Часть 2: Изоморфизмы между колчанными многообразиями и срезами в аффинном грассманиане

$d = (d_1, .., d_{n-1}) \; : \; n = \sum_{i=1}^{n-1} i d_i \, .$

$a = (a_1, \dots, a_n) = (1, .., 1)$

$a_1 = d_1 + \dots + d_{n-1} - v_1$

$a_2 = d_2 + \dots + d_{n-1} - v_2 + v_1$

$\vdots$

$a_i = d_i + \dots + d_{n-1} - v_i + v_{i-1}$

$\vdots$

$v_1 = d_1 + \dots + d_{n-1} - 1$

$v_2 = d_2 + \dots + d_{n-1} - 1 + v_1 =$

$= d_1 + \dots + d_{n-1} + d_2 + \dots + d_{n-1} - 2$

$\vdots$

$v_i = d_1 + \dots + d_{n-1} + d_2 + \dots + d_{n-1} + \dots +$

$+ d_i + \dots + d_{n-1} - i$

$\vdots$

ADHM описание:

Обозначим за $\mathrm{Bun}^{a}_{GL_m}(\mathbb{A}^2)$ пространство модулей гладких GL_m-расслоений на $\mathbb{P}^2$ с тривиализацией на прямой $l_\infty \subset \mathbb{P}^2$ и 2ым классом Черна равным a.

$$\mathfrak{M}^{reg}(V,D) \overset{def}{=}$$
$$= \{(x,\bar{x},p,q) \in \mu^{-1}(0) \mid \text{усл. стабильности и усл. „костабильности"}\} / GL_a$$

$\dim D = m$

$\dim V = a$

$(x,\bar{x},p,q)$ является стабильной, если для любого подпространства $S \subseteq V$ т.ч.

a) $S \supseteq \mathrm{im}\, p$

b) S инвариантно относительно x и $\bar{x}$

выполнено $S = V$.

$(x,\bar{x},p,q)$ является костабильной, если для любого подпространства $S \subseteq V$ т.ч.

a) $S \subseteq \mathrm{Ker}\, q$

b) S инвариантно относительно x и $\bar{x}$

выполнено $S = 0$.

Теорема (ADHM): Существует изоморфизм
$$\mathfrak{M}^{reg}(V,D) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Bun}^{a}_{GL_m}(\mathbb{A}^2);$$
точка $(x,\bar{x},p,q) \in \mathfrak{M}^{reg}(V,D)$ переходит в расслоение $E_{(x,\bar{x},p,q)}$, равное когомологиям в среднем члене монады.

$$V\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)\xrightarrow{\begin{bmatrix} z_0x-z_1\\ z_0\bar{x}-z_2\\ z_0q\end{bmatrix}}\begin{matrix}V\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}\\ \oplus\\ V\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}\\ \oplus\\ D\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}\end{matrix}\xrightarrow{\begin{bmatrix}-(z_0\bar{x}-z_2) & z_0x-z_1 & z_0p\end{bmatrix}} V\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$$

и снабжённое тривиализацией $\Phi_{(x,\bar{x},p,q)}: D\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\xrightarrow{\simeq}$
$\xrightarrow{\simeq} E_{(x,\bar{x},p,q)}|_{\ell_\infty}$, которая индуцируется отображением

$$D\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\xrightarrow{\begin{pmatrix}0\\0\\ id\end{pmatrix}}\begin{matrix}V\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\\ \oplus\\ V\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\\ \oplus\\ D\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\end{matrix}.$$

Действие тора на $Bun^a_{GL_m}(\mathbb{A}^2)$

Рассмотрим действие $\mathbb{C}^* \curvearrowright \mathbb{P}^2$
$$t\circ(x_0:x_1:x_2) = (x_0 : t^{-1}x_1 : tx_2).$$
Оно индуцирует действие $\mathbb{C}^* \curvearrowright Bun^a_{GL_m}(\mathbb{A}^2)$.

Рассмотрим действие $GL_m \times \mathbb{C}^* \curvearrowright Bun^a_{GL_m}(\mathbb{A}^2)$, где левый фактор действует заменой тривиализации, а правый действует как описано выше.

Зафиксируем кохарактер $\rho_\lambda : \mathbb{C}^* \to GL_m$ и рассмотрим индуцированное действие $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \curvearrowright Bun^a_{GL_m}(\mathbb{A}^2)$.

Неподвижные точки относительно последнего действия обозначим $Bun^a_{GL_m,\lambda}(\mathbb{A}^2/\mathbb{G}_m)$.

Описание $Bun^a_{GL_m,\lambda}(\mathbb{A}^2/\mathbb{G}_m)$ в терминах колчанного многообразия

Лемма 1. Действие $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^* \curvearrowright Bun^a_{GL_m}(\mathbb{A}^2/\mathbb{G}_m)$ в колчанных терминах имеет вид:
$$t\circ(x,\bar{x},p,q) = (t^{-1}x,\ t\bar{x},\ p\rho_\lambda(t)^{-1},\ \rho_\lambda(t)q).$$

Рассмотрим неподвижную точку $(x, \bar{x}, p, q) \in$
$\in \mathfrak{M}^{reg}(V, D)$.

Имеем равенство $(***)$
$(t^{-1}x, t\bar{x}, p\rho_\lambda(t)^{-1}, \rho_\lambda(t)q) =$
$= (\rho_V(t)x\rho_V(t)^{-1}, \rho_V(t)\bar{x}\rho_V(t)^{-1}, \rho_V(t)p, q\rho_V(t)^{-1})$
для некоторого однозначно определённого $\rho_V(t) \in GL(V)$.
В частности, это задаёт кохарактер

$$\rho_V : \mathbb{C}^* \to GL(V).$$

- Разложим V в прямую сумму $V = \bigoplus_i V_i$ так, что $\rho_V(t)V_i = t^{-i}V_i$.

- Разложим D в прямую сумму $D = \bigoplus_i D_i$ так, что $\rho_\lambda(t)D_i = t^i D_i$.

Тогда равенство $(***)$ эквивалентно системе

$$\begin{cases} x(V_i) \subset V_{i+1}; \\ \bar{x}(V_i) \subset V_{i-1}; \\ p(D_i) \subset V_i; \\ q(V_i) \subset D_i. \end{cases}$$

Таким образом получаем изоморфизм

$$\bigsqcup_{\sum_i v_i = a} \mathfrak{M}^{reg}(v, d) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bun}^a_{GL_m, \lambda}(\mathbb{A}^2/\mathbb{G}_m)$$

$$\cap$$

$$\mathfrak{M}^{reg}(V, D) \cong \mathrm{Bun}^a_{GL_m}(\mathbb{A}^2)$$

Замечание: диагональная стрелка имеет вид:

$$(x_i, \bar{x}_i, p_i, q_i) \longmapsto (\oplus x_i, \oplus \bar{x}_i, \oplus p_i, \oplus q_i).$$

Замечание: В левой части стоит объединение по всем $v : \sum_i v_i = a$. Тем временем вектор d фиксирован равенством

$$d_i = \dim D_i = \text{число раз, которое } i \text{ входит в } \lambda.$$

Действие тора в слое над кривой

Рассмотрим расслоение $E \in \mathrm{Bun}^a_{GL_m, \lambda}(\mathbb{A}^2/\mathbb{G}_m)$.

Т.к. $(0,0) \in \mathbb{A}^2$ — неподвижная исходного действия

$$\mathbb{C}^* \curvearrowright \mathbb{A}^2$$
$$t \cdot (x, y) = (t^{-1}x, ty),$$

тор $\mathbb{C}^*$ действует в слое $E(0,0)$ расслоения E над точкой $(0,0)$.

Зафиксируем ковес μ и обозначим за $\mathrm{Bun}^{a,\mu}_{GL_m, \lambda}(\mathbb{A}^2/\mathbb{G}_m)$ подмногообразие в $\mathrm{Bun}^a_{GL_m, \lambda}(\mathbb{A}^2/\mathbb{G}_m)$ состоящее из тех расслоений $E \in \mathrm{Bun}^a_{GL_m, \lambda}(\mathbb{A}^2/\mathbb{G}_m)$, у которых тор $\mathbb{C}^*$ действует на слой $E(0,0)$ кохарактером

$$\rho_\mu : \mathbb{C}^* \longrightarrow GL_m.$$

Лемма 2: Изоморфизм

$$\bigsqcup_{v:\ \sum_1 v_i = a} \mathfrak{M}^{reg}(v,d) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Bun}^{a}_{GL_m,\lambda}\left(\mathbb{A}^2/\Gamma_m\right)$$

индуцирует изоморфизм

$$\mathfrak{M}^{reg}(v,d) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Bun}^{a,\mu}_{GL_m,\lambda}\left(\mathbb{A}^2/\Gamma_m\right),$$

где вектор v определен условием, что $-i$ встречается в μ $v_{i+1}+v_{i-1}+d_i-2v_i$ раз.

Доказательство — несложное вычисление, использующее ADHM конструкцию.

Замечание: Несложное вычисление, использующее ADHM конструкцию, показывает, что если $a \neq \frac{(\mu,\mu)}{2} - \frac{(\lambda,\lambda)}{2}$, то

$$\mathrm{Bun}^{a,\mu}_{GL_m,\lambda}\left(\mathbb{A}^2/\Gamma_m\right) = \varnothing .$$

Изоморфизм Бравермана-Финкельберга

В этой части доклада покажем, что $Bun^{a,n}_{GL_m,\lambda}(\mathbb{A}^2/\Gamma_m)$ изоморфно некоторому подмногообразию в аффинном грассманиане

$$Gr_{GL_m} \cong GL_m((z))/GL_m[[z]] \cong$$

$$\cong \left\{ \begin{array}{l} \text{пары } (\mathcal{E},\varphi), \text{ где } \mathcal{E} \text{ — расслоение ранга } m \text{ над } \mathbb{P}^1, \\ \varphi: \mathcal{E}|_{\mathbb{P}^1\setminus 0} \cong \mathcal{O}^m_{\mathbb{P}^1\setminus 0} \text{ — тривиализация} \end{array}\right\}.$$

Конструкция 1:

Во-первых, заметим, что действие

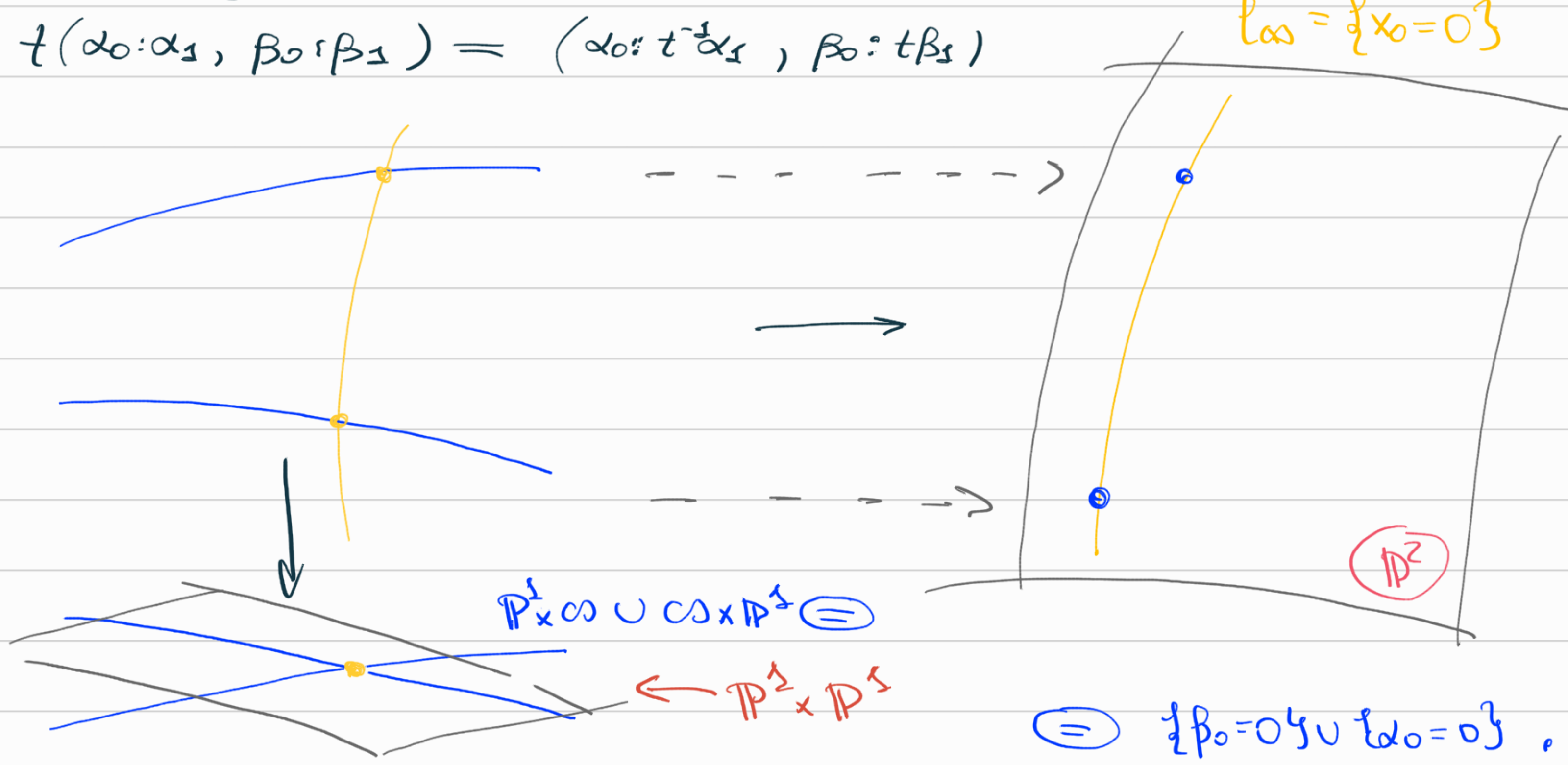
$$\mathbb{C}^* \curvearrowright \mathbb{P}^2$$

$$t(x_0:x_1:x_2) = (x_0 : t^{-1}x_1 : tx_2)$$

продолжается до действия

$$\mathbb{C}^* \curvearrowright \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$$

$$t(\alpha_0:\alpha_1, \beta_0:\beta_1) = (\alpha_0 : t^{-1}\alpha_1, \beta_0 : t\beta_1)$$



Тем самым, $\mathrm{Bun}^{a,m}_{GL_m,\lambda}(\mathbb{A}^2/\mathbb{G}_m)$ может рассматриваться как подмногообразие в пр-ве модулей расслоений на $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ с фиксированной тривиализацией на $\mathbb{P}^1\times\infty \cup \infty\times\mathbb{P}^1$.

Лемма 3: Рассмотрим точку $(E,\Phi)\in \mathrm{Bun}^{a,m}_{GL_m,\lambda}(\mathbb{A}^2/\mathbb{G}_m)$. Тривиализацию

$$\Phi|_{\infty\times\mathbb{P}^1}: E|_{\infty\times\mathbb{P}^1}\cong \mathcal{O}^{\oplus m}_{\infty\times\mathbb{P}^1}$$

можно продолжить до тривиализации

$$T: D\otimes\mathcal{O}|_{(\mathbb{P}^1\setminus 0)\times\mathbb{P}^1}\xrightarrow{\cong} E|_{(\mathbb{P}^1\setminus 0)\times\mathbb{P}^1},$$

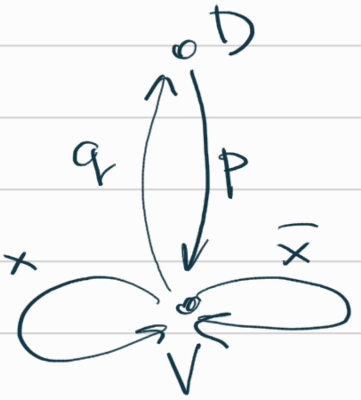
согласованной с Φ.

Доказательство:

Векторное расслоение E описывается монадой

$$V\otimes\mathcal{O}(-1,-1)\xrightarrow{a}\begin{matrix}V\otimes\mathcal{O}(0,-1)\\ \oplus\\ V\otimes\mathcal{O}(-1,0)\\ \oplus\\ D\otimes\mathcal{O}\end{matrix}\xrightarrow{b} V\otimes\mathcal{O}$$

для некоторой точки $(x,\bar{x},p,q)\in\mathfrak{M}^{reg}(V,D)\subset \mathfrak{M}^{res}(V,D)$



, где $a=\begin{pmatrix}\alpha_0 x-\alpha_1\\ \beta_0\bar{x}-\beta_1\\ \alpha_0\beta_0 q\end{pmatrix}$,

$b=\left(-(\beta_0\bar{x}-\beta_1),\ \alpha_0 x-\alpha_1,\ p\right)$.

Рассмотрим отображение

$$\tau:\ D\otimes\mathcal{O}_{(\mathbb{P}^1\setminus 0)\times\mathbb{P}^1}\xrightarrow{\begin{pmatrix}0\\(\alpha_1-\alpha_0 x)^{-1}p\\ \mathrm{id}\end{pmatrix}}\begin{array}{c}V\otimes\mathcal{O}_{(\mathbb{P}^1\setminus 0)\times\mathbb{P}^1}(0,-1)\\ \oplus\\ V\otimes\mathcal{O}_{(\mathbb{P}^1\setminus 0)\times\mathbb{P}^1}(-1,0)\\ \oplus\\ D\otimes\mathcal{O}_{(\mathbb{P}^1\setminus 0)\times\mathbb{P}^1}\end{array}$$

- $\operatorname{im}\tau\subset\ker b$

$$b\circ\tau = 0+(-p)+p=0$$

- τ индуцирует изоморфизм $D\otimes\mathcal{O}_{(\mathbb{P}^1\setminus 0)\times\mathbb{P}^1}\xrightarrow{\cong}\dfrac{\ker b}{\operatorname{im}a}\Big|_{(\mathbb{P}^1\setminus 0)\times\mathbb{P}^1}=$

$$= E|_{(\mathbb{P}^1\setminus 0)\times\mathbb{P}^1}$$

Это следует из того, что

$$\ker\left[\begin{array}{c}V\otimes\mathcal{O}(-1,-1)\\ \oplus\\ D\otimes\mathcal{O}\end{array}\Bigg|_{(\mathbb{P}^1\setminus 0)\times\mathbb{P}^1}\xrightarrow{(a|_{\dots},\ \tau)}\begin{array}{c}V\otimes\mathcal{O}(0,-1)\\ \oplus\\ V\otimes\mathcal{O}(-1,0)\\ \oplus\\ D\otimes\mathcal{O}\end{array}\Bigg|_{(\mathbb{P}^1\setminus 0)\times\mathbb{P}^1}\right]$$

$$=0.$$

- τ согласована с Φ

$\square$

Из леммы 3 следует, что задано отображение.

$$\begin{array}{ccc}
\eta : \mathrm{Bun}^{a,\mu}_{GL_m,\lambda}\left(\mathbb{A}^2/\mathbb{G}_m\right) & \longrightarrow & \mathrm{Map}\left(\mathbb{P}^1, Gr_{GL_m}\right) \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
(E,\Phi) & \longmapsto & \overbrace{f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow Gr_{GL_m}} \\
& & \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \\
& & u \longmapsto \left(E\big|_{p_2^{-1}(u)}, \tau\big|_{p_2^{-1}(u)} \right)
\end{array}$$

Зафиксируем точку $(E,\Phi) \in \mathrm{Bun}^{a,\mu}_{GL_m,\lambda}\left(\mathbb{A}^2/\mathbb{G}_m\right)$.

Отображение $f \equiv \eta((E,\Phi)) : \mathbb{P}^1 \longrightarrow Gr_{GL_m}$ удовлетворяет следующим свойствам:

- $f(\infty) = 1 \cdot GL_m[[z]]$; (1.1)

- f является $\mathbb{C}^*$-эквивариантным: (1.2)
$$f(tu) = \rho_\lambda(t^{-1})\, f(u)^{t^{-1}},$$ где

$$\left.\begin{array}{c} \mathbb{C}^* \curvearrowright Gr_{GL_m} \\ g(z)^t = t(g(z)) = g(tz) \end{array}\right\} \text{ — вращение петли.}$$

- $z^\lambda f(0) \in \left(Gr^{\mu}_{GL_m}\right)^{\mathbb{C}^*}$ — неподвижные точки в $Gr^{\mu}_{GL_m} = GL_m[z^{-1}]\, z^\mu$ относительно вращения петли. (1.3)

Проверим 1.2:
$$f(tu) = (E,\tau)\big|_{p_2^{-1}(tu)} = \rho_\lambda(t)^{-1}\left[\left(t^{-1}(E,\tau)\right)\Big|_{p_2^{-1}(u)} \right]^{t^{-1}} =$$
$$= \rho_\lambda(t)^{-1}\left[(E,\tau)\big|_{p_2^{-1}(u)} \right]^{t^{-1}}.$$

Проверим 1.3:

Из (1.2) следует, что $z^\lambda f(0) \in (Gr_{GL_n})^{\mathbb{C}^*}$.

Покажем, что $z^\lambda f(0) \in (Gr^\mu_{GL_n})^{\mathbb{C}^*} = (GL_n[z^{-1}]z^\mu)^{\mathbb{C}^*} =$

$$= GL_n z^\mu \subset Gr_{GL_n}$$

Рассмотрим точку $x \in (Gr_{GL_n})^{\mathbb{C}^*}$, $x = (\mathcal{E}, \varphi)$.

$x^t = x \Rightarrow \mathcal{E}$ является эквивариантным относительно действия

$$\mathbb{C}^* \curvearrowright \mathbb{P}^1$$
$$t \cdot u = tu.$$

$$\Rightarrow \mathbb{C}^* \curvearrowright \mathcal{E}|_0 \qquad (2.1)$$

Предложение 1: Действие (2.1) имеет тип $\mu \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x \in GL_n z^\mu.$$

Доказательство:

Рассмотрим мн-ве $\widetilde{Gr}_{GL_n} \overset{\text{def}}{=} GL_n((z)) / GL_n[[z]]_1 \cong$

$$\cong \{ (\mathcal{E}, \varphi, j : \mathcal{E}|_0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n) \}$$

Проекция $\pi : \widetilde{Gr}_{GL_n} \longrightarrow Gr_{GL_n}$ соответствует забыванию тривиализации j.
Вращение петли $\mathbb{C}^* \curvearrowright \pi^{-1}(x)$ соответствует подкрутке тривиализации j. $\square$

Рассмотрим композицию

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Bun}^{a,\mu}_{GL_m,\lambda}\left(\mathbb{A}^2/\mathbb{G}_m\right) \arrow[r, "\eta"] \arrow[rr, bend left, "\Theta"] & \mathrm{Map}(\mathbb{P}^1, Gr_{GL_m}) \arrow[r] & Gr_{GL_m} \end{tikzcd}$$

$$f \longmapsto z^{\lambda} f(1)$$

Из (1.1) - (1.3) следует, что образ Θ лежит в

$$GL_m[[z]]\cdot z^{\lambda} \cap GL_m[z^{-1}]\cdot z^{\mu} = \mathcal{W}^{\mu}_{\lambda} .$$

Предложение 2 : (BF) Отображение

$$\Theta : \mathrm{Bun}^{a,\mu}_{GL_m,\lambda}\left(\mathbb{A}^2/\mathbb{G}_m\right) \longrightarrow \mathcal{W}^{\mu}_{\lambda}$$

является изоморфизмом.

Доказательство:

Рассмотрим точку $x \in \mathcal{W}^{\mu}_{\lambda}$.

Рассмотрим отображение

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* &\longrightarrow Gr_{GL_m} . \\ t &\longmapsto x^{t^{-1}} \end{aligned}$$

Оно продолжается до отображения $g_x : \mathbb{P}^1 \to Gr_{GL_m}$.
Соответствие

$$x \longmapsto z^{-\lambda} g_x$$

задаёт отображение, обратное к Θ.

$\square$

Предложение 3: (В. Крылов) Композиция

$$\mathcal{M}^{reg}(v, d) \xrightarrow{\cong} Bun^{a,\mu}_{GL_m,\lambda}(\mathbb{A}^2/\mathbb{G}_m) \xrightarrow[\cong]{\Theta} \mathcal{W}^{\mu}_{\lambda}$$

задаётся формулой

$$(x_i, \bar{x}_i, p_i, q_i) \longmapsto z^{\lambda}\left(1 + q(\bar{x} - z)^{-1}(x-1)^{-1}p\right), \qquad (3.1)$$

где $x = \oplus x_i$, $\bar{x} = \oplus \bar{x}_i$, ...

Доказательство:

$$Gr_{GL_m} = \frac{GL_m((z))}{GL_m[[z]]} \cong \frac{GL_m[z^{\pm 1}]}{GL_m[z]}$$

$GL_m[z^{\pm1}]$ отвечает за ф-ию перекидки над $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$.

$/GL_m[z] \rightsquigarrow$ забываем тривиализацию над $\mathbb{P}^1 \setminus \infty$

$GL_m[z^{-1}]\setminus$ отсутствует $\Rightarrow$ помним тривиализацию над $\mathbb{P}^1 \setminus 0$.

Зафиксируем точку $(x_i, \bar{x}_i, p_i, q_i) \in \mathcal{M}^{reg}(\bar{\nu}, d)$

Для $(E, \Phi) \equiv (E, \Phi)|_{(x_i, \bar{x}_i, p_i, q_i)}$ вспомним тривиализацию

$$\tau: D \otimes \mathcal{O}_{(\mathbb{P}^1 \setminus 0) \times \mathbb{P}^1} \cong E|_{(\mathbb{P}^1 \setminus 0) \times \mathbb{P}^1}$$

из леммы 3.

Аналогично лемме 3 построим тривиализацию

$$\tau': D \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times (\mathbb{P}^1 \setminus 0)} \xrightarrow{\cong} E|_{\mathbb{P}^1 \times (\mathbb{P}^1 \setminus 0)} .$$

Тогда композиция

$$\tau'^{-1} \circ \tau \Big|_{(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}) \times 1} \qquad (4.1)$$

задаёт ф-ию переклейки точки $z^{-\lambda} \theta(x_i, \bar{x}_i, p_i, q_i) \in$

$\in Gr_{GL_m}$.

Вычислив (4.1), получим формулу (3.1). $\square$