

- 1) Опред. параллель + пример
- 2) Построение по параллелю лев. subsets Γ и наборов
- 3) Конструирование $\circ$ W -алгебры
- 4) Опре-е $\overline{T}_{i,j;k}^{(r)}$ + пример $\Gamma=1,2$
- 5) и формулы для $\overline{T}_{i,j;k}^{(r)}(u)$

Опр Пирамида $\pi (q_1, \dots, q_\ell)$

это упор-й набор целых неот-ых

чисел π .? $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_{k-1} \leq q_k = q_k \geq q_{k+1} \geq \dots \geq q_{\ell-1} \geq q_\ell$

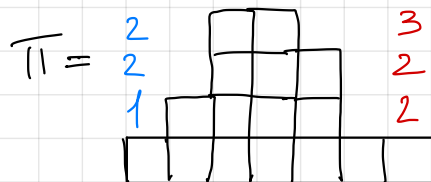
$1 \leq p_1 \leq \dots \leq p_n = \ell$ - длины строк ($n = \max q_i$ - высота)

Связь со смежными узел. Иглом

$$\ell = 7, \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$n = 4$



$$q = (1, 2, 4, 4, 3, 1, 1)$$

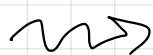
$$p = (2, 3, 4, 7)$$

• $\sigma = (s_{ij})_{n \times n}$

$\rightsquigarrow (p_1, \dots, p_n) \quad p_i = \ell - s_{in} - s_{ni}$

$\ell \geq s_{in} + s_{ni}$

i -я строка длины p_i
 $\pi =$ "окружена" слева s_{ni} и
 справа s_{in} "пустотами"



$\sigma = (s_{ij})_{n \times n}$

• π
 $(q_1, \dots, q_\ell)$
 высоты n

$$s_{ij} = \begin{cases} \# \{ c = 1, \dots, k \mid i > n - q_c \geq j \} & i \geq j \\ \# \{ c = k+1, \dots, \ell \mid i \leq n - q_c < j \} & i \leq j \end{cases}$$

k - "вершина"

Линеаризация о W-адресов.

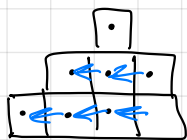
Пусть $N = \sum q_i \rightsquigarrow$ замкнутые клетки $1, \dots, N$

$$g = g_N \rightsquigarrow \mathbb{C}^N = \mathbb{C}\langle V_1, \dots, V_N \rangle \quad e_{ij} V_k = \delta_{jk} V_i \quad \text{⚡⚡⚡⚡}$$

$\deg e_{ij} = C_j - C_i \Rightarrow g = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} g_j$

C_i - номер столбца
 r_i - номер строки

$$e = \sum_{\substack{r_i = r_j \\ C_i = C_j - 1}} e_{ij}$$



$$m = \bigoplus_{j < 0} g_j$$

$$p = \bigoplus_{j \geq 0} g_j$$

$$\chi: m \rightarrow \mathbb{C}$$

$$a \mapsto (e, a)$$

$$\mathcal{Q}_\chi = \mathcal{U}(g) / \mathcal{Y}_\chi \leftarrow \text{левый идеал, порожденный на } a - \chi(a) \text{ для } a \in m$$

Опр. $W(\pi) = \{ x \in \mathcal{Q}_\chi \mid (a - \chi(a))x = 0 \quad \forall a \in m \}$

Лемма.
 $W(\pi) = \{ x \in \mathcal{U}(p) \mid [a, x] \in \mathcal{Y}_\chi \quad \forall a \in m \}$

$$(\text{П.Б.В.} \Rightarrow \mathcal{U}(g) = \mathcal{U}(p) \oplus \mathcal{Y}_\chi)$$

Пример: $\deg e_{ij} = j - i$

1 2 3 4

$$e = e_{34} + e_{23} + e_{12}$$

$$p = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}; \quad m = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla = (0); \quad l = 4$$

$$\deg e_{ij} = C_j - C_i$$

$$\deg e_{12} = 2 - 1 = 1$$

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{matrix}$$

$$\Rightarrow e = 0 \quad p = q$$

$$\deg e_{ij} = 0 \quad m = 0$$

$$W(\pi) = U(q)$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}_{n \times n} \quad l=1$$

Последействие $T_{i,j;k}^{(r)}$

Пусть $\pi = (q_1, \dots, q_e) \Rightarrow p_r := n - q_r - q_{r+1} - \dots - q_e$
 n -высота π $\forall r=1, \dots, e$

$$\tilde{e}_{ij} := (-1)^{c_j - c_i} (e_{ij} + \delta_{ij} p_{c_i})$$

$$\Rightarrow \bullet [\tilde{e}_{ij}, \tilde{e}_{hk}] = (-1)^{c_k - c_i} \delta_{hj} e_{ik} - (-1)^{c_j - c_h} \delta_{ik} e_{hj} =$$

$$= (\tilde{e}_{ik} - \delta_{ik} p_{c_i}) \delta_{hj} - (\tilde{e}_{hj} - \delta_{hj} p_{c_j}) \delta_{ik}$$

$$\bullet \chi(\tilde{e}_{ij}) = \text{Tr} \left(\sum_{\substack{r_h=r_k \\ c_h=c_k-1}} e_{hk} \tilde{e}_{ij} \right) = \text{Tr} \left((-1)^{c_i - c_j} e_{ij} e_{ji} \right) =$$

$$= \begin{cases} -1, & \text{если } r_i = r_j \text{ и } c_i = c_j + 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} k=i \\ h=j \end{matrix}$$

Определение $1 \leq i, j \leq n; r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \{\pm 1\}$

$$T_{i,j;\sigma_1, \dots, \sigma_n}^{(0)} = \delta_{ij} \sigma_i$$

$$T_{i,j;\sigma_1, \dots, \sigma_n}^{(r)} := \sum_{s=1}^r \sum_{\downarrow} \sigma_{r_j} \dots \sigma_{r_{s-1}} \tilde{e}_{i,j_1} \dots \tilde{e}_{i_s,j_s}$$

где $1 \leq i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_s \leq N$ т.е. $(\deg e_{ij} = C_j - C_i + 1)$
 оператор. Коричневая

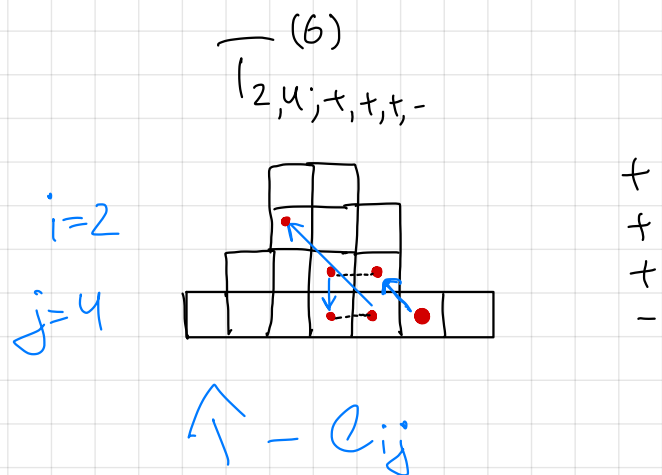
$$\left. \begin{array}{l} \text{i) } \deg e_{i_1 j_1} + \dots + \deg e_{i_s j_s} = r \\ \text{ii) } C_{i_t} \leq C_{j_t} \quad \forall t = 1, \dots, s \end{array} \right\} \overline{T}_{i_1 j_1, \dots, i_s j_s}^{(r)} \in F_r \mathcal{U}(\varphi)$$

$$\text{iii) } \sigma_{r_{j_t}} = + \Rightarrow C_{j_t} < C_{i_{t+1}} \quad \forall t = 1, \dots, s-1$$

$$\text{iv) } \sigma_{r_j} = - \Rightarrow C_{j_t} \geq C_{i_{t+1}} \quad \forall t = 1, \dots, s-1$$

$$\text{v) } r_{i_1} = i \quad r_{j_s} = j$$

$$\text{vi) } r_{j_t} = r_{i_{t+1}} \quad \forall t = 1, \dots, s-1$$



Energy-а выровн

$$\sigma_1 = \dots = \sigma_x = -$$

$$\sigma_{x+1} = \dots = \sigma_n = +$$

$$\overline{T}_{i,j;x}^{(r)} \quad X=0, \dots, n$$

"The most crucial def. in the entire paper"

$$\overline{T}_{i,j;x}^{(r)}(u) := \sum_{r \geq 0} \overline{T}_{i,j;x}^{(r)} u^{-r} \in \mathcal{U}(\varphi)[[u^{-1}]]$$

Пример:

$$\overline{T}_{i,j;x}^{(r)} = \sum_{1 \leq h, k \leq N} \tilde{e}_{hk}$$

$$r_h = i, r_k = j$$

$$C_h = C_k$$

