Изоморфизм Маффеи, напоминание.

- фиксируем $n \in \mathbb{Z}_{>0}$
- фиксируем разбиение $\lambda : |\lambda| = n$
- вектор размерностей d определяется равенством

$$\lambda = \left(1^{d_1}, 2^{d_2}, \dots, (n-1)^{d_{n-1}}\right)$$

- вектор размерностей v определяется формулами

$$v_{n-1} = 1$$
$$\dots$$
$$v_i = (n-i) - d_{i+1} - 2d_{i+2} - \dots - (n-i-1)d_{n-1}$$
$$\dots$$
$$v_1 = (n-1) - d_2 - 2d_3 - \dots - (n-2)d_{n-1}$$

- фиксируем вектора размерностей

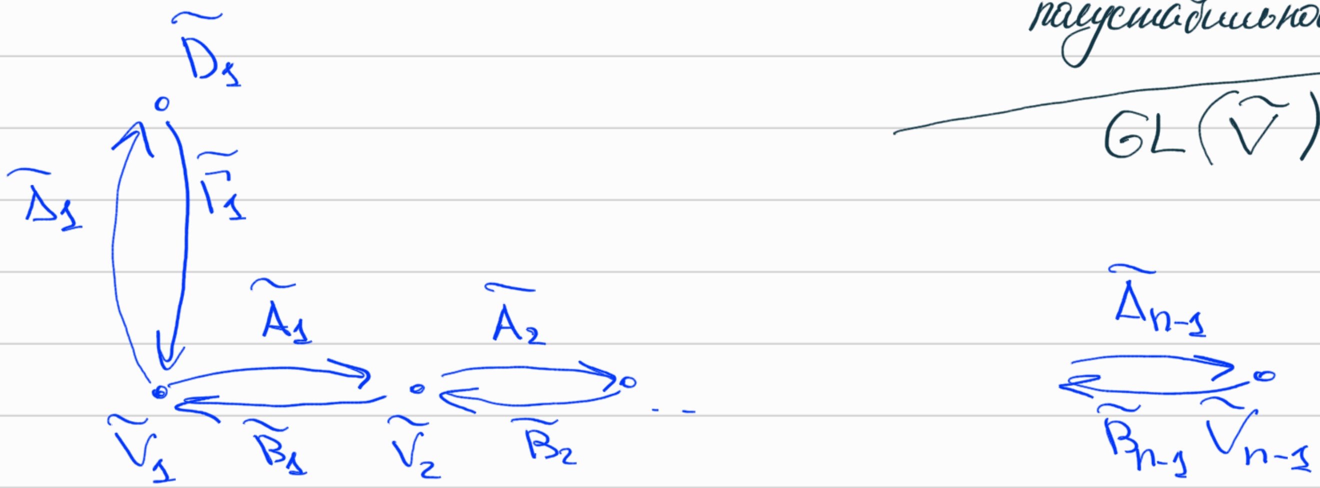
$$\tilde{d} = (n, 0, \dots, 0)$$
$$\tilde{v} = (n-1, n-2, \dots, 1)$$

В прошлый раз:

Пара изоморфизмов

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{M}(\tilde{v}, \tilde{d}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & T^*Fl(\tilde{D}_1) \arrow[d] \\
\mathfrak{M}_0(\tilde{v}, \tilde{d}) \arrow[r, "\cong"] & \mathcal{N} \subset \mathfrak{gl}(\tilde{D}_1)
\end{tikzcd}$$

где $\mathcal{M}(\tilde{v},\tilde{d}) = \{(\tilde{A},\tilde{B},\tilde{\Gamma},\tilde{\Delta}) \in \mu^{-1}(0) : (\tilde{A},\tilde{B},\tilde{\Gamma},\tilde{\Delta})$ удовл. усл. полустабильности $\} \big/ GL(\tilde{V})$



$$(\tilde{A},\tilde{B},\tilde{\Gamma},\tilde{\Delta}) \in \mu^{-1}(0) \iff \begin{cases} \tilde{\Gamma}_1\tilde{\Delta}_1 = \tilde{B}_1\tilde{A}_1; \\ \tilde{A}_1\tilde{B}_1 = \tilde{B}_2\tilde{A}_2; \\ \dots \end{cases}$$

$$(\tilde{A},\tilde{B},\tilde{\Gamma},\tilde{\Delta}) \text{ полустабильна} \iff \begin{cases} \tilde{V}_1 = \operatorname{Im}\tilde{\Gamma}_1; \\ \tilde{V}_2 = \operatorname{Im}\tilde{A}_1; \\ \tilde{V}_3 = \operatorname{Im}\tilde{A}_2; \\ \dots \end{cases}$$

$$\mathcal{M}_0(\tilde{v},\tilde{d}) = \mu^{-1}(0) /\!\!/ GL(\tilde{V}) = \operatorname{Spec}\left(\mathbb{C}[\mu^{-1}(0)]^{GL(\tilde{V})}\right).$$

$$\mathcal{M}(\tilde{v},\tilde{d}) \xrightarrow{\ \cong\ } T^*Fl(\tilde{D}_1)$$

$$\begin{matrix} \cup \\ (\tilde{A},\tilde{B},\tilde{\Gamma},\tilde{\Delta}) \end{matrix} \longmapsto \big(\tilde{\Delta}_1\tilde{\Gamma}_1 \in \mathcal{N} \subset \mathfrak{gl}(\tilde{D}_1),$$

флаг $0 \subset \operatorname{Ker}\Gamma_1 \subset \operatorname{Ker}A_1\Gamma_1 \subset \operatorname{Ker}\underbrace{A_2A_1\Gamma_1}_{\Gamma_{1\to 3}} \subset \dots \subset \operatorname{Ker}\Gamma_{1\to n-1} \subset$

$\subset \tilde{D}_1 \big)$

$\Gamma_{1\to n-1} = A_{n-2}\dots A_1\Gamma_1$.

Зафиксируем векторные пространства

$(D_1, \dots, D_{n-1})$ размерности $d = (d_1, \dots, d_{n-1})$

и $(V_1, \dots, V_{n-1})$ размерности $v = (v_1, \dots, v_{n-1})$.

Разложим $\widetilde{D_1}$ в прямую сумму

$$\widetilde{D_1} = \bigoplus_{1 \le k \le j \le n-1} D_j^{(k)} =$$

$$= \begin{array}{l} 0 \leftarrow D_1^{(1)} \\ 0 \leftarrow D_2^{(1)} \leftarrow D_2^{(2)} \\ 0 \leftarrow D_3^{(1)} \leftarrow D_3^{(2)} \leftarrow D_3^{(3)} \\ \quad \dots \\ 0 \leftarrow D_{n-1}^{(1)} \leftarrow \quad \dots \quad \leftarrow D_{n-1}^{(n-1)} \end{array} ;$$

нильпотент x

где $D_j^{(k)}$ – копия D_j для каждого k.

Рассмотрим нильпотент $x \in N \subset gl(\widetilde{D_1})$ типа λ, определенный по формуле

$$x|_{D_j^{(k)}} = id_{D_j} : D_j^{(k)} \longrightarrow D_j^{(k-1)}, \text{ если } k \geq 2 ;$$

$$x|_{D_j^{(1)}} = 0 .$$

Также рассмотрим нильпотент $y \in N \subset gl(\widetilde{D}_1)$, дополняющий x до sl_2-тройки и определенный по формуле

$$y|_{D_j^{(k)}} : k(j-k)\, id_{D_j} : D_j^{(k)} \to D_j^{(k+1)}, \quad k \leq j-1;$$

$$y|_{D_j^{(j)}} = 0 .$$

Срез Слодови S'_x и мн-ие Слодови $\widetilde{S'_x}$:

$$S'_x \overset{def}{=} \{u \in N \subset gl(\widetilde{D}_1) : [u-x, y] = 0\}$$

$$\widetilde{S'_x} \overset{def}{=} \pi^{-1}(S'_x) \subset T^*Fl(\widetilde{D}_1), \text{ где}$$

$\pi : T^*Fl(\widetilde{D}_1) \longrightarrow N$ — разрешение Спрингера.

Изоморфизм Маффеи:

$$\begin{tikzcd}
m(v,d) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \widetilde{S'_x} \arrow[d, "\pi|_{\widetilde{S'_x}}"] \\
m_0(v,d) \arrow[r, "\cong"] & S'_x
\end{tikzcd},$$

где $m(v,d) = \{(A,B,\Gamma,\Delta) \in \mu^{-1}(0) :$ (A,B,Γ,Δ) полустабильна$\} / GL(V)$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=huge]
D_1 \arrow[d, shift left, "\Gamma_1"] & D_2 \arrow[d, shift left, "\Gamma_2"] & D_3 \arrow[d, shift left, "\Gamma_3"] & \cdots & D_{n-1} \arrow[d, shift left, "\Gamma_{n-1}"] \\
V_1 \arrow[u, shift left, "\Delta_1"] \arrow[r, shift left, "A_1"] & V_2 \arrow[u, shift left, "\Delta_2"] \arrow[l, shift left, "B_1"] \arrow[r, shift left, "A_2"] & V_3 \arrow[u, shift left, "\Delta_3"] \arrow[l, shift left, "B_2"] & \cdots \arrow[r, shift left, "A_{n-2}"] & V_{n-1} \arrow[u, shift left, "\Delta_{n-1}"] \arrow[l, shift left, "B_{n-2}"]
\end{tikzcd}$$

$$(A,B,\Gamma,\Delta) \in \mu^{-1}(0) \iff \begin{cases} \Gamma_1\Delta_1 = B_1A_1; \\ A_1B_1 + \Gamma_2\Delta_2 = B_2A_2; \\ \ldots \\ A_{n-2}B_{n-2} + \Gamma_{n-1}\Delta_{n-1} = 0. \end{cases}$$

(A,B,Γ,Δ) полустабильна $\iff$

$$\iff \begin{cases} V_1 = \sum_{j\geq 1}^{n-1} \operatorname{Im} \Gamma_{j\to 1}; \\ V_2 = \operatorname{Im} A_1 + \sum_{j\geq 2} \operatorname{Im} \Gamma_{j\to 2}; \\ \ldots \\ V_{n-2} = \operatorname{Im} A_{n-3} + \operatorname{Im} \Gamma_{n-2} + \operatorname{Im} B_{n-2}\Gamma_{n-1}; \\ V_{n-1} = \operatorname{Im} A_{n-2} + \operatorname{Im} \Gamma_{n-1}. \end{cases}$$

$$m_0(v,d) = \mu^{-1}(0) /\!\!/ GL(V) = \operatorname{Spec}\left(\mathbb{C}[\mu^{-1}(0)]^{GL(V)}\right).$$

Формула для композиции

$$m(v,d) \xrightarrow{\cong} \widehat{S}_x \longleftrightarrow T^*Fl(\widehat{D}_1) \quad (**)$$

В статье Im–Lai–Wilbert (2020) была написана явная формула для вложения (**), применённого к некоторым специального вида точкам в $\mathfrak{m}(\vec{v},d)$.

Рассмотрим точку $(A,B,\Gamma,\Delta) \in \mathfrak{m}(\vec{v},d)$, т.ч.

$$\Delta_{i\to\circ}\Gamma_{\circ\to i}=0$$

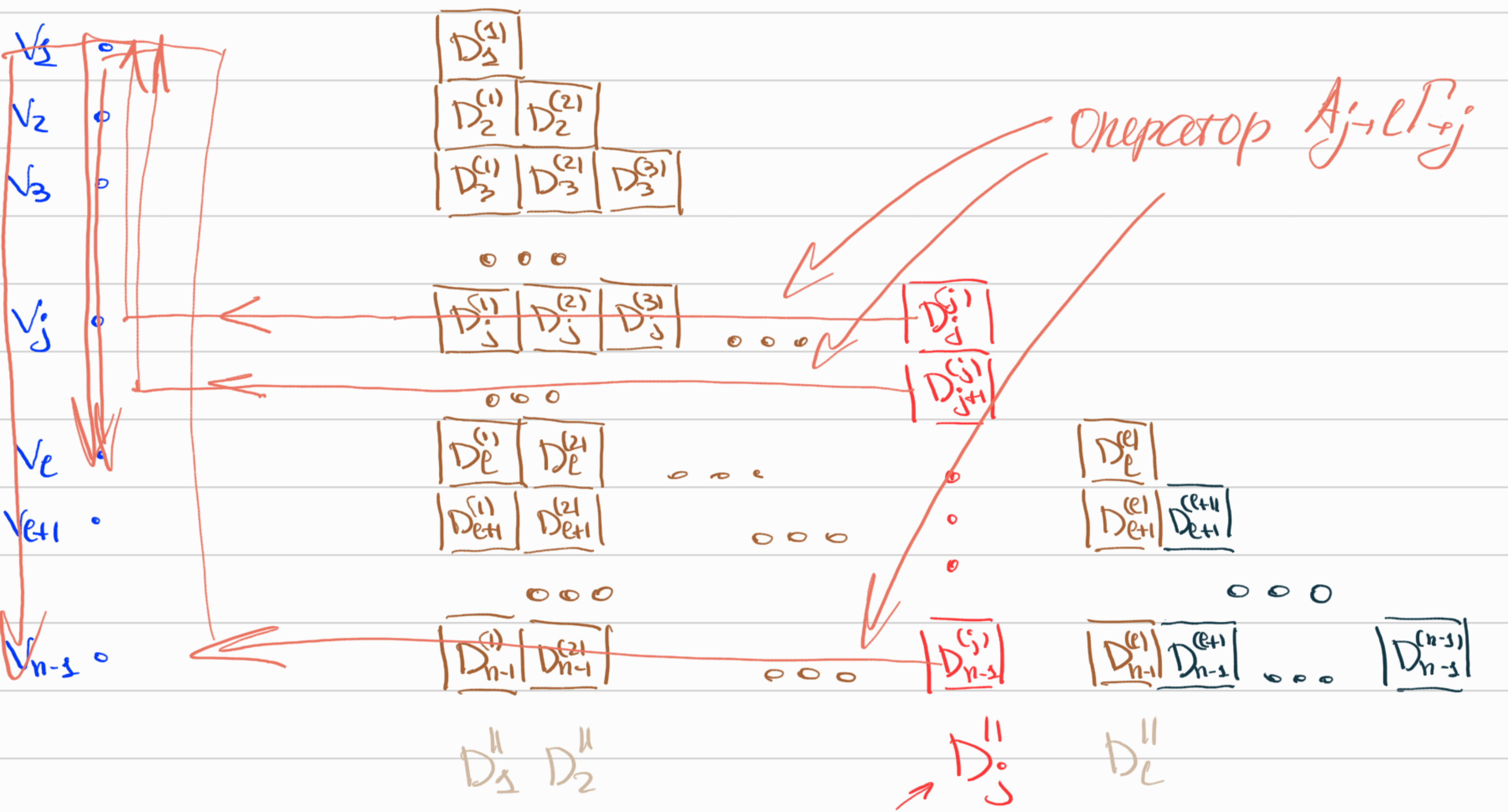
для всех $i \geq 2$.

Этой точке соответствует

1) флаг $0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n = \widetilde{D}_1$, определённый по формуле

F_ℓ = ядро оператора

	D''_1	D''_2	$\dots$	D''_j	$\dots$	D''_ℓ
V_ℓ	$A_{1\to\ell}\Gamma_{\to 1}$	$A_{2\to\ell}\Gamma_{\to 2}$	$\dots$	$A_{j\to\ell}\Gamma_{\to j}$	$\dots$	$\Gamma_{\to\ell}$



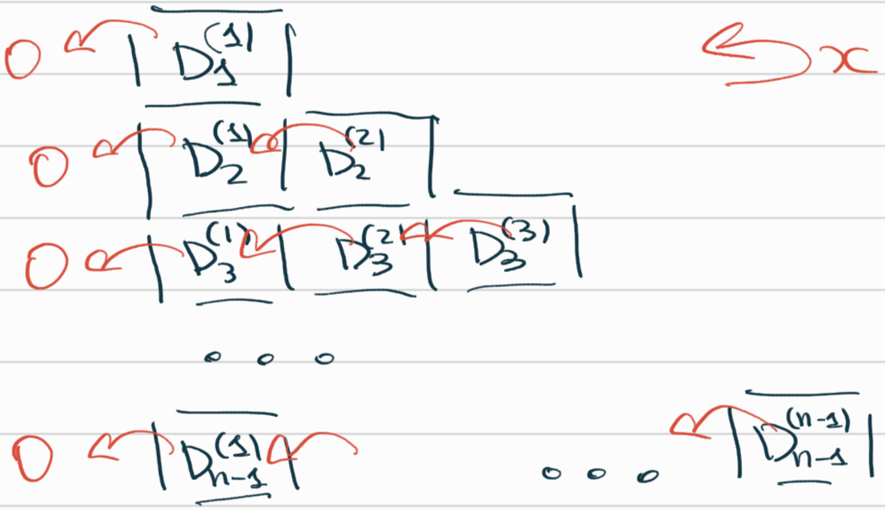
подпространство в D_1, начинающееся на j-ом столбце.

2) нильпотент $u \in \mathfrak{S}_x \subset N \subset \mathfrak{gl}(D_1)$, определённый по формуле

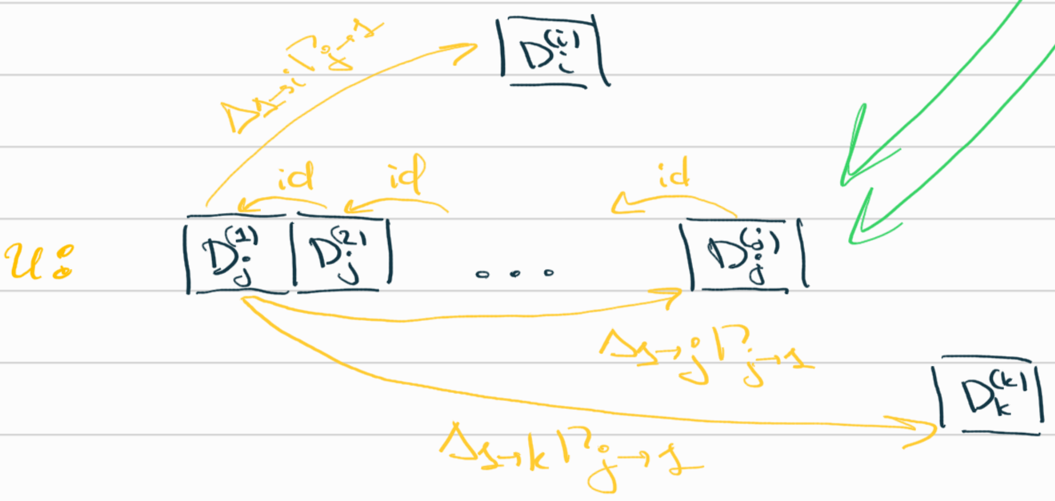
$$u|_{D_j^{(k)}} = id_{D_j} : D_j^{(k)} \to D_j^{(k-1)}, \text{ если } k \geq 2;$$

$$_{D_k^{(k)}}/u/_{D_j^{(1)}} = \Delta_{1\to k}\Gamma_{j\to 1} : D_j^{(1)} \to D_k^{(k)}.$$

Иначе говоря:



- Вне 1-ого столбца u действует как x.
- 1-ый столбец u отображает в крайне правую диагональ $\bigoplus_{j=1}^{n-1} D_j^{(j)}$ посредством $\Delta_{1\to}\Gamma_{\to 1}$



Замечание: очевидно, что $u \in \mathfrak{S}_x$.

Флаг является флагом:

- Во-первых, заметим, что $\dim \bigoplus\limits_{j=1}^{l} D_j'' = \dim V_l + l$.

- Покажем индукцией по l, что оператор

$$\begin{array}{c|cccccccc} & D_1'' & D_2'' & \ldots & D_j'' & \ldots & D_l'' \\ \hline V_l & A_{1\to l}\Gamma_{\to 1} & A_{2\to l}\Gamma_{\to 2} & \ldots & A_{j\to l}\Gamma_{\to j} & \ldots & \Gamma_{\to l} \end{array}$$

является сюръективным.

$l=1$:

$$\operatorname{im}\left(A_{1\to 1}\Gamma_{\to 1}\right) = \operatorname{im}\left(\Gamma_{\to 1}\right) =$$
$$= \sum_{j\geq 1}{}' \operatorname{im}\Gamma_{j\to 1} = V_1$$

Шаг $l-1\to l$:

$$\operatorname{im}\left(\begin{array}{c|cccccccc} & D_1'' & D_2'' & \ldots & D_j'' & \ldots & D_l'' \\ \hline V_l & A_{1\to l}\Gamma_{\to 1} & A_{2\to l}\Gamma_{\to 2} & \ldots & A_{j\to l}\Gamma_{\to j} & \ldots & \Gamma_{\to l} \end{array}\right) =$$

$$= \operatorname{im}\left(A_{l-1}\circ\left(\begin{array}{c|cccc} & D_1'' & D_2'' & \ldots & D_{l-1}'' \\ \hline V_{l-1} & A_{1\to l-1}\Gamma_{\to 1} & & \ldots & \Gamma_{\to l-1} \end{array}\right)\right) +$$

$$+ \sum_{j\geq l}{}' \operatorname{im}\Gamma_{j\to l} = \operatorname{im} A_{l-1} + \sum_{j\geq l}{}' \operatorname{im}\Gamma_{j\to l} = V_l.$$

- Включение $F_l < F_{l+1}$ очевидно.

Нильпотентен и „сохраняет“ флаг. $(u(F_{\ell+1}) \subset F_\ell)$

- Рассмотрим $w \in F_{\ell+1} \cap D_j^{(1)}$

$$\Leftrightarrow \quad A_{1\to \ell+1}\Gamma_{j\to 1}(w) = 0.$$

$$u(w) = \Delta_1\Gamma_{j\to 1}(w) + \Delta_{1\to 2}\Gamma_{j\to 1}(w) + \dots + \Delta_{1\to \ell}\Gamma_{j\to 1}(w)$$

$$+ \underbrace{\Delta_{1\to \ell+1}\Gamma_{j\to 1}(w) + \dots}_{0}.$$

$$A_{1\to \ell}\Gamma_1\Delta_1\Gamma_{j\to 1}(w) = A_{1\to \ell}B_1A_1\Gamma_{j\to 1}(w) =$$

$$= A_{\ell-1}\dots A_1B_1A_1B_1\dots B_{j-1}\Gamma_j(w) =$$

$$= A_{\ell-1}\dots A_2(B_2A_2 - \Gamma_2\Delta_2)(B_2A_2 - \Gamma_2\Delta_2)B_2\dots B_{j-1}\Gamma_j(w) =$$

$$= A_{\ell-1}\dots A_2(B_2A_2)^2B_2\dots B_{j-1}\Gamma_j(w) -$$

$$- \cancel{A_{\ell-1}\dots A_2\Gamma_2\Delta_2B_2A_2B_2\dots B_{j-1}\Gamma_j(w)} -$$

$$- \cancel{A_{\ell-1}\dots A_2B_2A_2\Gamma_2\Delta_2\dots B_{j-1}\Gamma_j(w)} =$$

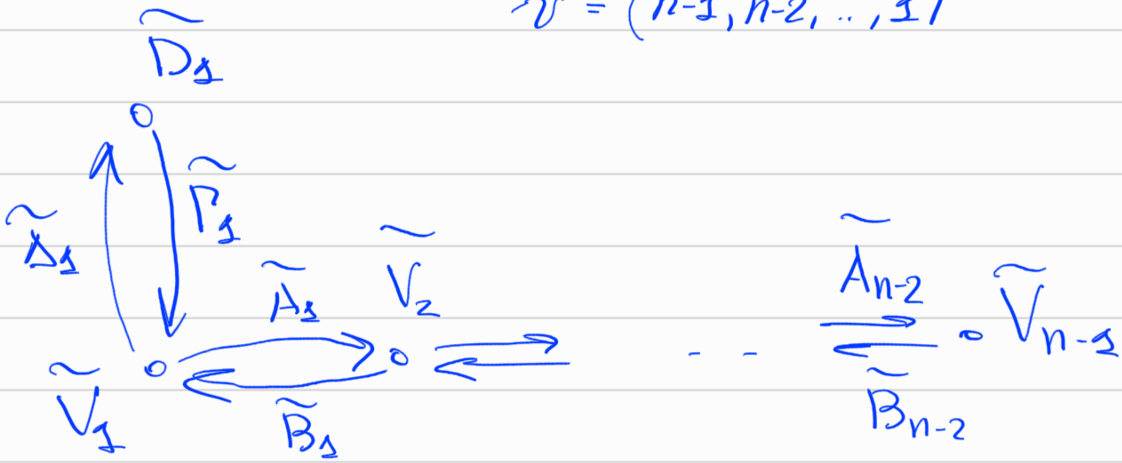
$$= A_{\ell-1}\dots A_2B_2A_2B_2A_2B_2\dots B_{j-1}\Gamma_j(w) = \dots$$

Формула для $m(v,d) \xrightarrow{\cong} \widetilde{S}_x \subset m(\tilde{v}, \tilde{d})$

$$\begin{array}{ccc} m(v,d) & & m(\tilde v,\tilde d) \\ \cup & & \cup \\ (A,B,\Gamma,\Delta) & \longmapsto & (\widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{\Gamma},\widetilde{\Delta}) \end{array}$$

Нагадаємо, що $\tilde{d} = (n, 0, \dots, 0)$

$\tilde{v} = (n-1, n-2, \dots, 1)$



$$\widetilde{D}_1 = \bigoplus_{1 \le k \le j \le n-1} D_j^{(k)}, \quad D_j^{(k)} \text{ – копії } D_j$$

$$\widetilde{V}_\ell \overset{def}{=} V_\ell \oplus \bigoplus_{1 \le k \le j-\ell \le n-\ell-1} D_j^{(k)}$$

$$\begin{cases} \widetilde{\Gamma}_1 : \widetilde{D}_1 \longrightarrow \widetilde{V}_1 ; \\ \widetilde{\Gamma}_1|_{D_j^{(k)}} = id_{D_j} : D_j^{(k)} \longrightarrow D_j^{(k-1)}, \ k \ge 2 ; \\ \widetilde{\Gamma}_1|_{D_j^{(1)}} = \Gamma_{j\to 1} : D_j \longrightarrow V_1 . \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widetilde{\Delta}_1 : \widetilde{V}_1 \longrightarrow \widetilde{D}_1 ; \\ \widetilde{\Delta}_1|_{D_j^{(k)}} = id_{D_j} : D_j^{(k)} \longrightarrow D_j^{(k)} ; \\ \widetilde{\Delta}_1|_{V_1} = \Delta_{1\to\circ} : V_1 \longrightarrow \bigoplus_j D_j^{(j)} . \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{A}_\ell : \tilde{V}_\ell \longrightarrow \tilde{V}_{\ell+1} \,; \\ \tilde{A}_\ell|_{D_j^{(k)}} = id_{D_j} : D_j^{(k)} \longrightarrow D_j^{(k-1)} \,, \quad k \geq 2 \,; \\ \tilde{A}_\ell|_{D_j^{(1)}} = \Gamma_{j\to\ell+1} : D_j \longrightarrow V_{\ell+1} \,; \\ \tilde{A}_\ell|_{V_\ell} = A_\ell : V_\ell \to V_{\ell+1} \,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{B}_\ell : \tilde{V}_{\ell+1} \longrightarrow \tilde{V}_\ell \,; \\ \tilde{B}_\ell|_{V_{\ell+1}} = B_\ell + \Delta_{\ell+1\to\circ} : V_{\ell+1} \to V_\ell \oplus \bigoplus\limits_{1 \leq j-\ell \leq n-\ell-1} D_j^{(j-\ell)} \,; \\ \tilde{B}_\ell|_{D_j^{(k)}} = id_{D_j^{(k)}} \,. \end{cases}$$

- $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta}) \in \mu^{-1}(0)$.

$$\begin{cases} \tilde{\Gamma}_1 \tilde{\Delta}_1|_{D_j^{(k)}} = id_{D_j} : D_j^{(k)} \longrightarrow D_j^{(k-1)} \,, \quad k \geq 2 \,; \\ \tilde{\Gamma}_1 \tilde{\Delta}_1|_{D_j^{(1)}} = \Gamma_{j\to 1} : D_j \to V_1 \,; \\ \tilde{\Gamma}_1 \tilde{\Delta}_1|_{V_1} : \tilde{\Gamma}_1 \circ \left(\Delta_{1\to\circ} : V_1 \to \bigoplus\limits_i D_i^{(i)} \right) = \\ \qquad = \Gamma_1 \Delta_1 + \left(\Delta_{1\to\circ} : V_1 \to \bigoplus\limits_{i \geq 2} D_i^{(i-1)} \right) : V_1 \to V_1 \oplus \bigoplus\limits_{i \geq 2} D_i^{(i-1)}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{B}_\ell \tilde{A}_\ell|_{D_j^{(k)}} = id_{D_j} : D_j^{(k)} \longrightarrow D_j^{(k-1)} \,, \quad k \geq 2 \,; \\ \tilde{B}_\ell \tilde{A}_\ell|_{D_j^{(1)}} = (B_\ell + \Delta_{\ell+1\to\circ}) \circ \Gamma_{j\to\ell+1} : D_j \to V_\ell \oplus \bigoplus\limits_{\substack{1 \leq i-\ell \leq \\ \leq n-\ell-1}} D_i^{(i-\ell)} \,; \\ \tilde{B}_\ell \tilde{A}_\ell|_{V_\ell} = (B_\ell + \Delta_{\ell+1\to\circ}) A_\ell : V_\ell \longrightarrow V_\ell \oplus \bigoplus\limits_{\substack{1 \leq i-\ell \leq \\ \leq n-\ell-1}} D_i^{(i-\ell)} \,. \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\widetilde{A}_\ell \widetilde{B}_\ell\big|_{D_j^{(k)}} = id_{D_j} : D_j^{(k)} \to D_j^{(k-1)}, \quad k \geq 2; \\
\widetilde{A}_\ell \widetilde{B}_\ell\big|_{D_j^{(1)}} = \Gamma_{j\to\ell+1} : D_j \to V_{\ell+1}; \\
\widetilde{A}_\ell \widetilde{B}_\ell\big|_{V_{\ell+1}} = \widetilde{A}_\ell\Big(B_\ell + \Delta_{\ell+1\to\circ} : V_{\ell+1} \to V_\ell \oplus \bigoplus\limits_{\substack{1\leq i-\ell \leq \\ \leq n-\ell-1}} D_i^{(i-\ell)}\Big) = \\
\quad = A_\ell B_\ell + \Gamma_{\ell+1}\Delta_{\ell+1} + \Delta_{\ell+1\to\circ} : V_{\ell+1} \to V_{\ell+1} \oplus \bigoplus\limits_{\substack{1\leq i-\ell-1 \leq \\ \leq n-\ell-2}} D_i^{(i-\ell-1)}.
\end{cases}
$$

- $(\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{\Gamma}, \widetilde{\Delta})$ является полустабильной.

  - $$\operatorname{Im} \widetilde{\Gamma}_1 = \underbrace{\sum_{j\geq 1}{}' \operatorname{im} \Gamma_{j\to 1}}_{= V_1} \oplus \bigoplus_{\dots} D_i^{(k)} \subset V_1 \oplus \bigoplus_{\dots} D_i^{(k)}$$

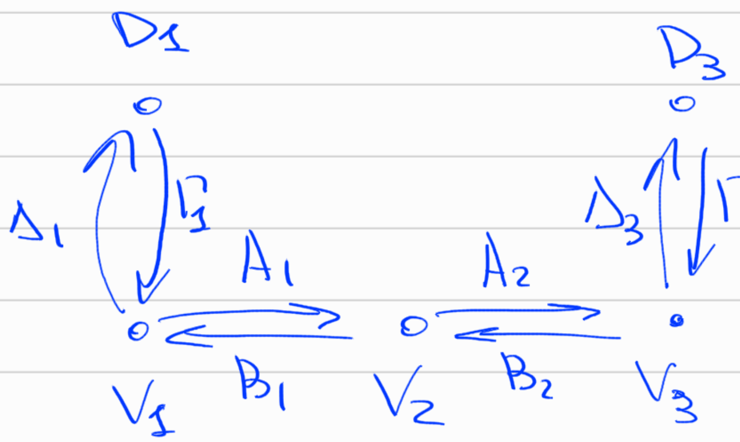
  - ...

  - $$\operatorname{im} \widetilde{A}_\ell = \underbrace{\Big(\operatorname{im} A_\ell + \sum_{j\geq \ell+1}{}' \Gamma_{j\to\ell+1}\Big)}_{= V_{\ell+1}} \oplus \bigoplus_{\dots} D_i^{(k)}$$

...

Формула для изоморфизма Маффеи в частном случае

Рассмотрим колчан



$d = (1, 0, 1)$

$v = (1, 1, 1)$

В данном случае $\lambda = (3, 1)$, $n = |\lambda| = 4$,

$$\tilde{D}_1 = \begin{array}{|c|ccc} \hline D_1^{(1)} & & & \\ \hline D_3^{(1)} & D_3^{(2)} & D_3^{(3)} & \\ \hline \end{array}$$

(Все блоки одномерные)

Также положим

$$\widehat{V_1} = V_1 \oplus D_3^{(1)} \oplus D_3^{(2)};$$

$$\widehat{V_2} = V_2 \oplus D_3^{(1)};$$

$$\left(\widehat{V_i} = V_i \oplus \bigoplus_{1 \le k \le j-i \le n-i-1} D_j^{(k)} \right)$$

$$\widehat{V_3} = V_3.$$

Зафиксируем точку $(A,B,\Gamma,\Delta)\in m(v,d)$. Согласно Маффеи, ей соответствует точка

$$(\tilde A,\tilde B,\tilde \Gamma,\tilde \Delta)\in \tilde S_x \subset m(\tilde v,\tilde d).$$

Последнюю можно искать по индукции, начиная с $\tilde A_{n-2}$ и $\tilde B_{n-2}$, как единственное некоторого специального вида решение некоторой системы уравнений.

1) $\tilde A_2$ и $\tilde B_2$

$$\tilde A_2 = \begin{array}{c|cc} & V_2 & D_3^{(1)} \\ \hline V_3 & A_2 & \Gamma_3 \end{array} \qquad \tilde B_2 = \begin{array}{c|c} & V_3 \\ \hline V_2 & B_2 \\ D_3^{(1)} & \Delta_3 \end{array}$$

2) $\tilde A_1$ и $\tilde B_1$

$$\tilde A_1 = \begin{array}{c|ccc} & V_1 & D_3^{(1)} & D_3^{(2)} \\ \hline V_2 & A_1 & \Gamma_{3\to 2} & 0 \\ D_3^{(1)} & 0 & T^{3,1}_{1,3,1} & id_{D_3} \end{array}$$

$$\tilde B_1 = \begin{array}{c|cc} & V_2 & D_3^{(1)} \\ \hline V_1 & B_1 & 0 \\ D_3^{(1)} & 0 & id_{D_3} \\ D_3^{(2)} & \Delta_{2\to 3} & S^{3,1}_{1,3,2} \end{array}$$

Уравнения на $T^{3,1}_{1,3,1}$ и $S^{3,1}_{1,3,2}$:

a) $\tilde A_1 \tilde B_1 = \tilde B_2 \tilde A_2$

b) $[D_1' / \tilde B_1 \tilde A_1 /_{D_1'} - x_1, y_1] = 0$, где $D_1' = D_3^{(1)} \oplus D_3^{(2)}$,

$$x_1 = \begin{array}{c|cc} & D_3^{(1)} & D_3^{(2)} \\ \hline D_3^{(1)} & 0 & 1 \\ D_3^{(2)} & 0 & 0 \end{array}, \qquad y_1 = \begin{array}{c|cc} & D_3^{(1)} & D_3^{(2)} \\ \hline D_3^{(1)} & 0 & 0 \\ D_3^{(2)} & 1 & 0 \end{array}.$$

Решение имеет вид:

$$\tilde{A}_1 = \begin{array}{c|ccc} & V_1 & D_3^{(1)} & D_3^{(2)} \\ \hline V_2 & A_1 & \Gamma_{3\to 2} & 0 \\ D_3^{(1)} & 0 & \frac{1}{2}\Delta_3\Gamma_3 & id_{D_3} \end{array}$$

$$\tilde{B}_1 = \begin{array}{c|cc} & V_2 & D_3^{(1)} \\ \hline V_1 & B_1 & 0 \\ D_3^{(1)} & 0 & id_{D_3} \\ D_3^{(2)} & \Delta_{2\to 3} & \frac{1}{2}\Delta_3\Gamma_3 \end{array}$$

3) $\tilde{A}_0 = \tilde{\Gamma}_1$ и $\tilde{B}_0 = \tilde{\Delta}_1$

$$\tilde{A}_0 = \begin{array}{c|cccc} & D_1^{(1)} & D_3^{(1)} & D_3^{(2)} & D_3^{(3)} \\ \hline V_1 & \Gamma_1 & \Gamma_{3\to 1} & 0 & 0 \\ D_3^{(1)} & 0 & T_{0,3,1}^{3,1} & id_{D_3} & 0 \\ D_3^{(2)} & 0 & T_{0,3,2}^{3,1} & T_{0,3,2}^{3,2} & id_{D_3} \end{array}$$

$$\tilde{B}_0 = \begin{array}{c|ccc} & V_1 & D_3^{(1)} & D_3^{(2)} \\ \hline D_1^{(1)} & \Delta_1 & 0 & 0 \\ D_3^{(1)} & 0 & id_{D_3} & 0 \\ D_3^{(2)} & 0 & S_{0,3,2}^{3,1} & id_{D_3} \\ D_3^{(3)} & \Delta_{1\to 3} & S_{0,3,3}^{3,1} & S_{0,3,3}^{3,2} \end{array}$$

Уравнение:

a) $\widehat{A_0}\widetilde{B_0} = \widetilde{B_1}\widetilde{A_1}$.

b) $[\widetilde{B_0}\widetilde{A_0} - x_0, y_0] = 0$,

где $x_0 = x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$y_0 = y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение имеет вид:

$$\widetilde{A_0} = \begin{array}{c|cccc} & D_1^{(1)} & D_3^{(1)} & D_3^{(2)} & D_3^{(3)} \\ \hline V_1 & \Gamma_1 & \Gamma_{3\to 1} & 0 & 0 \\ D_3^{(1)} & 0 & \frac{1}{3}\Delta_3\Gamma_3 & id_{D_3} & 0 \\ D_3^{(2)} & 0 & -\frac{7}{18}(\Delta_3\Gamma_3)^2 & \frac{1}{6}\Delta_3\Gamma_3 & id_{D_3} \end{array}$$

$$\widetilde{B_0} = \begin{array}{c|ccc} & V_1 & D_3^{(1)} & D_3^{(2)} \\ \hline D_1^{(1)} & \Delta_1 & 0 & 0 \\ D_3^{(1)} & 0 & id_{D_3} & 0 \\ D_3^{(2)} & 0 & \frac{1}{6}\Delta_3\Gamma_3 & id_{D_3} \\ D_3^{(3)} & \Delta_{1\to 3} & -\frac{7}{18}(\Delta_3\Gamma_3)^2 & \frac{1}{3}\Delta_3\Gamma_3 \end{array}$$