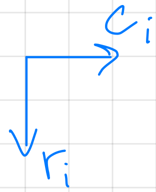
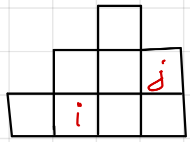
1) Определение пирамид + пример
2) Построение по пирамиде матр. сдвига и наоборот
3) Напоминание опр-я W-алгебр.
4) Опр-е $T_{i;j;k}^{(r)}$ + пример $r=1,2$
5) 4 формулы для $T_{i;j;k}(u)$ (Лемма 9.2)
6) Теор. 9.3 + следствие 9.4 (связь с янгианом)

Опр. Пирамида $\Pi\ (q_1,\dots,q_l)$ это упор-й набор целых неотр. чисел, т.ч. $q_1<q_2<\dots<q_{k-1}<q_k = q_k>q_{k+1}>\dots>q_{l-1}>q_l$



$\Pi =$ 

$(1,2,3,2)$

$\deg e_{ij} = 2$

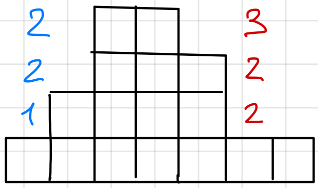
$1\le p_1\le\dots\le p_n = l$ – длины строк ($n=\max_i q_i$ – высота)

r_i = номер строки c_i = номер столбца

Связь со сдвинут. усеч. Якобианами

$k=3$

$$l=7,\ \sigma=\begin{pmatrix}0&1&1&3\\0&0&0&2\\1&1&0&2\\2&2&1&0\end{pmatrix} \longleftrightarrow \quad n=4$$

$\Pi =$ 

$q=(1,2,4,4,3,1,1)$

$p=(2,3,4,7)$

- $\sigma=(s_{ij})_{n\times n} \rightsquigarrow (p_1,\dots,p_n)$ $p_i = l - s_{in} - s_{ni}$

  $l\ge s_{1n}+s_{n1}$

  $\Pi =$ i-я строчка длины p_i „окружена" слева s_{ni} и справа s_{in} „пустотами"

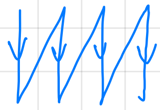
- Π $(q_1,\dots,q_l)$ высоты n $\rightsquigarrow$ $\sigma=(s_{ij})_{n\times n}$

$$s_{ij}=\begin{cases}\#\{c=1,\dots,k : i>n-q_c\ge j\} & i\ge j\\ \#\{c=k+1,\dots,l : i\le n-q_c<j\} & i\le j\end{cases}$$

k – „вершина"

Напоминание о W-алгебрах

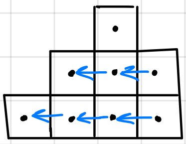
Пусть $N=\sum q_i$ $\rightsquigarrow$ занумеруем клеточки $1,\dots,N$



$\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}_N \curvearrowright \mathbb{C}^N=\mathbb{C}\langle v_1,\dots,v_N\rangle$ $\quad e_{ij}v_k=\delta_{jk}v_i$

$\deg e_{ij}=c_j-c_i \quad\Rightarrow\quad \mathfrak{g}=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_j$

$$e=\sum_{\substack{r_i=r_j\\ c_i=c_j-1}} e_{ij}$$



e

$\mathfrak{m}=\bigoplus_{j<0}\mathfrak{g}_j \qquad \mathfrak{p}=\bigoplus_{j\geq 0}\mathfrak{g}_j \qquad \chi:\mathfrak{m}\to\mathbb{C}$

$a\mapsto (e,a)$

$Q_\chi=U(\mathfrak{g})/I_\chi$ — левый идеал, порожд-й $a-\chi(a)$ для $a\in\mathfrak{m}$

Опр. $W(\pi)=\{X\in Q_\chi : (a-\chi(a))X=0\ \ \forall a\in\mathfrak{m}\}$

Свойст.

$$W(\pi)=\{x\in U(\mathfrak{p}) : [a,x]\in U(\mathfrak{g})I_\chi\ \ \forall a\in\mathfrak{m}\}$$

(ПБВ $\Rightarrow$ $U(\mathfrak{g})=U(\mathfrak{p})\oplus U(\mathfrak{g})I_\chi$)

Построение $T^{(r)}_{i,j;k}$

Фикс. $\pi=(q_1,\dots,q_\ell)$ $\Rightarrow$ $\rho_r:=n-q_r-q_{r+1}-\dots-q_\ell$ $\quad\forall r=1,\dots,\ell$

$$\tilde{e}_{ij}:=(-1)^{c_j-c_i}(e_{ij}+\delta_{ij}\rho_{c_i})$$

$$\Rightarrow [\tilde{e}_{ij},\tilde{e}_{hk}]=(-1)^{c_k-c_i}\delta_{hj}e_{ik}-(-1)^{c_j-c_h}\delta_{ik}e_{hj}=$$

$$=(\tilde{e}_{ik}-\delta_{ik}\rho_{c_i})\delta_{hj}-(\tilde{e}_{hj}-\delta_{hj}\rho_{c_j})\delta_{ik}$$

$$\chi(\tilde e_{ij}) = \mathrm{Tr}\Big(\sum_{\substack{r_h=r_k\\ c_h=c_k-1}} e_{hk}\cdot \tilde e_{ij}\Big) = \mathrm{Tr}\big((-1)^{c_i-c_j} e_{ij}\, e_{ji}\big) \Rightarrow$$

$(k=i;\ h=j)$

$$= \begin{cases} -1, & \text{если } r_i=r_j \text{ и } c_i=c_j+1 \\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

Определим для $1\le i,j\le N$, $r\in\mathbb{Z}_+$ и $\sigma_1,\dots,\sigma_n\in\{\pm\}$

$$T^{(0)}_{i,j;\sigma_1,\dots,\sigma_n} := \delta_{ij}\sigma_i$$

$$T^{(r)}_{i,j;\sigma_1,\dots,\sigma_n} := \sum_{s=1}^{r} \sigma_{r_{j_1}}\cdots\sigma_{r_{j_{s-1}}}\, \tilde e_{i_1j_1}\cdots\tilde e_{i_sj_s}$$

фильтр. Каждана

где $1\le i_1,\dots,i_s,j_1,\dots,j_s\le N$ т.ч. $(\deg e_{ij} = c_j-c_i+1)$:

i) $\deg e_{i_1j_1}+\dots+\deg e_{i_sj_s} = r$

ii) $c_{i_t}\le c_{j_t}$ $\forall t=1,\dots,s$

iii) $\sigma_{r_{j_t}}=+ \Rightarrow c_{j_t}<c_{i_{t+1}}$ $\forall t=1,\dots,s-1$

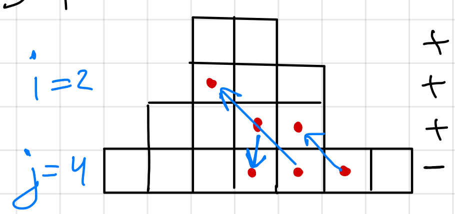
iv) $\sigma_{r_{j_t}}=- \Rightarrow c_{j_t}\geq c_{i_{t+1}}$ $\forall t=1,\dots,s-1$

v) $r_{i_1}=i$ $\quad r_{j_s}=j$

vi) $r_{j_t}=r_{i_{t+1}}$ $\forall t=1,\dots,s-1$

$\Rightarrow T^{(r)}_{i,j;\sigma_1,\dots,\sigma_n}\in F_rU(\mathfrak{p})$

$T^{(5)}_{2,4;+,+,+,-}$



Спец-й случай $\sigma_1=\dots=\sigma_x=-$, $\sigma_{x+1}=\dots=\sigma_n=+$ $\Rightarrow T^{(r)}_{i,j;x}$ $\quad x=0,\dots,n$

„The most crucial definition in the entire paper":

$$T_{i,j;x} := \sum_{r\geq 0} T^{(r)}_{i,j;x}\, u^{-r} \in U(\mathfrak{p})[[u^{-1}]]$$

Пример: $$T^{(1)}_{i,j;x} = \sum_{\substack{1\le h,k\le N \\ r_h=i,\ r_k=j \\ c_h=c_k}} \tilde{e}_{hk}$$

$$T^{(2)}_{i,j;x} = \sum_{\substack{1\le h,k\le N \\ r_h=i,\ r_k=j \\ c_h=c_k-1}} \tilde{e}_{hk} - \sum_{\substack{1\le h_1,k_1,h_2,k_2\le N \\ r_{h_1}=i,\ r_{k_2}=j \\ r_{k_1}=r_{h_2}\le x \\ c_{h_1}=c_{k_1}\ge c_{h_2}=c_{k_2}}} \tilde{e}_{h_1k_1}\tilde{e}_{h_2k_2} +$$

$$+ \sum_{\substack{1\le h_1,k_1,h_2,k_2\le N \\ r_{h_1}=i,\ r_{k_2}=j \\ r_{k_1}=r_{h_2}> x \\ c_{h_1}=c_{k_1}< c_{h_2}=c_{k_2}}} \tilde{e}_{h_1k_1}\tilde{e}_{h_2k_2}$$

Лемма: Пусть $0\le x<y\le n$

1) $T_{i,j;x}(u) = \sum_{k=x+1}^{y} T_{i,k;x}(u)\, T_{k,j;y}(u)$ при $x<i\le y<j\le n$

2) $T_{i,j;x}(u) = \sum_{k=x+1}^{y} T_{i,k;y}(u)\, T_{k,j;x}(u)$ при $x<j\le y<i\le n$

3) $T_{i,j;x}(u) = T_{i,j;y}(u) + \sum_{k,l=x+1}^{y} T_{i,k;y}(u)\, T_{k,l;x}(u)\, T_{l,j;y}(u)$ при $y<i,j\le n$

4) $\sum_{k=x+1}^{y} T_{i,k;x}(u)\, T_{k,j;y}(u) = -\delta_{ij}$ при $x<i,j\le y$

Док-во: обозначим $\xi_{ij} = \tilde{e}_{ij}\, u^{-\deg e_{ij}}$ (см. i)

1) Основная идея: правая часть - сумма мономов вида $\pm(\xi_{i_1j_1}\cdots\xi_{i_rj_r})(\xi_{k_1l_1}\cdots\xi_{k_sj_s})$ (*)

где $r\geq 0$, $s\geq 1$ и появл. в $T_{i,k;x}(u)$ появл. в $T_{k,j;y}(u)$

($s\neq 0$ т.к. $T^{(0)}_{k,j;y} = -\sum_{i=1}^{y} S_{kj} + \sum_{i=y+1}^{n} S_{kj} = 0$, т.к. $k\leq y$, $j>y$)

Пусть X - сумма таких мономов с $C_{j_r} < C_{k_1}$ при $r\geq 1$ и $r_{l_t} \notin \{x+1,\dots,y\}$ $\forall\, 1\leq t<s$

Пусть Y - все ост. мономы.

Хотим показать, что $X = T_{i,j;x}(u)$ и $Y=0$.

Возьмём моном вида (*) из X.

а) такой моном есть в разложении $T_{i,j;x}(u)$ с тем же знаком (т.к. $x\leq y$ и $r_{l_t}\in\{x+1,\dots,y\} \Rightarrow \sigma_{r_{l_t}} = +$ $\forall t=1,\dots,s$

б) такой моном встр-ся в X ровно один раз: