

Замечание: $X = X_s + X_n$ и $[X_s, X_n] = 0$

Это верно над совершен. полем K , т.е.

любое алт. расщ. K сепарабельно, например

а) $\text{char } K = 0$

б) $|K| < \infty$

НЕ совершен. поля

а) $\mathbb{F}_q(x)$

б) $K(x^{\frac{1}{p}})$ $\text{char } K = p$

Расщ.-и X над $\bar{K} \supset K$

$$X = X_s + X_n$$

Возьмем абт.-и $\bar{K}$ над K $\sigma(X) = \sigma(X_s) + \sigma(X_n)$

$\sigma(X) = X \Rightarrow$ из логич.-ти $\sigma(X_s) = X_s, \sigma(X_n) = X_n \Rightarrow$

Теор. (D.M.) Пусть $\mathfrak{g}$ - нильпот. алгебра Ли / $\mathfrak{g}$
 $u \in \mathfrak{g}$ - регулярн., то $\exists h, f \in \mathfrak{g}$ т.з.
 р.п. н.

$C\{h, f, e\} \simeq \mathfrak{sl}_2$ - тройка.

Сколько свободных в выборе троек?

Теор. (Костанта) Пусть (e, f, h) и (e, f', h') - две
 разл. $\mathfrak{sl}_2$ -тройки. Тогда $\exists g \in Z_G(e) \subset G$: $Ad_g.h = h'$
 $Ad_g.f = f'$

Лемма 1: Пусть P -лев. группа с лев. идеалом $\mathfrak{p}$ и
 V - конечномерное пр-е P и $E \subset V$ P -лев. инвариант.

Тогда: 1) Если P свободна, то $\exists \forall E \forall v \in V$:

a) $V + E \subset V$ P -лев.

b) $\mathfrak{p} \cdot V \subset E$

v -орбит.

$v+E$ P -инв.

2) Если $\mathfrak{p} \xrightarrow{x \mapsto x \cdot v} E$ сюръективно, то $P \cdot V$ отк.
 по Зап. нильпот. алгебры $V + E$.

Док-во: 1) a) $\Rightarrow$ b) $P \cdot V \subset V + E \Rightarrow \mathfrak{p} \cdot V \subset E$
 где $\mathfrak{p}$ - идеал

b) $\Rightarrow$ a) Пусть $x \in \mathfrak{p}$, соотв. $\sum x$ век. поле на V

Тогда $\forall u \in V + E$

$P \cap V$

$\mathfrak{p} \rightarrow \text{Vect}(V)$

• $\sum x(u) = x \cdot u \in x(V + E) = xV + xE \subset \mathfrak{p}V + xE \subset E$
 $\xleftarrow{E \text{ инвариант}}$ $\xleftarrow{E \text{ не } P\text{-инв.}}$

2) gmp-e, lemma 1.4.12 Chriss - Ginzburg 

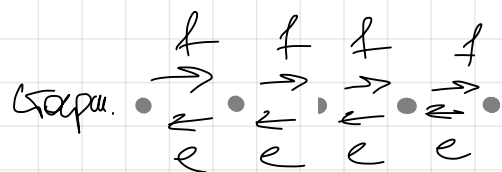
Grb. $\text{ad}_h: Z_g(e) \rightarrow Z_g(e)$ unique resp. c. zh.

$$[z_i, z_j] \subset z_{i+j}$$

Пусть $V \subset Z_G(e)$ — подгруппа и группа. Рассмотрим.

Д) Ассор. нр-во $h + u$ инв-но орл. U , False
тоо $h + u = U \cdot h$ - егнхсб. U -орбса

гор-во: а)



- $n=0$ Triv. $n=0$, He lässt $\in \text{Im}(\phi)$
- Σ

б) $[u, h] \subset u \Rightarrow$ Лемма 1.1 даёт инв-т;
 $[u, h] = u \Rightarrow$ из леммы 1.2 $\Rightarrow U \cdot h$ отпр.

и плотна в $h + u$, но она замкн., т.к. это орбита унитарной группы U

Факт: орбита унитар. гр. (на $\mathcal{H}$ с $\langle \cdot, \cdot \rangle$) замкнута.

Док-во: Пусть $U \cdot x$ — не замкн. орбита,

$I = I(K[U \cdot x] \setminus U \cdot x)$ — идеал, равный нулю на границе. I инв-т отн. $U \Rightarrow$ имеется конечномерное подпр-е $\Rightarrow$ по теор. Ли имеется ненулевой собственный вектор u он инвариантен, а это невозможно, т.к. тогда он постоянная функция на $\overline{U \cdot x}$, причем нулевая.

Док-во (теор. Константа): $(e, f, h) \quad (e, f', h')$

1) $h' = h \stackrel{?}{\Rightarrow} f' = f$

действ-но, $[f', e] = -h' = -h = [f, e] \Rightarrow$

$[f' - f, e] = 0$ т.е. $f' - f \in Z_{\mathfrak{g}}(e)$ но $f', f \in \mathfrak{g}_{-2}$

$\Rightarrow f' - f \in Z_{-2} = 0 \Rightarrow f' - f = 0$

2) $[h', e] = [h, e] = 2e \Rightarrow h' - h \in Z_{\mathfrak{g}}(e) = \ker(e)$

$h' - h = [e, f' - f] \in \text{Im}(e) \Rightarrow h' - h \in \ker(e) \cap \text{Im}(e) \Rightarrow$

$h' - h \in u \Rightarrow$ по 12.2 $\exists u \in U : h' = u h u^{-1} \Rightarrow$

$$e = u^{-1}eu \quad h = u^{-1}h'u \quad f'' = u^{-1}f'u$$

$u (e, h, f'')$ - тоже sl_2 -тройка для $e \Rightarrow$
по пункту (i) $f'' = f$ 

Следствие: Кильотектские орбиты в $\mathfrak{g}$
в факторе с классами G -сопр-ти 
 $sl_2 \rightarrow \mathfrak{g}$

$$(e, f, h)$$

$$(e, f', h')$$

Теор. (Мальцева) $(e, h, f) \quad (e', h, f') \Rightarrow$

$$\exists g \in Z_G^\circ(h) \subset G: ge = e' \quad \text{и} \quad gf = f'$$

доказ: $Z_G(h)$ орбиты e и e' открыты и непересекаются

в $\mathfrak{g}_2 \Rightarrow$ пересек-ся $\Rightarrow$ совпадают.

$$\left(\begin{array}{l} [g_0, g_2] \subset \mathfrak{g}_2 \\ [g_0, e] = \mathfrak{g}_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{вспомогат. диаграмма} \\ \begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{f} & \xrightarrow{f} & \xrightarrow{f} & \\ \bullet & & \bullet & & \bullet \\ & \xleftarrow{e} & \xleftarrow{e} & \xleftarrow{e} & \end{array} \\ \Rightarrow \text{применяем лемму 1 к} \\ V = \mathfrak{g}, \quad E = \mathfrak{g}_2, \quad P = Z_G^\circ(h) \end{array} \right\}$$

$\uparrow$
св. конт-роль

Следствие: Число кильотектских орбит конечно. 

Доказ: по теор. Костанта и. считать, что

$h \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  по лемме Картана  класс
и по теор. Мальцева sl_2 -тройки

опр. однократно.

$sl_2 \curvearrowright \mathfrak{g}$ (присоед-но) $\Rightarrow$ все веса целые
и не больше $\dim \mathfrak{g}$ (по модулю)

т.е. $\langle h, x \rangle \in \mathbb{Z}$ и $|\langle h, x \rangle| \leq \dim \mathfrak{g} \quad \forall$ корня
содерж-ся

Т.к. корни порождают $\mathfrak{g}^* \Rightarrow$ имеем
конечное число вер-б для $h \Rightarrow$ кон. число

sl_2 -тр-к. $\Rightarrow$ кон. число нильн. орбит. 

• Сколько нильн.-х орбит в sp_{2n} ?

Имеется ст-я представ-е $(\mathbb{C}^{2n}, (\cdot, \cdot))$

$$sl_2 \hookrightarrow sp_{2n} \curvearrowright \mathbb{C}^{2n} \Rightarrow sl_2 \curvearrowright (\mathbb{C}^{2n}, (\cdot, \cdot))$$

Имеется $\mathbb{C}^{2n} = \bigoplus_{\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} V_{\lambda_i}^{\oplus k_i}$, т.е. можно указать

при каждом λ_i, k_i на $V_{\lambda_i}^{\oplus k_i}$ есть инв-я

какая группа т.к. группа на $\mathbb{C}^{2n}$ состоит
с $(\mathbb{C}^{2n})^* = \bigoplus_{\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} V_{\lambda_i}^{\oplus k_i}$ т.к. $V_{\lambda_i}^* \simeq V_{\lambda_i}$ как sl_2 -мод.

$\text{Hom}_{sl_2}(V_{\lambda_i}, V_{\lambda_j}) = \begin{cases} \mathbb{C} & \lambda_i = \lambda_j \\ 0 & \lambda_i \neq \lambda_j \end{cases}$ и это изом.-н
 sl_2 -мод, т.к.

срочная (,) инв-ка

Нужно проверить что срочная суж-ся

$$V_{2k-1} \text{ и } V_{2k}^{\oplus 2}$$

$$\dim V_\lambda = \lambda + 1$$

Итог: n -х орбит в $\mathbb{P}^{2n}$ столько же, сколько разбиений $2n$, т.е. нечётные числа входят чётное число раз.

Итог: n -х орбит в $\boxed{\mathbb{O}_n}$ столько же, сколько разбиений n , т.е. чётные числа входят чётное число раз.

К.Пример (и Р. Н.) $k = \mathbb{F}_2(x) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\chi_A(t) = t^2 - x = (t - x^{\frac{1}{2}})^2 \quad \text{какие с.в.?$$

Пр-во с/в очевидно $\Rightarrow A \sim \begin{pmatrix} x^{\frac{1}{2}} & 1 \\ 0 & x^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & x^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = A_s \text{ — не матр. над } k$$

Оператор уник-я на $x^{\frac{1}{2}}$ в расширении $\mathbb{F}_2(x^{\frac{1}{2}})$.