒ биективен. в $(1, e)$.

Теперь мы построим стягивающее действие $\mathbb{C}^*$ на $N \times S_e$ на $e + \mathfrak{m}^\perp$ т.ч. морфизм действия эквивариантен и дело сделано.

На левой части действие определим так:
$$t.(g, x) = \left(\operatorname{Ad}_{\gamma(t^{-1})}(g),\ t^2 \operatorname{Ad}_{\gamma(t^{-1})}(x)\right)$$

$\lim_{t \to 0} t.(g, x) = (1, e)$ и на левой части действ. стягивающее.
т.к. на алгебре это действие стягивает к 0 из-за градуировки.

На $e + \mathfrak{m}^\perp$ действие Каждановское.

$\mathfrak{m}^\perp = [\mathfrak{n}, e] \oplus \operatorname{Ker} \operatorname{ad} f$ — градуировка не выше 1.
Поэтому $t^2 \operatorname{Ad}_{\gamma(t^{-1})}(x)$ это многочлен по t с
$x \in \mathfrak{m}^\perp$ нулевым пост. членом ■

Почему Пуассонова структура на S не зависит от $\mathfrak{l}$?

Пусть $\mathfrak{l}_1 \subset \mathfrak{l}_2$ - изотропные подпр-ва в $\mathfrak{g}(-1)$.

и $\mathfrak{m}_1 \subset \mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{m}_2 \subset \mathfrak{n}_2$ соотв. им нильп. алгебры.

Тогда $\mathfrak{m}_1 \subset \mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_1^\perp \supset \mathfrak{m}_2^\perp$, $\mathfrak{n}_1 \supset \mathfrak{n}_2$ и $N_1 \supset N_2$.

Имеется изоморфизм аффинных многообразий, при котором

$$\frac{e+\mathfrak{m}_2^\perp}{N_2} \simeq \frac{e+\mathfrak{m}_1^\perp}{N_1} \quad (\star)$$

N_2-орбита в $e+\mathfrak{m}_2^\perp$ „увеличивается" до N_1-орбиты в $e+\mathfrak{m}_1^\perp$.

$N_2 s N_2^{-1} \longmapsto N_1 s N_1^{-1}$

Предл Изоморфизм $(\star)$ Пуассонов.

Д-во Пулбэк $(\star)$ на функциях даёт изоморфизм

$$\mathbb{C}\left[\frac{e+\mathfrak{m}_1^\perp}{N_1}\right] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\left[\frac{e+\mathfrak{m}_2^\perp}{N_2}\right]$$

$$A_1 = \left(\mathbb{C}[\mathfrak{g}]/(\xi-(e,\xi)\mid \xi\in\mathfrak{m}_1)\right)^{N_1} \xrightarrow{\sim} \left(\mathbb{C}[\mathfrak{g}]/(\xi-(e,\xi)\mid \xi\in\mathfrak{m}_2)\right)^{N_2} = A_2$$

Проверим, что это отобр. сохраняет скобку.

приходит из отображения факторизации

$\mathbb{C}[\mathfrak{g}]/(\xi-(e,\xi)\mid\xi\in\mathfrak{m}_1) \twoheadrightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{g}]/(\xi-(e,\xi)\mid\xi\in\mathfrak{m}_2)$

Обозначим его через $\varphi: A_1\to A_2$, $\varphi(f)=[f]_2$; через $[\ ]_i$ будем обозначать классы по идеалу $(\xi-(e,\xi)\mid \xi\in\mathfrak{m}_i)$, $i=1,2$.

Пусть $f_1, f_2 \in A_1$, тогда

$$\{f_1,f_2\} = [\{\hat f_1,\hat f_2\}]_1, \text{ где } \hat f_1,\hat f_2\in\mathbb{C}[\mathfrak{g}]: [\hat f_i]_1 = f_i$$

и тогда $\varphi(\{f_1,f_2\}) = [\{\hat f_1,\hat f_2\}]_2$

С другой стороны, $\{\varphi(f_1), \varphi(f_2)\} = [\{\tilde f_1, \tilde f_2\}]_2$, где $\tilde f_1, \tilde f_2 \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ т.ч. $[\tilde f_i]_2 = \varphi(f_i) = [f_i]_2$

Тогда $[\hat{f_i}]_2 = [f_i]_2 = [\tilde f_i]_2$

$$\Downarrow$$

$$\hat f_i - \tilde f_i \in (\xi - (e,\xi) \mid \xi \in \mathfrak{m}_i)$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(\{f_1, f_2\}) = \{\varphi(f_1), \varphi(f_2)\}$$

т.к. $\{f, g\} \in (\xi - (e,\xi) \mid \xi \in \mathfrak{m}_i)$, если $g \in (\xi - (e,\xi) \mid \xi \in \mathfrak{m}_i)$

$\blacksquare$

Теорема Костанта — обобщение примера $\mathfrak{sl}_n$

Теорема Имеется изоморфизм градуированных алгебр $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^G \simeq \mathbb{C}[l_1, \dots, l_r]$, где $r = \mathrm{rk}(\mathfrak{g})$ и $\deg l_i = m_i + 1$, m_i — экспоненты $\mathfrak{g}$.

$\mathfrak{sl}_n$: $1, 2, 3, \dots, n-1$

$\mathfrak{so}_{2n+1}$, $\mathfrak{sp}_{2n}$: $1, 3, 5, \dots, 2n-1$

$\mathfrak{so}_{2n}$: $1, 3, 5, \dots, 2n-3, n-1$

Теорема Пусть e — регулярный нильпотент. Тогда ограничение $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^G \to \mathbb{C}[S]$ задаёт изоморфизм Пуассоновых алгебр. В частности, скобка Пуассона на $\mathbb{C}[S]$ тривиальна.

Д-во Пусть $l_1, \dots, l_r$ — обр. $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^G$, $\deg l_i = m_i + 1$

Тогда $t . l_i = t^{-2(m_i+1)} \mathrm{Ad}_{\gamma(t^{-1})}(l_i) = t^{-2(m_i+1)} l_i$ т.к. l_k — G инв.

ограничения на срез S действие на ф-ии

e — регулярный $\Rightarrow$ $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{C}^{2m_i+1}$ как sl_2 модули.

Выберем однородный (по h) базис в $\ker(\mathrm{ad}\, f)$:

$$f_i \in \mathbb{C}^{2m_i+1} \qquad [h, f_i] = -2m_i f_i$$

$$\text{''} \quad t . f_i = t^{2m_i+2} f_i$$

Дальше через f_i будем обозначать соотв. ф-ии на S. Тогда $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_r]$ и $\deg f_i = 2m_i + 2 = \deg l_i$

Тогда ограничения l_i на срез имеют вид

$$l_i = \mathrm{const}(i) \cdot t_i + F_i(t_1, \dots, t_{i-1})$$

такой вид из градуировки

Покажем, что $\mathrm{const}(i) \neq 0$. Действительно, если для некоторого i $\mathrm{const}(i) = 0$, то ограничения $l_1, \dots, l_r$ на срез будут алг. зависимы — тот самый l_i выразится через младшие: $l_i = F(l_1, \dots, l_{i-1})$

Но $\overline{\mathbb{O}_e} = N = \{l_1 = \dots = l_r = 0\}$

т.к. e регулярный нильп.

$$T_e \mathfrak{g}^* = T_e N \oplus T_e S$$

Противоречие.

∎