Часть I:

1) Для некоторой пары векторов размерностей (v, d),

$v = (v_1, \dots, v_{n-1})$,
$d = (d_1, \dots, d_{n-1})$,

Maffei построил нильпотент

$$x \in \mathfrak{gl}_n \quad \text{и}$$

изоморфизм

$$m_0(v,d) \xrightarrow{\cong} S_x = \{\text{срез Слодови, соответствующий } x\} \cap N$$

мн-ие Накадзимы типа A_{n-1}

нильпотентный конус в $\mathfrak{gl}_n$

2) Im–Lai–Wilbert написали для изоморфизма Maffei явную формулу.

Мн-ие Накадзимы:

Колчан Q $=$

$$1 \to 2 \to 3 \to \cdots \to n-1$$

Framed колчан $Q^{\heartsuit}$ $=$

$$\begin{tikzcd}
1' & 2' & 3' & & n-1' \\
1 \arrow[u] \arrow[r] & 2 \arrow[u] \arrow[r] & 3 \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & n-1 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Framed double колчан $\overline{Q^{\heartsuit}}$ $=$

$$\begin{tikzcd}
1' \arrow[d, bend left] & 2' \arrow[d, bend left] & 3' \arrow[d, bend left] & & n-1' \arrow[d, bend left] \\
1 \arrow[u, bend left] \arrow[r, bend left] & 2 \arrow[u, bend left] \arrow[l, bend left] \arrow[r, bend left] & 3 \arrow[u, bend left] \arrow[l, bend left] & \cdots & n-1 \arrow[u, bend left]
\end{tikzcd}$$

Зафиксируем вектора размерностей

$$v = (v_1, \ldots, v_{n-1}),$$
$$d = (d_1, \ldots, d_{n-1})$$

и векторные пространства

$$V = (V_1, \ldots, V_{n-1}),$$

$$D = (D_1, \ldots, D_{n-1})$$

размерностей v и d соответственно.

$$R(v,d) \overset{def}{=} \bigoplus_{i=1}^{n-1} \Big(Hom(V_i, V_{i+1}) \oplus Hom(V_{i+1}, V_i) \oplus$$

$$\oplus\, Hom(D_i, V_i) \oplus Hom(V_i, D_i) \Big)$$ — пространство представлений колчана Q^m.

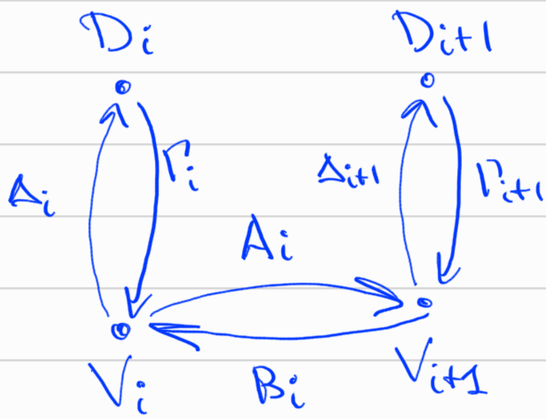
(считаем, что $D_n = V_n = 0$)

$$G_V \overset{def}{=} GL(V_1) \times GL(V_2) \times \ldots \times GL(V_{n-1}) \circlearrowright R(v,d)$$

по формуле

$$(g_1, \ldots, g_{n-1}) \Big((A_i, B_i, \Gamma_i, \Delta_i) \in Hom(V_i, V_{i+1}) \oplus Hom(V_{i+1}, V_i) \oplus$$
$$\oplus\, Hom(D_i, V_i) \oplus Hom(V_i, D_i) \Big) =$$

$$= \left(g_{i+1} A_i g_i^{-1},\ g_i B_i g_{i+1}^{-1},\ g_i \Gamma_i,\ \Delta_i g_i^{-1} \right), \quad i \in \overline{1..n-1}.$$



$$\left(\begin{array}{l} V_n = D_n = 0, \\ A_{n-1} = B_{n-1} = 0. \end{array} \right)$$

Это действие является симплектическим, соответствующее отображение моментов

$$\mu : R(v,d) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathfrak{gl}(V_i)$$

отображает $(A_i, B_i, \Gamma_i, \Delta_i)_{i\in\overline{1..n-1}}$ в

$$\left(B_iA_i - A_{i-1}B_{i-1} - \Gamma_i\Delta_i\right) \in gl(V_i).$$

$$\left(A_0 = B_0 = A_{n-1} = B_{n-1} = 0\right)$$

Опр 1.1 Точка $(A, B, \Gamma, \Delta) \in \mu^{-1}(0)$ н-ся полустабильной, если для любого подпространства $S \leq V$ т.ч.

- S инвариантно относительно A и B,
- $S \supseteq \operatorname{im}\Gamma$,

выполнено $S = V$.

Обозначение:

$$\Gamma_{j\to i} = \begin{cases} B_i \ldots B_{j-1}\Gamma_j, & \text{если } j \geq i; \\ A_{i-1} \ldots A_j\Gamma_j, & \text{если } j \leq i. \end{cases}$$

Лемма 1.2 Точка $(A, B, \Gamma, \Delta) \in \mu^{-1}(0)$ полустабильна тогда и только тогда, когда

$$\forall\, i \in \overline{1..n-1} \quad \operatorname{Im} A_{i-1} + \sum_{j\geq i} \operatorname{Im} \Gamma_{j\to i} = V_i.$$

Доказательство:

$(\Longrightarrow)$ Положим $S_i = \operatorname{Im} A_{i-1} + \sum_{j\geq i} \operatorname{Im}\Gamma_{j\to i}$.

Тогда $S \leq V$ удовлетворяет условиям определения 1.1.

($\Leftarrow$) Рассмотрим $S' \subseteq V$, удовлетворяющее условиям определения 1.1. Во-первых,

$$\begin{cases} B(S) \subseteq S'; \\ \operatorname{Im}\Gamma \subseteq S'. \end{cases} \Rightarrow S'_i \supseteq \sum_{j \neq i}' \operatorname{Im}\Gamma_{j\to i}.$$

Т.к. $\operatorname{Im} A_0 = 0$, $S'_1 = V_1$.

$S'_2 \supseteq A_1(S'_1) = A_1(V_1) = \operatorname{Im} A_1$.

И так далее ... . Получаем $S' = V$.

$\square$

Обозначение: открытую подсхему в $\mu^{-1}(0)$, состоящую из полустабильных точек, обозначают за

$$\mu^{-1}(0)^{ss}.$$

Предложение 1.3 $G_V \curvearrowright \mu^{-1}(0)^{ss}$ — свободное действие

Доказательство: Рассмотрим точку $(A, B, \Gamma, \Delta) \in \mu^{-1}(0)^{ss}$. Зафиксируем элемент $g \in \operatorname{Stab}_{G_V}(A, B, \Gamma, \Delta) < G_V$. По лемме 1.2, отображение

$$\bigoplus_{j=1}^{n-1} D_j \xrightarrow{\oplus \Gamma_{j\to 1}} V_1$$

сюръективно. Следовательно, $g_1 = I$. Рассуждая аналогично про отображение

$$\bigoplus_{j=2}^{n-1} D_j \oplus V_1 \xrightarrow{(\oplus \Gamma_{j\to 2},\, A_1)} V_2,$$

получаем $g_2 = 1$. И так далее... . $\square$

Теперь из GIT следует, что фактор

$$\mu^{-1}(0)^{ss}/G_v$$

существует и является гладким многообразием, проективным над „категорным" фактором

$$\mu^{-1}(0)/\!/G_v \overset{def}{=} \mathrm{Spec}\left(\mathbb{C}[\mu^{-1}(0)]^{G_v}\right).$$

Определение 1.4

Многообразия

$$\mathfrak{M}(v,d) = \mu^{-1}(0)^{ss}/G_v \quad и$$

$$\mathfrak{M}_0(v,d) = \mu^{-1}(0)/\!/G_v$$

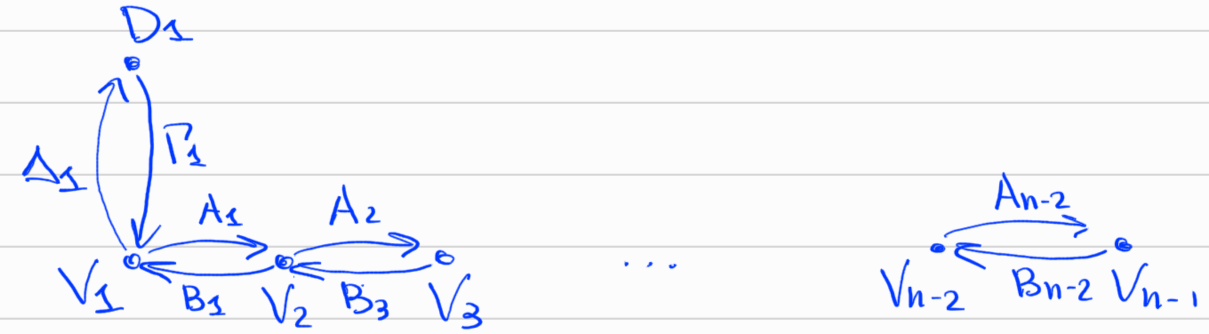
называются многообразием Накаджимы.

Рассмотрим случай

$$\tilde{d} = (n, 0, \ldots, 0),$$
$$\tilde{v} = (n-1, n-2, \ldots, 1).$$

В данном случае $\mu^{-1}(0)^{ss} = \{ (A, B, \Gamma, \Delta) \in \mu^{-1}(0) :$ $\Gamma_1, A_1, \ldots, A_{n-2}$ сюрьективны $\}$

(Кроме того, в данном случае, как следует из результатов Накаджимы, морфизм $\mathfrak{M}(\tilde{v},\tilde{d}) \longrightarrow \mathfrak{M}_0(\tilde{v},\tilde{d})$ является бирациональным)



$\dim D_1 = n$

$\dim V_1 = n-1$

$\dots$

$\dim V_{n-1} = 1$.

Обозначение: $Fl(D_1) = \{0 \subset D_1^{(1)} \subset \dots \subset D_1^{(n)} = D_1\}$ — многообразие полных флагов в D_1.

Кокасательное $T^*Fl(D_1)$ можно описать как

$$\{(u \in gl(D_1),\ 0 \subset D_1^{(1)} \subset \dots \subset D_1^{(n)} = D_1) : u(D_1 = D_1^{(n)}) \subset D_1^{(n-1)}, \dots, u(D_1^{(1)}) = 0\}$$

Частный случай изоморфизма Maffei:

Заметим, что соответствие

$$(A, B, \Gamma, \Delta) \longmapsto (\Delta_1\Gamma_1,\ 0 \subset \ker A_{n-2} \dots A_1\Gamma_1 \subset \dots \subset \ker\Gamma_1 \subset D_1)$$

индуцирует отображение

$$\Psi : \mu^{-1}(0)^{ss} \longrightarrow T^*Fl(D_1)$$

Предложение 1.5 Ψ индуцирует изоморфизм

$$\mathfrak{m}(\tilde{v}, \tilde{d}) = \mu^{-1}(0)^{ss}/G_v \xrightarrow{\cong} T^*Fl(D_1).$$

Доказательство:

Во-первых, Ψ G_v-эквивариантно для тривиального действия G_v на $T^*Fl(D_1)$. Следовательно, Ψ пропускается как

$$\mu^{-1}(0)^{ss} \longrightarrow \mu^{-1}(0)^{ss}/G_v \xrightarrow{\overline{\Psi}} T^*Fl(D_1).$$

Чтобы показать, что $\overline{\Psi}$ - изоморфизм, достаточно показать, что G_v действует свободно транзитивно в слоях Ψ.

Зафиксируем точку $f = (u \in End(D_1), 0 \subset D_1^{(1)} \subset \ldots \subset D_1) \in$
$\in T^*Fl(D_1)$

Γ_1 из прообраза $\Psi^{-1}(f)$ восстанавливается как изоморфизм

$$D_1/D_1^{(1)} \xrightarrow{\cong} V_1$$

единственно с точностью до действия $GL(V_1)$.
Зафиксируем Γ_1. Δ_1 восстанавливается единственным образом из уравнения

$$u = \Delta_1\Gamma_1.$$

Далее, $A_1\Gamma_1$ восстанавливается как изоморфизм

$$D_1/D_1^{(2)} \xrightarrow{\cong} V_2$$

единственным образом, с точностью до действия $GL(V_2)$.
Из $A_1\Gamma_1$ восстанавливается A_1. Из уравнения

$$\Gamma_1\Delta_1 = B_1 A_1$$

восстанавливается B_1. И так далее ... . $\square$

Обозначение:

$$\begin{array}{ccc} \pi: T^*Fl(D_1) & \longrightarrow & \mathcal{N} \subset \mathfrak{gl}(D_1) \\ \Psi & & \Psi \\ (u, \text{флаг}) & \longmapsto & u \end{array}$$

нильпотентный конус

— разрешение Спрингера.

Соответствие $(A, B, \Gamma, \Delta) \in \mu^{-1}(0) \longmapsto$

$\longmapsto \Delta_1\Gamma_1 \in \mathcal{N}$

задает G_v-эквивариантный морфизм

$$\mu^{-1}(0) \longrightarrow \mathcal{N}$$

(G_v действует тривиально на $\mathcal{N}$)

аффинных схем.
Следовательно, индуцирует морфизм

$$\Psi_0 : \mathfrak{m}_0(\tilde{d}, \tilde{v}) = \mu^{-1}(0) /\!\!/ G_v \longrightarrow \mathcal{N}.$$

Предложение 1.6 Ψ_0 — изоморфизм.

Доказательство: Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{M}(\tilde{v}, \tilde{d}) \arrow[r, "\overline{\Psi}"] \arrow[d, "p"] & T^*Fl(D_1) \arrow[d, "\pi"] \\ \mathfrak{M}_0(\tilde{v}, \tilde{d}) \arrow[r, "\overline{\Psi}_0"] & \mathcal{N} \end{tikzcd}$$

Морфизмы π и p являются собственными и бирациональными. Следовательно, $\overline{\Psi}_0$ является собственным и бирациональным. Т.к. $\overline{\Psi}_0$ является собственным и аффинным, $\overline{\Psi}_0$ является конечным. Тогда, из $\underbrace{\text{нормальности } \mathcal{N}}_{\text{(kraft.)}}$ следует, что $\overline{\Psi}_0$ изоморфизм.

$\square$

Замечание Предложения 1.5 и 1.6 являются частным случаем изоморфизма Maffei, доказанным Накаджимой. $\diamond$

Изоморфизм Maffei

Обозначение

- разбиение $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, $|\lambda| = n$.
- векторное пространство $D_0' = \langle t_{ij} \rangle = \langle t_{11}, \dots, t_{1,\lambda_1}, t_{21}, \dots, t_{2\lambda_2}, \dots, t_{r\lambda_r} \rangle \cong \mathbb{C}^n$
- для каждого $k \in \overline{1..n-1}$, векторное пространство $D_k = \langle t_j \mid \lambda_j = k \rangle$, $d_k = \dim D_k =$ число раз, которое k встречается в λ.

(Так получается, что мы не рассматриваем разбиение $\lambda = (n)$.)

$d = (d_1, \ldots, d_{n-1})$ задает нам один из векторов размерностей для мн-ма Накаджимы.

- Для $k \in \overline{1..n-1}$,
$v_k = (n-k) - (n-k-1)d_{n-1} - (n-k-2)d_{n-2} - \ldots - d_{i+1}$.
Это задаёт нам второй вектор размерностей для мн-ма Накаджимы.
- $x \in gl(D_0^!)$ — нильпотент типа λ:
$$x(t_{ij}) = t_{ij-1}.$$

Определение 1.7

- Срез Слодови $S_x \overset{def}{=} \{u \in N < gl(D_0^!) : [x-u, y] = 0\}$, где y дополняет x до sl_2-тройки.
- Многообразие Слодови $\widetilde{S}_x \overset{def}{=} \pi^{-1}(S_x) \subset T^*Fl(D_0^!)$, где
$$\pi : T^*Fl(D_0^!) \longrightarrow N$$ — разрешение Спрингера.

(См. например V. Ginzburg: 0807.0339) многообразие $\widetilde{S}_x$ является гладким, а морфизм $\pi_x : \widetilde{S}_x \longrightarrow S_x$ — разрешением особенностей.

Теорема 1.8 (Maffei)

Существуют изоморфизмы
$$\begin{tikzcd}
m(v,d) \arrow[r, "\psi^\lambda", "\sim"'] \arrow[d, "p_\lambda"] & \widetilde{S}_x \arrow[d, "\pi_x"] \\
m_0(v,d) \arrow[r, "\psi_0^\lambda", "\sim"'] & S_x
\end{tikzcd}$$

Замечание Предложения 1.5 и 1.6 являются частными случаями теоремы 1.8: нужно положить
$$\lambda = (1, \dots, 1).$$
(В этом случае $x = 0$.) ◇

Изоморфизм Ψ^λ является частью коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{M}(\tilde{v}, \tilde{d}) \arrow[r, "\overline{\Psi}", "\sim"'] & T^*Fl(D_0' = \tilde{D}_0) \\
\mathfrak{M}(v, d) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\Psi^\lambda", "\sim"'] & \tilde{S}_x \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}.$$

Аналогично, изоморфизм $\overline{\Psi}_0^\lambda$ является частью коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{M}_0(\tilde{v}, \tilde{d}) \arrow[r, "\overline{\Psi}_0", "\sim"'] & \mathcal{N} \subset \mathfrak{gl}(D_0') \\
\mathfrak{M}_0(v, d) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\Psi_0^\lambda", "\sim"'] & S_x \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}.$$

Для композиций $\mathfrak{M}(v,d) \hookrightarrow T^*Fl(D_0')$ и $\mathfrak{M}_0(v,d) \hookrightarrow \mathcal{N}$ в статье Im-Lai-Wilbert была написана явная формула:

Точке $[A, B, \Gamma, \Delta] \in \mathfrak{M}(v,d)$ соответствует

1) флаг $0 = F_n < F_{n-1} < \dots < F_1 < F_0 = D_0'$, определённый по формуле
$$F_l = \text{ядро оператора}$$

$$V_\ell \Big(\overset{D_1''}{A_{1\to\ell}\Gamma_{\to 1}} \;\Big|\; \dots \;\Big|\; \overset{D_s''}{A_{s\to\ell}\Gamma_{\to s}} \;\Big|\; \dots \;\Big|\; \overset{D_\ell''}{\Gamma_{\to\ell}} \Big),$$

где $D_s'' = \langle t_{is} \rangle_{i\in ..} < D_0'$ и

$$A_{s\to\ell}\Gamma_{\to s}(t_{is}) = A_{s\to\ell}\Gamma_{\lambda_i\to s}(t_i)$$

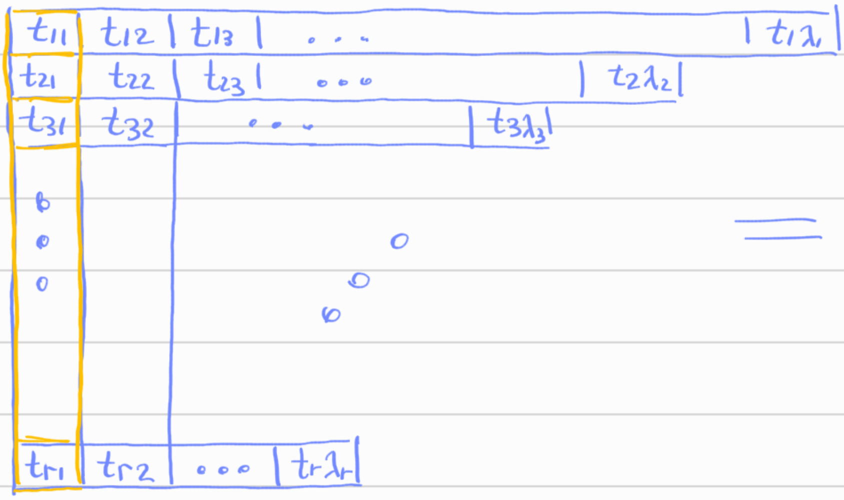
2) нильпотент $u \in N < gl(D_0')$, определённый по формуле

$$u(t_{ij}) = \begin{cases} t_{ij-1}, & \text{если } j \geq 2; \\ \Delta_{1\to}\Gamma_{\to 1}(t_i), & \text{если } j = 1; \end{cases}$$

где $\bigoplus\limits_{i=1}^{n-1} D_i$ вкладывается в D_0' как подпространство, натянутое на 1ый столбец:

$\bigoplus\limits_{i=1}^{n-1} D_i =$

$t_j \mapsto t_{j1}$



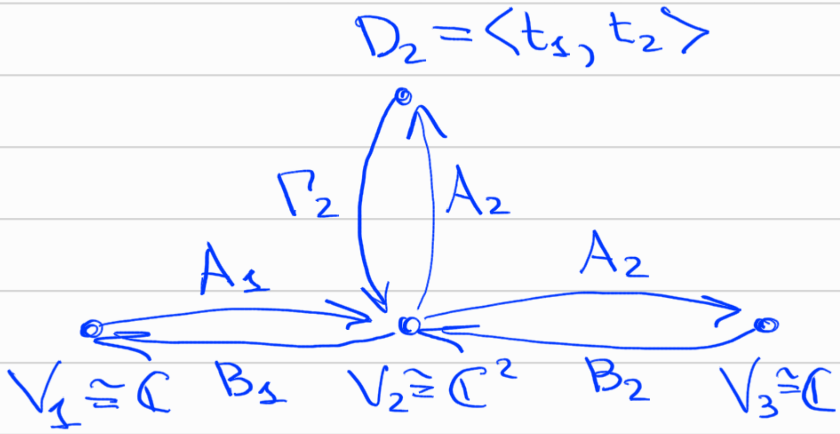
$= D_0'$

Пример:

$n = 4$

$\lambda = (2,2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = (0,2,0); \\ v = (1,2,1). \end{cases}$$



$D_0' = \langle t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22} \rangle$

- $D''_1 = \langle t_{11}, t_{21} \rangle \subset D'_0$
- $D''_2 = \langle t_{12}, t_{22} \rangle \subset D'_0$
- $D''_3 = 0 \subset D'_0$

Точке $[A, B, \Gamma, \Delta]$ соответствует флаг

- $$F_3 = \ker\left(V_3 \left(\overset{D''_1}{A_{1\to3}\Gamma_{\to1}} \quad \overset{D''_2}{A_{2\to3}\Gamma_{\to2}} \quad \overset{D''_3 = 0}{\Gamma_{\to3}} \right)\right)$$

  - $A_{1\to3}\Gamma_{\to1}(t_{11}) = A_{1\to3}\Gamma_{2\to1}(t_1) = A_2A_1B_1\Gamma_2(t_1)$,
    $A_{1\to3}\Gamma_{\to1}(t_{21}) = A_{1\to3}\Gamma_{2\to1}(t_2) = A_2A_1B_1\Gamma_2(t_2)$

  - $A_{2\to3}\Gamma_{\to2}(t_{12}) = A_{2\to3}\Gamma_{2\to2}(t_1) = A_2\Gamma_2(t_1)$,
    $A_{2\to3}\Gamma_{\to2}(t_{22}) = A_2\Gamma_2(t_2)$

- $$F_2 = \ker\left(V_2 \left(\overset{D''_1}{A_{1\to2}\Gamma_{\to1}} \quad \overset{D''_2}{\Gamma_{\to2}} \right)\right)$$

  - $A_{1\to2}\Gamma_{\to1}(t_{11}) = A_{1\to2}\Gamma_{2\to1}(t_1) = A_1B_1\Gamma_2(t_1)$,
    $A_{1\to2}\Gamma_{\to1}(t_{21}) = A_1B_1\Gamma_2(t_2)$

  - $\Gamma_{\to2}(t_{12}) = \Gamma_{2\to2}(t_1) = \Gamma_2(t_1)$,
    $\Gamma_{\to2}(t_{22}) = \Gamma_2(t_2)$

- $$F_1 = \ker\left(V_1 \left(\overset{D''_1}{\Gamma_{\to1}} \right)\right)$$

  - $\Gamma_{\to1}(t_{11}) = \Gamma_{2\to1}(t_1) = B_1\Gamma_2(t_1)$,
  - $\Gamma_{\to1}(t_{21}) = \Gamma_{2\to1}(t_2) = B_1\Gamma_2(t_2)$

и нильпотент $u \in S_x \subset N \subset gl(D'_0)$

- $u(t_{11}) = \Delta_{1\to}\Gamma_{\to1}(t_1) = \Delta_2B_1A_1\Gamma_2(t_1)$

(С учётом вложения $D_2 \subset D'_0$
$t_1 \mapsto t_{11}$, $t_2 \mapsto t_{21}$)

- $u(t_{12}) = t_{11}$
- $u(t_{22}) = t_{21}$
- $u(t_{21}) = \Delta_{1\to}P_{\to 1}(t_2) = \Delta_2 B_1 A_1 P_2(t_2)$.