0. Введение

$\mathfrak{g}$ - комплексная п/п алгебра Ли.
(e,h,f) — $\mathfrak{sl}_2$-тройка в $\mathfrak{g}$.
$\Phi: \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^*$ — форма Киллинга.

$\chi \overset{def}{=} \Phi(e)$
$S \overset{def}{=} \Phi(e + \operatorname{Ker} \operatorname{ad}_f)$ — срез Слодови.

$\operatorname{ad}_h \curvearrowright \mathfrak{g} \rightsquigarrow \mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i$

$\omega : \Lambda^2 \mathfrak{g}_{-1} \to \mathbb{C}$ — симплектическая
$x \wedge y \longmapsto \chi([x,y])$ форма на $\mathfrak{g}_{-1}$.

Зафиксируем изотропное подпространство $l \subset \mathfrak{g}_{-1}$.
$\mathfrak{m}_l \overset{def}{=} l \oplus (\bigoplus_{i \le -2} \mathfrak{g}_i)$
$\mathfrak{n}_l \overset{def}{=} l^{\perp\omega} \oplus (\bigoplus_{i \le -2} \mathfrak{g}_i)$

$\mathfrak{m}_l \subset \mathfrak{n}_l$ - нильпотентные подалгебры в $\mathfrak{g}$.

$Q_l \overset{def}{=} U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{m}_l)} \mathbb{C}_\chi = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{m}_l)} \dfrac{U(\mathfrak{m}_l)}{(x - \chi(x))} = \dfrac{U(\mathfrak{g})}{I_l}$.

$\operatorname{ad} \mathfrak{n}_l (I_l) \subset I_l \Rightarrow \operatorname{ad} \mathfrak{n}_l \curvearrowright Q_l$

$W_l \overset{def}{=} H^0(\mathfrak{n}_l, Q_l) \subset Q_l$

Формула $(x + I_l)(y + I_l) = xy + I_l$ для $x, y \in W_l$ определяет структуру ассоциативной алгебры на W_l.

План доклада:

1) Определим фильтрации Каждана на $U(\mathfrak{g})$, Q_e и W_e. А также градуировки Каждана на $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$, $\mathbb{C}[\chi + \mathfrak{m}^{\perp}]$ и $\mathbb{C}[S]$.

2) Построим изоморфизм
$$gr_K W_e \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[S]$$
Каждан-градуированных алгебр.

3) Используя пункт 2, покажем, что W_e не зависит от выбора изотропного подпространства ℓ.

4) Вспомним про Пуассонову скобку на S, полученную Гамильтоновой редукцией. Покажем, что она равна скобке, построенной по изоморфизму из пункта 2.

1. Фильтрация Каждана

Возрастающая $\mathbb{Z}$ - фильтрация

$$\ldots \subset F_k^p U(\mathfrak{g}) \subset F_k^{p+1} U(\mathfrak{g}) \subset \ldots$$

определяется так:

$F_k^p U(\mathfrak{g})$ — подпространство в $U(\mathfrak{g})$ порождённое всеми $F_{PBW}^j U(\mathfrak{g})(i)$ т.ч. $2j + i \leq p$, где $F_{PBW}^j U(\mathfrak{g})(i) = \{x \in F_{PBW}^j U(\mathfrak{g}) : ad_h(x) = ix\}$.

$$F_{PBW}^{j_1} U(\mathfrak{g})(i_1) \cdot F_{PBW}^{j_2} U(\mathfrak{g})(i_2) \subset F_{PBW}^{j_1+j_2} U(\mathfrak{g})(i_1+i_2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F_k^p U(\mathfrak{g}) \cdot F_k^q U(\mathfrak{g}) \subset F_k^{p+q} U(\mathfrak{g}).$$

Пример: $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$

$\mathfrak{sl}_2 = \langle f, h, e \rangle$

$ad_h(f) = -2f$, $ad_h(h) = 0$, $ad_h(e) = 2e$.

$$ad_h(f^k h^l e^m) = 2(m-k) f^k h^l e^m.$$

$$F_k^p U(\mathfrak{sl}_2) = \langle f^k h^l e^m : 2(k+l+m) + 2(k-m) \leq p \rangle$$

В частности, $F_k^0 U(\mathfrak{sl}_2) = \langle 1, f, f^2, \ldots, f^k, \ldots \rangle$;
$F_k^{-1} U(\mathfrak{sl}_2) = 0$.

$\diamond$

Замечание: несложно видеть, что если $\bigoplus_{i\le -3} \mathfrak{g}_i \neq 0$, то $F_K^{-1}\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \neq 0$.

Вложение $\mathfrak{g} \to gr_K^{\cdot}\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ индуцирует изоморфизм $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \xrightarrow{\sim} gr_K^{\cdot}\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Он определяет градуировку Каждана на $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$.

Вспомним, что у нас было действие $\rho: \mathbb{C}^* \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, определённое следующим образом:

$(e,h,f): \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{g} \rightsquigarrow \tilde{\gamma}: SL_2 \to G$.

$\gamma = \tilde{\gamma}|_{\mathbb{C}^*}: \mathbb{C}^* \to G$.

$\rho(t,x) = t^2 \cdot (Ad_{\gamma(t^{-1})}(x))$

Определим действие $\tilde{\rho}: \mathbb{C}^* \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ формулой $\langle \tilde{\rho}(t,\xi), x \rangle = t^{-4} \langle \xi, \rho(t,x) \rangle$.

Лемма 0: $\tilde{\rho}$ сохраняет и стягивает $\chi + \mathfrak{m}_\ell^\perp$ и S.

Д-во леммы 0:

Возьмём $\xi = \chi + v \in \chi + \mathfrak{m}_\ell^\perp$.

$t^{-4} \langle \xi, \rho(t,x) \rangle = t^{-2} \langle \xi, Ad_{\gamma(t^{-1})}(x) \rangle =$

$= t^{-2} \langle Ad^*_{\gamma(t)}\xi, x \rangle \, \textcircled{=}$

$\langle Ad^*_{\gamma(t)}(\chi), y \rangle = (e, Ad_{\gamma(t^{-1})}(y)) =$

$= (Ad_{\gamma(t)}(e), y) = t^2 (e,y) = t^2 \langle \chi, y \rangle$

$\textcircled{=} \; \langle \chi + t^{-2} Ad^*_{\gamma(t)}(v), x \rangle \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \tilde{\rho}$ сохраняет $\chi + m_e^{\perp}$.

$$\langle t^{-2} Ad^*_{g(t)}(v), y \rangle = t^{-2} \langle v, Ad_{g(t^{-1})} y \rangle =$$
$$= t^{-2} (\Phi^{-1}(v), Ad_{g(t^{-1})} y) = t^{-2} (Ad_{g(t)} \Phi^{-1}(v), y)$$

$Ad_{g(t)}$ действует на $m_e^{\perp\text{-Killing}}$ с неположительными весами. Следовательно, $\tilde{\rho}$ стягивает $\chi + m_e^{\perp}$ и действует на $\mathbb{C}[\chi + m_e^{\perp}]$ с неотрицательными весами.

Для S рассуждаем аналогично. $\square$

Несложно видеть, что градуировка Каждана на $\mathbb{C}[g^*]$ индуцирована этим действием. Действительно,

рассмотрим $x \in g \cap gr_K^{p+2} U(g)$.

$$\langle \xi, \tilde{\rho}(t, x) \rangle = \langle \tilde{\rho}(t^{-1}, \xi), x \rangle = t^4 \langle \xi, \rho(t^{-1}, x) \rangle =$$
$$= t^2 \langle \xi, Ad_{g(t)}(x) \rangle = t^2 \langle \xi, t^p x \rangle = \langle \xi, t^{p+2} x \rangle.$$

Определим фильтрацию Каждана на Q_e:

$$F_K^p Q_e \overset{def}{=} \pi(F_K^p U(g)), \text{ где } \pi : U(g) \to Q_e -$$

— проекция.

Т.к. $F_k^{<0} U(\mathfrak{g}) \subset I_e$, $F_k^{<0} Q_e = 0$.

$$\mathrm{gr}_k^\circ Q_e \simeq \frac{\mathrm{gr}_k^\circ U\mathfrak{g}}{\mathrm{gr}_k^\circ I_e} \simeq \frac{\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]}{(x - \chi(x))_{x\in m_e}} = \mathbb{C}[\chi + m_e^\perp] -$$

— изоморфизм $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$-модулей. (следовательно, и алгебр)

Фильтрация Каждана на W_e по определению индуцирована вложением $W_e \hookrightarrow Q_e$.

Рассмотрим композицию

$$\mathrm{gr}_k^\circ W_e \longrightarrow \mathrm{gr}_k^\circ Q_e \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\chi + m_e^\perp] \longrightarrow \mathbb{C}[S],$$

где морфизм $\mathbb{C}[\chi + m_e^\perp] \to \mathbb{C}[S]$ индуцирован вложением $S \hookrightarrow \chi + m_e^\perp$. Обозначим эту композицию за ν.

Т.к. $\tilde{\rho}$ сохраняет $\chi + m_e^\perp$ и S, ν является градуированным, где градуировка на S индуцирована действием $\tilde{\rho}$.

2. Основные теорема.

Thm 1: D-изоморфизм.

Доказательство теоремы 1 будет опираться на несколько лемм.

$N_e \circlearrowright x+\mathfrak{m}_e^{\perp}$ коприсоединённо $\rightsquigarrow$
$N_e \circlearrowright \mathbb{C}[x+\mathfrak{m}_e^{\perp}]$. Как N_e-модуль, $\mathbb{C}[x+\mathfrak{m}_e^{\perp}]$ — прямая сумма конечномерных представлений. Следовательно, действие $N_e \circlearrowright \mathbb{C}[x+\mathfrak{m}_e^{\perp}]$ продифференцировать. Получим $\mathfrak{n}_e \circlearrowright \mathbb{C}[x+\mathfrak{m}_e^{\perp}]$.
Т.к. группа N_e унипотентная,

$$\mathbb{C}[x+\mathfrak{m}_e^{\perp}]^{N_e} = \mathbb{C}[x+\mathfrak{m}_e^{\perp}]^{\mathfrak{n}_e}.$$

Лемма 1: Ограничение $\mathbb{C}[\chi+\mathfrak{m}_e^{\perp}] \longrightarrow \mathbb{C}[S']$ индуцирует изоморфизм $\mathbb{C}[\chi+\mathfrak{m}_e^{\perp}]^{N_e} \longrightarrow \mathbb{C}[S']$

Д-во леммы 1:

Диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[N_e]\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[S'] = \mathbb{C}[N_e\times S'] \arrow[dr, "(e,id)^{\#}"'] & & \mathbb{C}[\chi+\mathfrak{m}_e^{\perp}] \arrow[ll, "\alpha^{\#}"'] \arrow[dl, "\text{ограничение}"] \\
& \mathbb{C}[S'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна и N_e-эквивариантна.

Но $\left(\mathbb{C}[N_e]\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[S']\right)^{N_e} = \mathbb{C}[N_e]^{N_e}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[S'] =$
$= \mathbb{C}[S']$ $\square$

Рассмотрим композицию

$$\mathrm{gr}^{\circ}_K \mathcal{Q}_e \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\chi+\mathfrak{m}_e^{\perp}] \longrightarrow \mathbb{C}[S'].$$

Она N_e-эквивариантна, следовательно, она индуцирует морфизм $\varphi: H^0(N_e, \mathrm{gr}^{\circ}_K \mathcal{Q}_e) \longrightarrow \mathbb{C}[S']$.

Лемма 2: φ - изоморфизм; $H^{\geq 1}(\mathfrak{n}_e, gr_k^\circ Q_e) = 0$.

D-во леммы 2:

1ое утверждение сразу следует из леммы 1.

$$H^{\geq 1}(\mathfrak{n}_e, gr_k^\circ Q_e) \xrightarrow{\sim} H^{\geq 1}(\mathfrak{n}_e, \mathbb{C}[x + \mathfrak{m}_e^\perp]) \xrightarrow[H^{\geq 1}(\alpha^\#)]{\sim}$$

$$\xrightarrow[H^{\geq 1}(\alpha^\#)]{\sim} H^{\geq 1}(\mathfrak{n}_e, \mathbb{C}[N_e] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[S]) \cong H^{\geq 1}(\mathfrak{n}_e, \mathbb{C}[N_e]) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[S] = 0.$$

Последнее р-во следует из того, что $C^\bullet(\mathfrak{n}_e, \mathbb{C}[N_e])$ — алгебраический комплекс де Рама N_e. Он стягивается в положительных степенях полем Эйлера, т.к. $N_e \overset{?}{\cong} \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{!}$ $\square$

Обозначим вложение $W_e \to Q_e$ за φ. φ фильтрованный и $\mathfrak{n}_e$-эквивариантный, причём действие $\mathfrak{n}_e$ на H_e тривиально. Следовательно, φ индуцирует морфизм фильтрованных комплексов

$$\tilde{\varphi}: W_e \to C^\bullet(\mathfrak{n}_e, Q_e), \quad \text{где}$$

фильтрация на $C^\bullet(\mathfrak{n}_e, Q_e)$ определяется так:

$F^p \Lambda^k \mathfrak{n}_e^* \otimes Q_e$ порождено всеми

$(x_1 \wedge \ldots \wedge x_k) \otimes v$: $x_m \in \mathfrak{n}_e^*(i_m)$, $v \in F_k^j Q_e$, $i_1 + \ldots + i_k + j \leq p$.

Лемма 3: $F^p\tilde{\varphi}: F^p_k \mathcal{W}_e \longrightarrow F^pC^\circ(\mathfrak{n}_e, \mathfrak{O}_e)$ – – квазиизоморфизм

Д-во леммы 3:

По индукции:

база $p=0$ очевидна.

Шаг следует из леммы 2, точности последовательности

$$F^{p-1}C^\circ(\mathfrak{n}_e, \mathfrak{O}_e) \to F^pC^\circ(\mathfrak{n}_e, \mathfrak{O}_e) \to gr^pC^\circ(\mathfrak{n}_e, \mathfrak{O}_e)$$

и равенства $gr^\cdot C^\circ(\mathfrak{n}_e, \mathfrak{O}_e) = C^\cdot(\mathfrak{n}_e, gr^\cdot_k \mathfrak{O}_e)$ $\square$

Лемма 3.1 (нам не нужна, но использовалась ранее): $\tilde{\varphi}$ – квазиизоморфизм.

Д-во леммы 3.1:

Т.к. когомологии коммутируют с прямыми суммами, лемма 3.1. следует из равенства

$$C^\cdot(\mathfrak{n}_e, \mathfrak{O}_e) = \operatorname{colim}_p F^pC^\cdot(\mathfrak{n}_e, \mathfrak{O}_e)$$

$\square$

Лемма 4: Вложение $\varphi: W_e \to Q_e$ индуцирует изоморфизм $gr_k^\bullet W_e \xrightarrow{\sim} H^0(n_e, gr_k^\bullet Q_e)$.

Д-во леммы 4:

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} F_k^{p-1} W_e \arrow[r] \arrow[d] & F_k^p W_e \arrow[r] \arrow[d] & gr_k^p W_e \arrow[d] \\ F^{p-1} C^\bullet(n_e, Q_e) \arrow[r] & F^p C^\bullet(n_e, Q_e) \arrow[r] & gr^p C^\bullet(n_e, Q_e) \end{tikzcd}$$

строки которой точны. Левый и средний морфизмы — квазиизоморфизмы по лемме 3. Лемма 4 теперь следует из равенства $gr^\bullet C^\bullet(n_e, Q_e) = C^\bullet(n_e, gr^\bullet Q_e)$. $\square$

Д-во теоремы 1:

$\varphi \rightsquigarrow$ изоморфизм $gr_k^\bullet W_e \xrightarrow{\sim} H^0(n_e, gr_k^\bullet Q_e)$ по лемме 4;

Ограничение $gr_k^\bullet Q_e \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[x + m_e^\perp] \to \mathbb{C}[S']$ индуцирует изоморфизм $H^0(n_e, gr_k^\bullet Q_e) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[S']$.

Это доказывает теорему 1. (См. след диаграмму)

$$\begin{tikzcd} gr_k^\bullet W_e \arrow[r] \arrow[dr, "\sim"'] & gr_k^\bullet Q_e \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{C}[x+m_e^\perp] \arrow[r] & \mathbb{C}[S'] \\ & H^0(n_e, gr_k^\bullet Q_e) \arrow[u] \arrow[urr, "\sim"'] & & \end{tikzcd}$$

$\square$

3. Независимость W_ℓ от ℓ

Предложение 1: Вложение $\ell_1 < \ell_2$ индуцирует изоморфизм фильтрованных алгебр $W_{\ell_1} \xrightarrow{\sim} W_{\ell_2}$

Д-во предложения 1:

$$\ell_1 < \ell_2 \Rightarrow m_{\ell_1} < m_{\ell_2} \Rightarrow I_{\ell_1} < I_{\ell_2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ есть морфизм $Q_{\ell_1} \to Q_{\ell_2}$

$$\ell_1 < \ell_2 \Rightarrow n_{\ell_2} < n_{\ell_1} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow W_{\ell_1} = H^0(n_{\ell_1}, Q_{\ell_1}) \longrightarrow H^0(n_{\ell_1}, Q_{\ell_2}) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^0(n_{\ell_2}, Q_{\ell_2}) = W_{\ell_2}.$$

Построенный морфизм $W_{\ell_1} \to W_{\ell_2}$ сохраняет фильтрацию и индуцирует изоморфизм на $gr_k^\bullet(-)$. Последнее следует из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc}
gr_k^\bullet W_{\ell_1} & \longrightarrow & gr\, Q_{\ell_1} & \cong & \mathbb{C}[\chi + m_{\ell_1}^\perp] & \longrightarrow & \mathbb{C}[S] \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \mathrm{id} \\
gr_k^\bullet W_{\ell_2} & \longrightarrow & gr\, Q_{\ell_2} & \cong & \mathbb{C}[\chi + m_{\ell_2}^\perp] & \longrightarrow & \mathbb{C}[S]
\end{array}$$

$\square$

Следствие: W_ℓ не зависит от выбора ℓ, с точностью до построенного изоморфизма.

Д-во Следствие:

Достаточно взять $\ell_1 = 0 < \ell_2 = \ell$ и применить предложение 1.

$\square$

4. W_ℓ – квантование $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$

Зафиксируем лагранжево $\ell \subset \mathfrak{g}_{-1}$.

$\pi: \chi + \mathfrak{m}_\ell^\perp \longrightarrow \dfrac{\chi + \mathfrak{m}_\ell^\perp}{M_\ell} \simeq \mathcal{S}$ – фактор по Ad^*-действию (свободному)

$i: \chi + \mathfrak{m}_\ell^\perp \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$ – вложение

Напомним, что M_ℓ действует (коприсоединённо) на $\mathfrak{g}^*$ с отображением моментов $\mu_\ell: \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{m}_\ell^*$, являющимся ограничением функционалов.

Ввиду этого, $\mathfrak{g}^* /\!\!/ M_\ell = \dfrac{\mu_\ell^{-1}(0)}{M_\ell} = \dfrac{\chi + \mathfrak{m}_\ell^\perp}{M_\ell} \simeq \mathcal{S}$.

Это определяет Пуассонову структуру на $\mathcal{S}$, которая явно описывается формулой

$$\pi^\#(\{f_1, f_2\}) = i^\#(\{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2\}) \quad , \text{где}$$

$$f_1, f_2 \in \mathbb{C}[\mathcal{S}], \ \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] : \ \pi^\#(f_j) = i^\#(\tilde{f}_j).$$

Изоморфизм $D: gr_K W_\ell \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\mathcal{S}]$ тоже определяет Пуассонову структуру на $\mathcal{S}$. Обозначим её $\{\cdot,\cdot\}'$. Она может быть описана формулой

$$\{gr^p x, gr^q y\}' = gr^{p+q-2}(xy - yx) \quad , \text{где}$$

$x \in F_k^p W_e$, $y \in F_k^q W_e$.

Предложение 2: $\{\cdot,\cdot\} = \{\cdot,\cdot\}'$.

Д-во предложения 2:

Введем обозначения

$$\begin{tikzcd} W_e \arrow[r, hook, "\Pi^\#"] & Q_e & U(\mathfrak{g}) \arrow[l, two heads, "I^\#"'] \end{tikzcd}.$$

Зафиксируем $x \in F_k^p W_e$ и $y \in F_k^q W_e$.
Также зафиксируем $\tilde{x} \in F_k^p U(\mathfrak{g})$, $\tilde{y} \in F_k^q U(\mathfrak{g})$, т.ч.

$$\Pi^\#(x) = I^\#(\tilde{x}), \text{ и } \Pi^\#(y) = I^\#(\tilde{y}).$$

Тогда $xy - yx \in F_k^{p+q-2} W_e$, и

$$\Pi^\#(xy-yx) = I^\#(\tilde{x}\tilde{y} - \tilde{y}\tilde{x}).$$

Предложение 2 следует из явного описания скобки $\{\cdot,\cdot\}$ и коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathrm{gr}_k^\cdot W_e \arrow[r, hook, "\mathrm{gr}\,\Pi^\#"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{gr}_k^\cdot Q_e & \mathrm{gr}_k^\cdot U(\mathfrak{g}) \arrow[l, two heads, "\mathrm{gr}\,I^\#"'] \arrow[d, "\cong"] \\ \mathbb{C}[S] \arrow[r, hook, "\pi^\#"] & \mathbb{C}[\chi + \mathfrak{m}_e^\perp] & \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \arrow[l, two heads] \end{tikzcd}$$

$\square$

5. ...

$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_+} \mathfrak{g}_i$

Заметим, что $\bigoplus_{i \le j} \mathfrak{g}_i = F_k^{j+2} U(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{g}$.
Следовательно,

$$\mathfrak{g}_i \hookrightarrow gr_k^{i+2} U(\mathfrak{g}).$$

Это индуцирует отображение алгебр $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \to gr_k^{\bullet} U(\mathfrak{g})$.
Покажем, что оно является изоморфизмом.

Для каждого $i \in \mathbb{Z}_+$ выберем в $\mathfrak{g}_i$ базис:

$$\mathfrak{g}_i = \langle v_{i,1}, \ldots, v_{i,d_i} \rangle.$$

В $U(\mathfrak{g})$ выберем соответствующий PBW-базис:

$$U(\mathfrak{g}) = \langle v_{i_1,j_1}^{D_1} \ldots v_{i_m j_m}^{D_m} \rangle \quad , \text{ где}$$

$i_1 \geq i_2 \geq \ldots \geq i_m$, причем если $i_s = i_{s+1}$,
то $j_s > j_{s+1}$.

Тогда $\dfrak{}$

Теперь покажем, что проекция

$$\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] = gr_k^\circ U(\mathfrak{g}) \to gr_k^\circ Q_e$$

индуцирует изоморфизм $\mathbb{C}[\chi + \mathfrak{m}_e^\perp] \xrightarrow{\sim} gr_k^\circ Q_e$.

Во-первых, покажем, что „мономы"

$$(v_{i_1,j_1} - \chi(v_{i_1,j_1}))^{D_1} \dots (v_{i_m,j_m} - \chi(v_{i_m,j_m}))^{D_m}$$

задают базис в $U(\mathfrak{g})$. (порядок индексов как выше)

Предположим, что

$$F^p_{PBW} U(\mathfrak{g}) = \langle (v_{i_1,j_1} - \chi(v_{i_1,j_1}))^{D_1} \dots (v_{i_m,j_m} - \chi(v_{i_m,j_m}))^{D_m} :$$

$$D_1 + \dots + D_m \le p \rangle.$$

Тогда аналогичное утверждение для $F^{p+1}_{PBW} U(\mathfrak{g})$ следует из двух фактов:

a) $$F^{p+1}_{PBW} U(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow gr^{p+1}_{PBW} U(\mathfrak{g})$$

$$\begin{array}{ccc} \cup & & \cup \\ (v_{i_1,j_1} - \chi(v_{i_1,j_1}))^{D_1} \dots (v_{i_m,j_m} - \chi(v_{i_m,j_m}))^{D_m} & \mapsto & v_{i_1,j_1}^{D_1} \dots v_{i_m,j_m}^{D_m} \end{array}$$

$$D_1 + \dots + D_m = p+1$$

b) $\dim gr^{p+1}_{PBW} U(\mathfrak{g}) =$

$$= \dim \langle (v_{i_1,j_1} - \chi(v_{i_1,j_1}))^{D_1} \dots (v_{i_m,j_m} - \chi(v_{i_m,j_m}))^{D_m} :$$

$: D_1 + \ldots + D_m = p+1 >$

Утверждение для $U(\mathfrak{g})$ следует по индукции.

Теперь покажем, что $gr_k^{\circ} I_\ell$ порождается элементами $x - \chi(x)$, где $x \in \mathfrak{m}_\ell$.

Во-первых, можно считать, что вектора $v_{-2,1}, v_{-2,2}, \ldots, v_{-2,\dim \ell}$ образуют базис в ℓ

Тогда

$$I_\ell = \langle (v_{i_1,j_1} - \chi(v_{i_1,j_1}))^{D_1} \ldots (v_{i_m,j_m} - \chi(v_{i_m,j_m}))^{D_m} :$$

$$: v_{i_m,j_m} \in \mathfrak{m}_\ell \rangle$$

Во-вторых, заметим, что если $0 \neq x \in \mathfrak{g}_i$, то $x - \chi(x) \in F_k^{i+2} U(\mathfrak{g})$, и $x - \chi(x) \notin F_k^{i+1} U(\mathfrak{g})$.

Действительно, если $x \notin \mathfrak{g}_{-2}$, то $\chi(x) = 0$ и утверждение очевидно. Если $x \in \mathfrak{g}_{-2}$, то $x, \chi(x) \in F_k^0 U(\mathfrak{g})$.

Таким образом, мы получаем

$$gr_k^p I_\ell = \langle (v_{i_1,j_1} - \chi(v_{i_1,j_1}))^{D_1} \ldots (v_{i_m,j_m} - \chi(v_{i_m,j_m}))^{D_m} :$$

$$: v_{i_m,j_m} \in \mathfrak{m}_\ell, \; D_1(i_1+2) + \ldots + D_m(i_m+2) = p \rangle$$