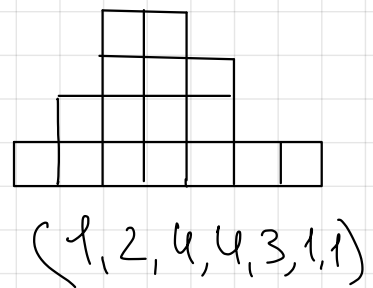


Конструкция:

- Изучаем перемножн $(q_1, \dots, q_n)$
- По перемножн изучаем способ латр. сдвига σ и $W(\pi)$ -матрицу.



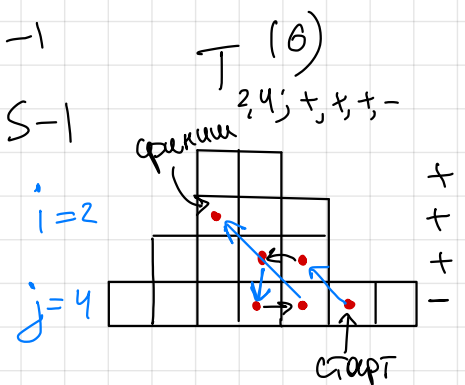
Определим для $1 \leq i, j \leq n$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \{\pm\}$

$$T_{i,j;\sigma_1,\dots,\sigma_n}^{(0)} := \delta_{ij} \sigma_i$$

$$T_{i,j;\sigma_1,\dots,\sigma_n}^{(r)} := \sum_{s=1}^r \sigma_{r_j} \dots \sigma_{r_{j_s-1}} \tilde{e}_{i,j_1} \dots \tilde{e}_{i,j_s} \quad \text{оператор коммутации}$$

где $1 \leq i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_s \leq N$ т.е. $(\deg e_{ij} = c_j - c_{i+1})$:

- $$\left. \begin{array}{l} \text{i) } \deg e_{i_1,j_1} + \dots + \deg e_{i_s,j_s} = r \\ \text{ii) } c_{i_t} \leq c_{j_t} \quad \forall t=1, \dots, s \\ \text{iii) } \sigma_{r_{j_t}} = + \Rightarrow c_{j_t} < c_{i_{t+1}} \quad \forall t=1, \dots, s-1 \\ \text{iv) } \sigma_{r_{j_t}} = - \Rightarrow c_{j_t} \geq c_{i_{t+1}} \quad \forall t=1, \dots, s-1 \\ \text{v) } r_{i_1} = i \quad r_{j_s} = j \\ \text{vi) } r_{j_t} = r_{i_{t+1}} \quad \forall t=1, \dots, s-1 \end{array} \right\} \Rightarrow T_{i,j;\sigma_1,\dots,\sigma_n}^{(r)} \in \text{FrU}(\mathcal{U})$$



Случ-й и случай $\sigma_1 = \dots = \sigma_x = -$ $\Rightarrow T_{i,j;x}^{(r)}$ $x=0, \dots, n$
 $\sigma_{x+1} = \dots = \sigma_n = +$

"The most crucial definition in the entire paper":

$$T_{i,j;x}^{(r)} := \sum_{r \geq 0} T_{i,j;x}^{(r)} u^{-r} \in \mathcal{U}(\mathcal{U})[[u^{-1}]]$$

Пример: $\overline{T}_{ij;x}^{(1)} = \sum_{\substack{1 \leq h, k \leq N \\ r_h = i, r_k = j \\ c_h = c_k}} \tilde{e}_{hk}$

$$\overline{T}_{ij;x}^{(2)} = \sum_{\substack{1 \leq h, k \leq N \\ r_h = i, r_k = j \\ c_h = c_k - 1}} \tilde{e}_{hk} - \sum_{\substack{1 \leq h_1, k_1, h_2, k_2 \leq N \\ r_{h_1} = i, r_{k_2} = j \\ r_{k_1} = r_{h_2} \leq X \\ c_{h_1} = c_{k_1} \geq c_{h_2} = c_{k_2}}} \tilde{e}_{h_1 k_1} \tilde{e}_{h_2 k_2} +$$

$$+ \sum_{\substack{1 \leq h_1, k_1, h_2, k_2 \leq N \\ r_{h_1} = i, r_{k_2} = j \\ r_{k_1} = r_{h_2} > X \\ c_{h_1} = c_{k_1} < c_{h_2} = c_{k_2}}} \tilde{e}_{h_1 k_1} \tilde{e}_{h_2 k_2}$$

Лемма: Пусть $0 \leq X < Y \leq n$

$$1) \overline{T}_{ij;x}(u) = \sum_{k=x+1}^y \overline{T}_{i,k;x}(u) \overline{T}_{k,j;y}(u) \quad \text{npw} \quad x < i \leq y < j \leq n$$

$$2) \overline{T}_{ij;x}(u) = \sum_{k=x+1}^y \overline{T}_{i,k;y}(u) \overline{T}_{k,j;x}(u) \quad \text{npw} \quad x < j \leq y < i \leq n$$

$$3) \overline{T}_{ij;x}(u) = \overline{T}_{ij;y}(u) + \sum_{k,l=x+1}^y \overline{T}_{i,k;y}(u) \overline{T}_{k,l;x}(u) \overline{T}_{l,j;y}(u) \quad \text{npw} \quad y < i, j \leq n$$

$$4) \sum_{k=x+1}^y \overline{T}_{i,k;x}(u) \overline{T}_{k,j;y}(u) = -\delta_{ij} \quad \text{npw} \quad x < i, j \leq y$$

Док-во: обозначим $\xi_{ij} = \tilde{e}_{ij} u^{-\deg e_{ij}}$ (см. i)

1) основная идея: правая часть - сумма мономов вида $\pm (\xi_{i_1 j_1} \dots \xi_{i_r j_r}) (\xi_{k_1 l_1} \dots \xi_{k_s l_s})$ (*)
 где $r \geq 0, s \geq 1$ и мономы в $T_{i, k; x}(u)$ мономы в $T_{k, x; y}(u)$
 ($s \neq 0$ т.к. $T_{k, y; y}^{(0)} = \sum_{i=1}^y \delta_{ki} + \sum_{i=y+1}^n \delta_{ki} = 0$, т.к. $k \leq y$
 $j > y$)

Пусть X - сумма таких мономов с $c_{jr} < c_k$, при $r \geq 1$ и $r_{l_t} \notin \{X+1, \dots, y\} \quad \forall 1 \leq t \leq s$
 Пусть Y - все ост. мономы.

Хотим показать, что $X = T_{i, j; x}(u)$ и $Y = 0$.

Возьмем моном вида (*) из X .

а) такой моном есть в разложении $T_{i, j; x}(u)$ с тем же знаком (т.к. $X \leq y$ и $r_{l_t} \in \{X+1, \dots, y\} \Rightarrow \sigma_{r_{l_t}} = + \quad \forall t=1, \dots, s$)

б) такой моном встречается в X ровно один раз, иначе мы бы могли получить его в другой раз, а именно:

- $\pm (\xi_{i_1 j_1} \dots \xi_{i_r j_r} \xi_{k_1 l_1} \dots \xi_{k_{t+l_t} l_{t+l_t}}) (\xi_{k_{t+l_t+1} l_{t+l_t+1}} \dots \xi_{k_s l_s})$

для $1 \leq t \leq s$, но $r_{l_t} \notin \{X+1, \dots, y\}$ ⚡

- $\pm (\xi_{i_1 j_1} \dots \xi_{i_{u-1} j_{u-1}}) (\xi_{i_u j_u} \dots \xi_{i_r j_r} \xi_{k_1 l_1} \dots \xi_{k_s l_s})$ ⚡

для $1 \leq u \leq r$, но $c_{jr} < c_k$, противоречие с леммой т.к. $r_{jr} \in \{X+1, \dots, y\} \Rightarrow \sigma_{r_{jr}} = -$ ⚡

б) Теперь хотим, чтобы $\forall$ монам

$$\pm \sum p_1 q_1 \dots \sum p_u q_u$$

всп-ца в $T_{i,j;x}(u) \Rightarrow$ всп-ца u в X .

Положим $r \geq 0$ - макс. индекс, т.е.

$\pm \sum p_1 q_1 \dots \sum p_r q_r$ всп-ца в $T_{i,k;x}(u)$ $x < k \leq y$

(такой r существует, т.к. при $r=0$ монам $\pm$ всп-ца в $T_{i,i;x}(u)$)

Заметим, что $C_{q_r} < C_{p_{r+1}}$ и $\forall q_t \notin \{x+1, \dots, y\}$
 $\forall r < t \leq u$

(иначе r выбрано не макс-м).

Тогда (по оп-ю) $\pm \sum p_{r+1} q_{r+1} \dots \sum p_u q_u$ всп-ца в $T_{k,j;y}(u)$

т.е. получили разложение влгд

$$\pm \left(\sum p_1 q_1 \dots \sum p_r q_r \right) \left(\sum p_{r+1} q_{r+1} \dots \sum p_u q_u \right)$$

всп-ца в X .

Остаток является абсолютно алгебраичнм.

Построение эф-х Якобана.

$$\bullet T(u) := \left(T_{i,j;0}(u) \right)_{i,j=1}^n \in \text{Mat}_n(\mathcal{U}(\mathfrak{p})[[u^{-1}]])$$

$$\bullet \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m) - \text{числ. разделение п. } \bigoplus_{a=1}^m \text{Mat}_{\gamma_a}(\dots)$$

$$\bullet T(u) = F(u) D(u) E(u) - \text{разл. Гаусса.}$$

- Разл-е + $\mathcal{D}$ даёт лев. $D_a(u)$ $a=1, \dots, m$
 $F_a(u), E_a(u)$ $a=1, \dots, m-1$
 $\lambda_{a+1} \times \lambda_a$ $\lambda_a \times \lambda_{a+1}$

$$\tilde{D}_a(u) := -D_a(u)^{-1}$$

- $D_{a;i,j}(u) = \sum_{r \geq 0} D_{a;i,j}^{(r)} u^{-r}$ $\tilde{D}_{a;i,j}(u) = \sum_{r \geq 0} \tilde{D}_{a;i,j}^{(r)} u^{-r}$
 $E_{a;i,j}(u) = \sum_{r \geq 0} E_{a;i,j}^{(r)} u^{-r}$ $F_{a;i,j}(u) = \sum_{r \geq 0} F_{a;i,j}^{(r)} u^{-r}$
 $\Rightarrow$ окр-а $D_{a;i,j}^{(r)}, \tilde{D}_{a;i,j}^{(r)}, E_{a;i,j}^{(r)}, F_{a;i,j}^{(r)} \in \mathcal{U}(\mathfrak{p})$

Тер. для произв. $\mathcal{D} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ и всех
 допускаемых a, i, j имеют

$$D_{a;i,j}(u) = \overline{\lambda_1 + \dots + \lambda_{a-1} + i, \lambda_1 + \dots + \lambda_{a-1} + j; \lambda_1 + \dots + \lambda_{a-1}}(u)$$

$$\tilde{D}_{a;i,j}(u) = \overline{\lambda_1 + \dots + \lambda_{a-1} + i, \lambda_1 + \dots + \lambda_{a-1} + j; \lambda_1 + \dots + \lambda_a}(u)$$

$$E_{a;i,j}(u) = \overline{\lambda_1 + \dots + \lambda_{a-1} + i, \lambda_1 + \dots + \lambda_a + j; \lambda_1 + \dots + \lambda_a}(u)$$

$$F_{a;i,j}(u) = \overline{\lambda_1 + \dots + \lambda_a + i, \lambda_1 + \dots + \lambda_{a-1} + j; \lambda_1 + \dots + \lambda_a}(u)$$

Док-во: а) $\tilde{\mathcal{D}}$ следует из $\mathcal{D}$ по $\Lambda(u)$

при $x = \lambda_1 + \dots + \lambda_{a-1}$ и $y = \lambda_1 + \dots + \lambda_a$

б) Доказываем индукцией по длине разд. m
 $m=1$ — тривиально.

б) Мыш индукция: пусть для $\mathcal{D} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ док-ли.

$$\tilde{D}_a(u) = \left(\overline{\lambda_1 + \dots + \lambda_{a-1} + i, \lambda_1 + \dots + \lambda_{a-1} + j; \lambda_a + \dots + \lambda_{a-1}}(u) \right)_{i,j=1}^{\lambda_a}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_a(u) &= (\overline{v}_1 + \dots + v_{a-1} + i, v_1 + \dots + v_a + j, v_1 + \dots + v_a(u))_{i, \bar{j}=1}^{i=v_a, \bar{j}=v_{a+1}} \\ \vec{F}_a(u) &= (\overline{v}_1 + \dots + v_a + i, v_1 + \dots + v_{a-1} + j, v_1 + \dots + v_a(u))_{i, \bar{j}=1}^{i=v_{a+1}, \bar{j}=v_a} \end{aligned}$$

Положим $v_b = \alpha + \beta$ где нек-то $1 \leq b \leq m$
 $\alpha, \beta \geq 1$

$$\mu := (v_1, \dots, v_{b-1}, \alpha, \beta, v_{b+1}, \dots, v_m).$$

Опр-е матрицы A, B, C, D соотв-но:

$$A = (\overline{v}_1 + \dots + v_{b-1} + i, v_1 + \dots + v_{b-1} + j, v_1 + \dots + v_{b-1}(u))_{i, \bar{j}=1}^{\alpha}$$

$$B = (\overline{v}_1 + \dots + v_{b-1} + i, v_1 + \dots + v_{b-1} + \alpha + j, v_1 + \dots + v_{b-1} + \alpha(u))_{i, \bar{j}=1}^{i=\alpha, \bar{j}=\beta}$$

$$C = (\overline{v}_1 + \dots + v_{b-1} + \alpha + i, v_1 + \dots + v_{b-1} + j, v_1 + \dots + v_{b-1} + \alpha(u))_{i, \bar{j}=1}^{i=\beta, \bar{j}=\alpha}$$

$$D = (\overline{v}_1 + \dots + v_{b-1} + \alpha + i, v_1 + \dots + v_{b-1} + \alpha + j, v_1 + \dots + v_{b-1} + \alpha(u))_{i, \bar{j}=1}^{\beta}$$

Применим $\Lambda(1-3)$ для $X = v_1 + \dots + v_{b-1}$
 $Y = v_1 + \dots + v_{b-1} + \alpha \Rightarrow$

$$\vec{D}_b(u) = \left(\begin{array}{c|c} A & AB \\ \hline CA & D + CAB \end{array} \right)_{\substack{\alpha \times \alpha \\ \beta \times \beta}} = \begin{pmatrix} I_{\alpha} & 0 \\ C & I_{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{\alpha} & B \\ 0 & I_{\beta} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ по лемме с помощью о парад-х
 Эквивалент (представить $\vec{D}_b(u)$ в разл. Гаусса
 и затем эти матрицы) получаем:

$$\vec{\Delta}_a(u) = (\overline{\mu}_1 + \dots + \mu_{a-1} + i, \mu_1 + \dots + \mu_a + j, \mu_1 + \dots + \mu_a(u))_{i, \bar{j}=1}^{\mu_a}$$

$$\vec{E}_a(u) = (\overline{\mu}_1 + \dots + \mu_{a-1} + i, \mu_1 + \dots + \mu_a + j, \mu_1 + \dots + \mu_a(u))_{i, \bar{j}=1}^{i=\mu_a, \bar{j}=\mu_{a+1}}$$

$$\vec{F}_a(u) = (\overline{\mu}_1 + \dots + \mu_a + i, \mu_1 + \dots + \mu_a + j, \mu_1 + \dots + \mu_a(u))_{i, \bar{j}=1}^{i=\mu_{a+1}, \bar{j}=\mu_a}$$

Lemma

$$V = \{1^n\}$$

$$D_i^{(r)} := D_{i,1,1}^{(r)} = \overline{T_{i,i,i-1}}^{(r)}$$

$$\tilde{D}_i^{(r)} := \tilde{D}_{i,1,1}^{(r)} = \overline{T_{i,i,i}}^{(r)}$$

$$E_i^{(r)} := E_{i,1,1}^{(r)} = \overline{T_{i,i+1,i}}^{(r)}$$

$$F_i^{(r)} := F_{i,1,1}^{(r)} = \overline{T_{i+1,i,i}}^{(r)}$$