Срез Слодови

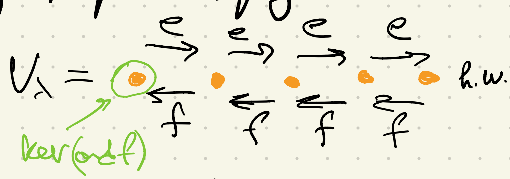
Пусть $\mathfrak{g}$ — п/п к/м алг. Ли и (e,f,h) — $\mathfrak{sl}_2$ тройка.

Опр Срез Слодови это аффинное пр-во
$$S = e + \ker(\operatorname{ad} f) \subset \mathfrak{g}.$$

Пример $\mathfrak{sl}_2$
$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$S = e + \mathbb{C}f$$

Предложение Срез Слодови S трансверсален к G орбитам в $\mathfrak{g}$. Более того, $\mathbb{O}_e \cap S = \{e\}$.

Д-во Начнём с равенства $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, e] \oplus \ker(\operatorname{ad} f)$. Оно приходит из теории представлений $\mathfrak{sl}_2$:
$$\mathfrak{g} = \bigoplus V_\lambda^{m_\lambda}$$



Это р-во, в частности, означает, что S и $\mathbb{O}_e$ трансверсально пересекаются в e. Действительно,
$$T_e \mathbb{O}_e = [\mathfrak{g}, e], \quad T_e S = \ker(\operatorname{ad} f).$$

Но мы хотим большего!

Рс отображение действия $G \times S \to \mathfrak{g}$.
$$S = e + \ker(\operatorname{ad} f)$$

В окр-ти точки $(1, e)$ оно имеет вид
$$(e^{tx}, e + ty) \mapsto e^{tx}(e+ty)e^{-tx}$$
$$x \in \mathfrak{g}, \; y \in \ker(\operatorname{ad} f)$$

Теперь видно, что р-во $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, e] \oplus \ker(\operatorname{ad} f)$ означает, что дифференциал присоед. действия $G \times S \to \mathfrak{g}$ сюръективен в точке $(1, e)$.
Следовательно, он сюръективен в некоторой окрестности этой точки. В частности в точке $(1, e+z)$, где z лежит в окр-ти e в S, мы получим
$\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, e+z] + \ker(\operatorname{ad} f)$ = трансверсальность в $e+z$.
Таким образом, если S и $\mathbb{O}$ пересек. в некоторой (малой) окр-ти e, то это пересечение трансверсально.
А теперь мы построим действие $\mathbb{C}^\times \curvearrowright S$, которое стягивает его в точку e и дело в шляпе.
$SL_2(\mathbb{C})$ односвязна $\Rightarrow$ гомом. $\mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{g}$, соотв. выбранной $\mathfrak{sl}_2$-тройке, экспоненцируется до рац. гомоморф. $SL_2(\mathbb{C}) \to G$; $SL_2(\mathbb{C}) \supset \mathbb{C}^\times = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{C}^\times \right\}$
Обозначим $\gamma : \mathbb{C}^\times \to G$ соотв. кохарактер. Тогда
$\operatorname{Ad}_{\gamma(t)}(e) = t^2 e$ $(\Leftarrow [h, e] = 2e)$

Поэтому определим действие так:

подкрутили присоед. действие на характер $t \mapsto t^2$

$$\rho : \mathbb{C}^\times \times S \to S$$
$$(t, e+s) \mapsto t^2 \operatorname{Ad}_{\gamma(t^{-1})}(e+s)$$

t^{-1}, а не t

$$\| $$
$$e + t^2 \operatorname{Ad}_{\gamma(t^{-1})} s$$

ker(ad f) является ad h инвариантным.

Поэтому такое действие корректно определено.

$$V_\lambda = \underset{\ker(\mathrm{ad} f)}{\bullet} \underset{f}{\overset{e}{\rightleftarrows}} \bullet \underset{f}{\overset{e}{\rightleftarrows}} \bullet \underset{f}{\overset{e}{\rightleftarrows}} \bullet \underset{f}{\overset{e}{\rightleftarrows}} \bullet \ \text{h.w.}$$

Кроме того, из этой картинки с $\mathfrak{sl}_2$ мы получим, что $t^2 \mathrm{Ad}_{\gamma(t^{-1})}(S)$ — многочлен от t с нулевым постоянным членом.

потому что ker(ad f) состоит из лин. комб. векторов неположит. веса по h.

Таким образом, $\lim_{t\to 0} \rho(t)(X) = e \quad \forall X \in S$.

Теперь покажем, что $S \cap \mathbb{O}_e = \{e\}$.

S и $\mathbb{O}_e$ пересекаются трансверсально $\Rightarrow$ их пересечение $S \cap \mathbb{O}_e$ является многообразием. Из $\underbrace{T_e\mathbb{O}_e}_{=[\mathfrak{g}, e]} \oplus \underbrace{T_e S}_{=\ker \mathrm{ad} f} = \underbrace{T_e \mathfrak{g}}_{=\mathfrak{g}}$ получим, что это мн-е нульмерно.

Однако если $S \cap \mathbb{O}_e$ содержит точку $X \neq e$, то оно содержит и кривую $\rho(t)X$. ∎

Пример sl_2 $\quad S = e + \mathbb{C}f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \middle| \gamma \in \mathbb{C} \right\}$

$\mathbb{O}_e$ - ? $\quad g \in SL_2,\ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ g^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$geg^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ac & a^2 \\ -c^2 & ac \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{O}_e = \{ geg^{-1} \mid g \in SL_2 \} = \left\{ \begin{pmatrix} -ac & a^2 \\ -c^2 & ac \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} a, c \in \mathbb{C} \\ \text{одновр.} \neq 0 \end{matrix} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{O}_e \cap S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ещё пример sl_2 $\quad S = e + \mathbb{C}f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \middle| \gamma \in \mathbb{C} \right\}$

$\mathbb{O}_h$ - ? $\quad ghg^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} ad+bc & -2ab \\ 2cd & -ad-bc \end{pmatrix}$$

$$ghg^{-1} \in S \Rightarrow \begin{matrix} ad+bc=0 \\ ab = -\frac{1}{2} \\ \overset{+}{ad - bc = 1} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} ad = \frac{1}{2} \\ bc = -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

$d = \frac{1}{2a},\ b = -\frac{1}{2a},\ c = a$

$a \in \mathbb{C}^\times$

$$ghg^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{O}_h \cap S = \{e + f\}$$

Напоминание — мотивация

$U(\mathfrak{g})$ + PBW квантует $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$

$U(\mathfrak{g})/I_\chi$ $\mathbb{C}[\mathcal{N}]$

фильтр. квантование Пуассоновых мн-ей

нильп. конус

W_e + фильтр. категория квантует $\mathbb{C}[S_e]$

W_e/I_χ $\mathbb{C}[S_e \cap \mathcal{N}]$

Пуассонова структура на $\mathfrak{g}^*$ и коприсоединённых орбитах

Пусть $F_1, F_2 \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ и $\xi \in \mathfrak{g}^*$.

Тогда $dF_1|_\xi, dF_2|_\xi \in T_\xi^*\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$ и $[dF_1|_\xi, dF_2|_\xi] \in \mathfrak{g}$

значение формы в точке ξ

Если $x, y \in \mathfrak{g} \subset S\mathfrak{g} = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$, то $\{x, y\}(\xi) = \xi([x, y])$

$$\{F_1, F_2\}(\xi) := \xi([dF_1|_\xi, dF_2|_\xi]) \quad (\star)$$

Предл (без док-ва) Формула $(\star)$ задаёт на $\mathfrak{g}^*$ Пуассонову структуру.

Теорема (без док-ва) Симплектические листы $\mathfrak{g}^*$ это в точности Ad_G^* орбиты.

Замечание При помощи изоморфизма $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$ $\mathfrak{g}$ наделяется структурой Пуассонова многообразия.

Пусть $\mathcal{O}$ некоторая Ad_G орбита в $\mathfrak{g}$ и $\alpha \in \mathcal{O}$

Тогда $T_\alpha \mathcal{O} \simeq [\mathfrak{g}, \alpha]$.

Определим 2-форму на $\mathcal{O}$ следующим образом:

$$\omega\big|_\beta (ad_X(\beta), ad_Y(\beta)) := (\beta, [X, Y]), \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

$\beta \leftarrow$ значение формы в точке β

Предл Форма ω корректно определена, невырождена, замкнута и G инвариантна.

Отображение моментов — напоминание

Пусть $(M, \{,\})$ Пуассоново и $G \curvearrowright M$, сохраняя скобку: $g.\{f_1, f_2\} = \{g.f_1, g.f_2\}$

Имеется гомом. алг. Ли $\mathfrak{g} \to Vect(M)$; $\xi \mapsto X_\xi$

Опр Действие наз. гамильтоновым, если $\mu^* : S\mathfrak{g} \to \mathbb{C}[M]$, определённый выше, есть гомоморфизм $\{\mu^*(\xi), f\} = df(X_\xi)$

Дуальное к μ^* отображение $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ называв. отображением моментов.

Пусть $\mathbb{O} \subset \mathfrak{g}^*$ орбита.

Опр $\mu^{-1}(\mathbb{O})/\!/G$ = гамильтонова редукция

Орбите $\mathbb{O}$ соотв. идеал $I_{\mathbb{O}} \subset S\mathfrak{g}$

$$I_{\mathbb{O}} = \{f \in S\mathfrak{g} \mid f|_{\mathbb{O}} = 0\}$$

ф-ии на гам. редукции это

$$\left(\mathbb{C}[M] / \mu^*(I_{\mathbb{O}})\mathbb{C}[M]\right)^G$$

Предл. $\mu^{-1}(\mathbb{O})/\!/G$ Пуассоново

Д-во Проверим, что $\{.,.\}$ опускается на

Нам надо проверить, что если $v \in \mu^*(I_{\mathbb{O}})\mathbb{C}[M]$

то $\forall u \in \mathbb{C}[M]$ $\{u, v\} \in \mu^*(I_{\mathbb{O}})\mathbb{C}[M]$

т.к. $[u] \in \left(\mathbb{C}[M]/\mu^*(I_{\mathbb{O}})\mathbb{C}[M]\right)^{\mathfrak{g}}$

$$\Downarrow \quad \{\mu^*(x), u\} = du(X_x) \in \mu^*(I_{\mathbb{O}})\mathbb{C}[M]$$

$$v = \sum_i \mu^*(x_i) a_i, \quad x_i \in I_{\mathbb{O}}, \ a_i \in \mathbb{C}[M]$$

$$\{v, u\} = \sum_i \{\mu^*(x_i) a_i, u\} = \sum_i \underbrace{\{\mu^*(x_i), u\}}_{\in\, \mu^*(I_{\mathbb{O}})\mathbb{C}[M] \text{ из д-ва}} a_i + \sum_i \underbrace{\mu^*(x_i)}_{\in\, \mu^*(I_{\mathbb{O}})\mathbb{C}[M]} \{a_i, u\}$$

∎

Пуассонова структура на срезе Слодови через гамильтонову редукцию

Пусть $\mathfrak{g} = \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}(i)$, где $\mathfrak{g}(i) = \{x\in\mathfrak{g} \mid [h,x] = ix\}$

Определим на $\mathfrak{g}(-1)$ билинейную форму

$\omega(x,y) := (e, [x,y])$.

Лемма Форма $\omega: \mathfrak{g}(-1)\times\mathfrak{g}(-1)\to\mathbb{C}$ невырождена

Д-во

- $\omega(x,y) = (\mathrm{ad}_e(x), y)$
- $(\cdot,\cdot): \mathfrak{g}(1)\times\mathfrak{g}(-1)\to\mathbb{C}$ невырождена
- $\mathrm{ad}_e: \mathfrak{g}(-1)\to\mathfrak{g}(1)$ изоморфизм

Пусть $\ell\subset\mathfrak{g}(-1)$ лагранжево подпространство, т.е. $\ell = \ell^{\perp\omega}$.

Обозначение $\mathfrak{m} = \ell\oplus\bigoplus\limits_{i\le -2}\mathfrak{g}(i)$

Наблюдение $\mathfrak{m}$ – нильпотентная подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$.

Пусть M унипотентная подгруппа G, соотв. алг. Ли $\mathfrak{m}$.

$M \curvearrowright \mathfrak{g}^*$ коприсоед.

Предл. $M\curvearrowright\mathfrak{g}^*$ гамильтоново и $\mu: \mathfrak{g}^*\to\mathfrak{m}^*$ это ограничение функционалов.

Д-во $\{\mu^*(\xi), f\} = X_\xi(f)$, $f \in Sg$

$\xi \in m$ если $f \in g$ $\{\mu^*(\xi), f\} = [\xi, f]$

т.е. $\mu^* : Sm \to \mathbb{C}[g^*] = Sg$ вложение

$\overset{\shortparallel}{\smile}$ $\mu : g^* \to m^*$

$\blacksquare$

Какую выбрать орбиту для редукции?

Предл. $e \in m^*$ M инвариантен

Д-во проверим инфинитезим. аналог:

$(e, [x, y]) = 0$ $\forall x, y \in m$

$\overset{\shortparallel}{(e, \mathrm{ad}_x y)}$

если $x, y \notin g(-1)$, то 0 из градуиро

если $x, y \in g(-1)$, то $x, y \in \ell = \ell^{\perp\omega}$ вкл
$\overset{\shortparallel}{\smile} 0$

$\blacksquare$

Следствие $\mu^{-1}(e) = e + m^\perp$ — M инвариантно

Д-во e — M инв. и $m^\perp$ инв. т.к. $(\cdot, \cdot)$ — инв. форма

$\blacksquare$