Напоминание из Т.П.

- Всё над $\mathbb{C}$ $\mathfrak{g}$ – п/п алгебру Ли

Опр. Алг. Ли $\mathfrak{g}$ наз-ся полупростой, если Форма Киллинга $K(x,y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_x)$ невырождена;

редуктивной, если она имеет представление, в котором форма невырождена $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{ss} \oplus \mathfrak{d}$ (п/п, абелева)

Примеры: 1) $\mathfrak{sl}_n$ – п/п ; $\mathfrak{gl}_n$ – редуктивная

2) $\mathfrak{so}_n$, $\mathfrak{sp}_{2n}$, $E_{6,7,8}$, G_2, F_4 – п/п алгебры

3) $\mathfrak{sl}_2 = \mathbb{C}\{e,f,h\}$ $[e,f]=h$ $[h,e]=2e$ $[h,f]=-2f$

- Конечномерные представл. $\mathfrak{sl}_2$ над $\mathbb{C}$:

$\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{C}_1[X,Y] =: V_1$ – линейные многочлены (двумерное)

$e = X\partial_Y$

$f = Y\partial_X$ $\mathfrak{sl}_2 \curvearrowright \mathbb{C}[X,Y] \supset \mathbb{C}_d[X,Y]$ (однор. степени d)

$h = X\partial_X - Y\partial_Y$

$V_d = S^d V_1 \simeq \mathbb{C}_d[X,Y]$ – $d+1$ мерное представл.

$\mathfrak{sl}_2$ со старшим весом d

Другие к/м конеч-х пр-й нет.

Все веса целые

Теор. (Разложение Жордана) Пусть $X \in End(V)$, $\dim V < \infty$

1) $\exists!\ X_s, X_n \in End(V)$: $X = X_s + X_n$ и $[X_s, X_n] = 0$

(X_s — п/п, X_n — нильп.)

2) X_s и X_n являются многочленами (без св. члена) от X. В частности $[X, Y] = 0 \Rightarrow [X_s, Y] = [X_n, Y] = 0$

и X-инв. подпр-ва являются X_s и X_n- инв-ми

Теор. Пусть $X \in \mathfrak{g}$. Тогда $\exists!\ X_s, X_n \in \mathfrak{g}$: (X_s — п/п, X_n нильп)

$X = X_s + X_n$ и $[X_s, X_n] = 0$ и разложение сохр-ся в представлениях. $\rho(X) = \rho(X_s) + \rho(X_n)$ - Р.Н! для $\rho(X)$

Опр $X \in \mathfrak{g}$ наз-ся полупростым (нильпотентным), если ad_X полупрост (нильп.)

Теор. (Джекобсона Морозова) Пусть $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$, $e \in \mathfrak{g}$ – нильпотент. Тогда $\exists h, f \in \mathfrak{g}$: $\mathbb{C}\langle e, f, h\rangle \simeq \mathfrak{sl}_2$ – тройка
(пара нильп.)

Пример: $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ $\quad e = \begin{pmatrix} J_{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_k} \end{pmatrix}$ $\quad J_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times m}$

$$h = \begin{pmatrix} m-1 & & & 0 \\ & m-3 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -m+1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ m-1 & \ddots & & 0 \\ & 2(m-2) & \ddots & \\ 0 & & 2(m-2) & 0 \\ & & & (m-1) \end{pmatrix}$$

Док-во: 1) Смотрим на $Z_{\mathfrak{g}}(e)$ и сводим к случаю когда он состоит только из нильп.

$X \in Z_{\mathfrak{g}}(e)$ $\quad X = X_s + X_n$ $\quad X_s \neq 0$, имеем $[X, e] = 0$

$\Rightarrow [X_s, e] = 0$ т.е. $X_s \in Z_{\mathfrak{g}}(e)$ и $Z_{\mathfrak{g}}(X_s) =: \mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ – собств. и редуктивная.

Ограничение формы на $\mathfrak{r}$ невырождено

$\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_\alpha$ $\quad \mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \mathrm{ad}_{X_s} X = \alpha X\}$, $\mathfrak{r} = \mathfrak{g}_0$

$(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_\beta) = 0 \quad \beta \neq 0$

$(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) \neq 0 \iff \alpha = -\beta$ (симв-ть формы)

Имеем $e \in Z_{\mathfrak{g}}(X_s) = \mathfrak{r} = \mathfrak{r}_{ss} \oplus \mathfrak{r}_a \Rightarrow e \in \mathfrak{r}_{ss}$

(т.к. нильпотент)

и $\dim \mathfrak{r}_{ss} < \dim \mathfrak{g}$

Почему?

Смотрим на $Z_{\mathfrak{g}}(X_s)$ и $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \text{ корень}} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{h}$, X_s

$Z_{\mathfrak{g}}(X_s) = \bigoplus_{\alpha(X_s)=0} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{h}$

$Z_\Sigma \subset \mathfrak{h}$ – состоит из п/п элементов.

$e = h + X \quad h \in Z_\Sigma \quad X \in \Sigma_{ss}$ Хотим $h=0$?

$X = e - h$ и $[e,h]=0$, т.е. это разл. Жордана
и п/п

$\Rightarrow h = 0$

---

2) Ищем п/п $h \in \mathfrak{g}$: $[h,e] = 2e$

а) $e \in \mathfrak{g}$ – нильпотент $\Rightarrow$ $(e, Z_{\mathfrak{g}}(e)) = 0 \Leftrightarrow$

$\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_e \mathrm{ad}_x) = 0 \quad \forall x \in Z_{\mathfrak{g}}(e)$

Действ-но, $[\mathrm{ad}_e, \mathrm{ad}_x] = 0 \Rightarrow (\mathrm{ad}_e \mathrm{ad}_x)^k = \mathrm{ad}_e^k \mathrm{ad}_x^k = 0$

для $k \gg 0$ (т.к. ad_e – нильпотент) $\Rightarrow \mathrm{ad}_e \mathrm{ad}_x$ – нильп.

$\Rightarrow \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_e \mathrm{ad}_x) = 0$, что и требовалось.

б) Сущ. h эквив-но $e \in \mathrm{Im}(\mathrm{ad}_e)$

$\mathrm{ad}_e = [e, \cdot]$

Т.к. $(\mathrm{ad}_e X, Y) = -(X, \mathrm{ad}_e Y) \Rightarrow$

$\mathrm{Im}(\mathrm{ad}_e) = \ker(\mathrm{ad}_e)^\perp$, т.к. Пусть $X \in \mathrm{Im}(\mathrm{ad}_e)$, $Y \in \ker(\mathrm{ad}_e)$

$(X,Y) = ([e,Z], Y) = -(Z, [e,Y]) = 0$ $\quad X = [e,Z]$

и $\dim \mathrm{Im}(\mathrm{ad}_e) = \dim(\ker(\mathrm{ad}_e))^\perp$

$\mathrm{Im}(\mathrm{ad}_e) = \ker(\mathrm{ad}_e)^\perp$ т.е. $e \in \mathrm{Im}(\mathrm{ad}_e) \Leftrightarrow (e, Z_{\mathfrak{g}}(e)) = 0$

т.к. $Z_{\mathfrak g}(e) = \ker(\mathrm{ad}_e)$. $\qquad [h,e]=2e \qquad$ редукт $(\mathfrak g)$

$h = h_s + h_n \Rightarrow \mathrm{ad}_h e = \mathrm{ad}_{h_s} e = 2e$, т.к. $\mathrm{ad}_{h_n} e = 0$

$h \rightsquigarrow h_s$ — искомый

3) $\mathfrak g = \bigoplus \mathfrak g_\alpha \qquad \mathfrak g_\alpha = \{X \in \mathfrak g : \mathrm{ad}_h X = \alpha X\}$

Имеем $h \in \mathfrak g_0$; $e \in \mathfrak g_2$ и $\mathrm{ad}_h \mathrm{ad}_e = \mathrm{ad}_e (2 + \mathrm{ad}_h)$

$\Rightarrow \mathrm{ad}_e : \mathfrak g_\alpha \to \mathfrak g_{\alpha+2}$. Ищем $f \in \mathfrak g_{-2}$: $\mathrm{ad}_e f = h$

$\Leftrightarrow h \in \mathrm{Im}(\mathrm{ad}_e)$ и возьмём его комп-ту из $\mathfrak g_{-2}$

$\Leftrightarrow (h, Z_{\mathfrak g}(e)) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_h \mathrm{ad}_X) = 0 \quad \forall X \in Z_{\mathfrak g}(e)$

Хотим $[h, Z_{\mathfrak g}(e)] \subset Z_{\mathfrak g}(e)$

Пусть $Y \in Z_{\mathfrak g}(e)$

$$[[h,Y],e] = 0 = -[\underbrace{[Y,e]}_{0},h] - [\underbrace{[e,h]}_{-2e},Y]$$

$\Rightarrow \mathbb C h + Z_{\mathfrak g}(e) \subset \mathfrak g$ — подалгебра Ли. И она разрешима, т.к. $Z_{\mathfrak g}(e)$ состоит из нильп. $\Rightarrow$ по Т. Энгеля она нильп. и по теор. Ли, т.к. $\mathbb C h + Z_{\mathfrak g}(e)$ разрешима $\Rightarrow$ ad_X верхнетр. $\forall X \in \mathbb C h + Z_{\mathfrak g}(e) \Rightarrow$

ad_Y для $Y \in Z_{\mathfrak g}(e)$ — строго верхнетреуг.

$\Rightarrow \operatorname{Tr}(\operatorname{ad}_h \operatorname{ad}_x) = 0$

↑ строго в/тр.

ЧТД.

Сколько свободы в выборе sl_2-троек?

1) (e,f,h) (e,f',h') $\Rightarrow \exists g \in Z_G(e) \subset G$

т.ч. $gh = h'$ и $gf = f'$ $\Rightarrow$ будут однозначны

2) (e,h,f) (e',h,f') $\exists g \in Z_G(h) \subset G$: $ge = e'$

$gf = f'$

Факт Классов сопр-ти sl_2-троек столько же, сколько нильп-х орбит. ($\Rightarrow$ из (1))

Факт Нильп-х орбит конечное число ($\Rightarrow$ (2))

(используя Т.П. sl_2)