# 0. Введение

$\mathfrak{g}$ – комплексная п/п алгебра Ли.
$(e,h,f)$ – $\mathfrak{sl}_2$-тройка в $\mathfrak{g}$.
$\Phi: \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^*$ – форма Киллинга.

$\chi \overset{def}{=} \Phi(e)$
$S \overset{def}{=} \Phi(e + \ker \operatorname{ad}_f)$ – срез Слодови.

$\operatorname{ad}_h \curvearrowright \mathfrak{g} \rightsquigarrow \mathfrak{g} = \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i$

$\omega: \Lambda^2 \mathfrak{g}_{-1} \to \mathbb{C}$ – симплектическая
$x \wedge y \longmapsto \chi([x,y])$ форма на $\mathfrak{g}_{-1}$.

Зафиксируем изотропное подпространство $l \subset \mathfrak{g}_{-1}$.
$\mathfrak{m}_l \overset{def}{=} l \oplus (\bigoplus\limits_{i \leq -2} \mathfrak{g}_i)$
$\mathfrak{n}_l \overset{def}{=} l^{\perp\omega} \oplus (\bigoplus\limits_{i \leq -2} \mathfrak{g}_i)$

$\mathfrak{m}_l \subset \mathfrak{n}_l$ – нильпотентные подалгебры в $\mathfrak{g}$.

$Q_l \overset{def}{=} U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{m}_l)} \mathbb{C}_\chi = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{m}_l)} \dfrac{U(\mathfrak{m}_l)}{(x - \chi(x))} = \dfrac{U(\mathfrak{g})}{I_l}$.

$\operatorname{ad}\mathfrak{n}_l (I_l) \subset I_l \Rightarrow \operatorname{ad}\mathfrak{n}_l \curvearrowright Q_l$

$W_l \overset{def}{=} H^0(\mathfrak{n}_l, Q_l) \subset Q_l$

Формула $(x + I_l)(y + I_l) = xy + I_l$ для $x, y \in W_l$ определяет структуру ассоциативной алгебры на $W_l$.

## План доклада:

1) Определим фильтрации Каждана на $U(\mathfrak{g})$, $Q_e$ и $W_e$. А также градуировки Каждана на $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$, $\mathbb{C}[\chi + \mathfrak{m}_e^{\perp}]$ и $\mathbb{C}[S]$.

2) Построим изоморфизм

$$gr_K W_e \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[S]$$

Каждан-градуированных алгебр.

3) Используя пункт 2, покажем, что $W_e$ не зависит от выбора изотропного подпространства $l$.

4) Вспомним про Пуассонову скобку на $S$, полученную Гамильтоновой редукцией. Покажем, что она равна скобке, построенной по изоморфизму из пункта 2.

$$\left.\begin{matrix} \mathfrak{n}_e \subset \mathfrak{g} \\ \mathfrak{m}_e \subset \mathfrak{g} \end{matrix}\right\} \rightsquigarrow \begin{matrix} N_e \subset G \\ M_e \subset G. \end{matrix}$$

# 1. Фильтрация Каждана

$$\ldots \subset F_K^p U(\mathfrak{g}) \subset F_K^{p+1} U(\mathfrak{g}) \subset \ldots$$

Определяется так:

$F_K^p U(\mathfrak{g})$ — подпространство в $U(\mathfrak{g})$, натянутое на $\underbrace{F^j_{PBW}}\, U(\mathfrak{g})(i)$ для всех $(i,j)$: $2j+i \le p$.

$\mathrm{ad}_h \curvearrowright F^j_{PBW} U(\mathfrak{g})$ $\rightsquigarrow$ $F^j_{PBW} U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} F^j U(\mathfrak{g})(i)$,

где $F^j_{PBW} U(\mathfrak{g})(i) = \{ x \in F^j_{PBW} U(\mathfrak{g}) : \mathrm{ad}_h(x) = ix \}$

## Пример: $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$

$$\mathfrak{sl}_2 = \langle f, h, e \rangle$$

$$U(\mathfrak{sl}_2) = \mathbb{C}\langle f^k h^l e^m \rangle$$

$$\mathrm{ad}_h (f^k h^l e^m) = (-2k + 2m) f^k h^l e^m \in F^{k+l+m}_{PBW} U(\mathfrak{sl}_2)$$

$$F_K^p U(\mathfrak{sl}_2) = \langle f^k h^l e^m : \underbrace{2(k+l+m) + 2(m-k)}_{=\,2l+4m} \le p \rangle$$

В частности, $F_K^0 U(\mathfrak{sl}_2) = \langle 1, f, f^2, \ldots \rangle$,

$F_K^{-1} U(\mathfrak{sl}_2) = 0$.

Если $\bigoplus_{i \le -3} \mathfrak{g}_i \neq 0$, то $F_k^{-1} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \neq 0$. $\Diamond$

$$\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathrm{gr}_k^0 \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightsquigarrow \underset{\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]}{\overset{\|}{S^{\cdot}\mathfrak{g}}} \to \mathrm{gr}_k^0 \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \text{ --}$$

– изоморфизм.

$$F_k^i \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot F_k^j \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \subset F_k^{i+j} \mathcal{U}(\mathfrak{g})$$

$$[F_k^i \mathcal{U}(\mathfrak{g}) ; F^j \mathcal{U}(\mathfrak{g})] \subset F^{i+j-2} \mathcal{U}(\mathfrak{g})$$

$$\left( [F^p_{PBW} \mathcal{U}(\mathfrak{g})(i) ; F^q_{PBW} \mathcal{U}(\mathfrak{g})(j)] \subset F^{p+q-1}_{PBW} \mathcal{U}(\mathfrak{g})(i+j) \right)$$

$$\left\backslash\ \overline{\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})}\ \right| \rightsquigarrow \underset{\mathfrak{g}}{\overset{\|}{\mathrm{gr}_k^{\cdot} \mathfrak{g}}} \hookrightarrow \mathrm{gr}\, \mathcal{U}(\mathfrak{g}).$$

$$\underline{\ }\quad \bigcup_{F_k^p}$$

$\mathfrak{g} = \bigoplus_i \mathfrak{g}_i$

$$\mathfrak{g}_i \hookrightarrow F_k^{i+2} \mathcal{U}(\mathfrak{g})$$

$$\mathfrak{g}_i \hookrightarrow \frac{F_k^{i+2} \mathcal{U}(\mathfrak{g})}{F_k^{i+1} \mathcal{U}(\mathfrak{g})}$$

$$\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathrm{gr}_k^0 \mathcal{U}(\mathfrak{g})$$

$$S^{\cdot}\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_k^0 \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \qquad (\mathrm{PBW})$$

Напоминание: У нас было действие

$\rho: \mathbb{C}^\times \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, опр. след. образом

$(e,h,f): \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{g}$ м. $\tilde{\gamma}: SL_2 \to G$.

$$\begin{matrix} SL_2 \\ \cup \\ \mathbb{C}^\times \end{matrix}$$

$\gamma: \mathbb{C}^\times \to G. = \tilde{\gamma}|_{\mathbb{C}^\times}$

$\rho(t,x) = t^2(\mathrm{Ad}_{\gamma(t^{-1})}(x))$

Определим новое действие $\tilde{\rho}: \mathbb{C}^\times \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ по формуле

$$\langle \tilde{\rho}(t,\xi), x\rangle = t^{-4}\langle \xi, \rho(t,x)\rangle.$$

Лемма 0: $\tilde{\rho}$ сохраняет и стягивает $\chi + \mathfrak{m}_\ell^\perp$ и $S$.

Д-во леммы 0: (Сначала для $\chi+\mathfrak{m}_\ell^\perp$)

Возьмём $\xi = \chi + v \in \chi + \mathfrak{m}_\ell^\perp$; $x, y \in \mathfrak{g}$.

$\langle \tilde{\rho}(t,\xi), x\rangle = t^{-4}\langle \xi, \rho(t,x)\rangle = t^{-2}\langle \xi, \mathrm{Ad}_{\gamma(t^{-1})}(x)\rangle =$

$= t^{-2}\langle \mathrm{Ad}^*_{\gamma(t)}(\xi), x\rangle =$

$\langle \mathrm{Ad}^*_{\gamma(t)}(\chi), y\rangle = (e, \mathrm{Ad}_{\gamma(t^{-1})}(y)) =$

$= (\mathrm{Ad}_{\gamma(t)} e, y) = t^2(e,y) = t^2\langle \chi, y\rangle$

$\ominus \; \langle x, x \rangle + t^{-2} \langle Ad^{*}_{g(t)}(v), x \rangle$

$\langle t^{-2} Ad^{*}_{g(t)}(v), y \rangle = t^{-2} \langle v, Ad_{g(t^{-1})} y \rangle =$

$= t^{-2} ( \Phi^{-1}(v), Ad_{g(t^{-1})} y ) = t^{-2} ( \underbrace{Ad_{g(t)} \Phi^{-1}(v)}_{\in\, m_e^{\perp \text{killing}}}, y )$

$m_e^{\perp \text{killing}} \subset \bigoplus_{i \leq 0} \mathfrak{g}_i \Rightarrow Ad_{g(t)}$ действует на $m_e^{\perp \text{killing}}$

с неположительными весами

$\Rightarrow t^{-2} ( Ad_{g(t)} \Phi^{-1}(v), y )$ будет иметь строго отрицательный вес.

Утв про $X + m_e^{\perp}$ доказано.

$\square$

Проверим, что градуировка Каждана на $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ индуцирована действием $\tilde{\rho}$.

Рассмотрим $x \in \mathfrak{g} \cap gr_k^{p+2} U(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}_p$, $\xi \in \mathfrak{g}^*$.

$\langle \xi, \tilde{\rho}(t, x) \rangle = \langle \tilde{\rho}(t^{-1}, \xi), x \rangle =$

$= t^{-4} \langle \xi, \rho(t^{-1}, x) \rangle = t^{2} \langle \xi, Ad_{g(t)} x \rangle =$

$= t^{2} \langle \xi, t^{p} x \rangle = t^{p+2} \langle \xi, x \rangle$.

Определим фильтрацию Каждана на $Q_e$:

$$\pi: U(\mathfrak{g}) \to \frac{U(\mathfrak{g})}{I_e} = Q_e$$

$$F_k^p Q_e = \pi\left(F_k^p U(\mathfrak{g})\right)$$

Заметим $F_k^{<0} U(\mathfrak{g}) \subset I_e \Rightarrow F_k^{<0} Q_e = 0$.

$F_k^{\leq -1} U(\mathfrak{g})$ натянуто на $F^j_{PBW} U(\mathfrak{g})(i)$ : $2j+i \leq -1$.

$$j \geq 0$$
$$2j+i \leq -1 \Rightarrow i \leq -1.$$

$$I_e = (x - \chi(x)), \quad x \in m_e = l \oplus \bigoplus_{i \leq -2} \mathfrak{g}_{-2}.$$

$$gr_k^\circ Q_e \cong \frac{gr_k^\circ U(\mathfrak{g})}{gr_k^\circ I_e} \cong \frac{\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]}{(x-\chi(x))_{x \in m_e}} \cong \mathbb{C}[\chi + m_e^\perp]$$

Фильтрация Каждана на $W_e$ индуцирована вложением $W_e \hookrightarrow Q_e$.

$$W_e \cong H^0(m_e, Q_e)$$

$$(x+I_e)(y+I_e) = xy + I_e.$$

Алгебра $U(\mathfrak{g})$ фильтрованная и $I_e \subset F^{<0} U(\mathfrak{g})$.

$$\mathfrak{n}_e = \bigoplus_{i \le -1} (\mathfrak{n}_e)(i) \circlearrowleft \mathrm{ad}_h.$$

$$x \in \mathfrak{n}_e(i) \qquad \underline{\mathrm{ad}_x(F_k^p Q_e) \subset F_k^{p+i} Q_e}.$$

$$W_e \simeq U_p H^0(\mathfrak{n}_e, F^p Q_e)$$

Рассмотрим композицию

$$\begin{tikzcd} \mathrm{gr}_k^i W_e \arrow[r, hook] \arrow[rrr, bend right, "D"'] & \mathrm{gr}_k^i Q_e \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{C}[x+\mathfrak{m}_e^\perp] \arrow[r] & \mathbb{C}[S] \end{tikzcd}$$

Правая стрелка индуцирована вложением $S \hookrightarrow x+\mathfrak{m}_e^\perp$.

$\tilde{\rho}$ сохраняет $x+\mathfrak{m}_e^\perp$ и $S$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow D$ сохраняет градуировку.

# 2. Основная теорема

**Thm 1:** D — изоморфизм.

$N_e \circlearrowright x+m_e^\perp$ коприсоединённо $\rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow$ $N_e \circlearrowright \mathbb{C}[x+m_e^\perp]$. $\rightsquigarrow$ $n_e \circlearrowright \mathbb{C}[x+m_e^\perp]$

$N_e$ — унипотентная группа ($\Rightarrow \exp: n_e \xrightarrow{\sim} N_e$.)

$\mathbb{C}[x+m_e^\perp]^{N_e} = \mathbb{C}[x+m_e^\perp]^{n_e}$.

**Лемма 1:** Ограничение $\mathbb{C}[x+m_e^\perp] \to \mathbb{C}[S]$ индуцирует изоморфизм $\mathbb{C}[x+m_e^\perp]^{n_e} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[S]$.

**Д-во леммы 1:**

$$\begin{tikzcd}
N_e \times S \arrow[rr, "\alpha", "\sim"'] & & x+m_e^\perp \\
& S \arrow[ul, "(e\times id)"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[N_e \times S] \arrow[dr, "(e\times id)^\#"'] & & \mathbb{C}[x+m_e^\perp] \arrow[ll, "\alpha^\#"', "\sim"] \arrow[dl, "\text{ограничение}"] \\
& \mathbb{C}[S] &
\end{tikzcd}$$

— $N_e$-экв $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $n_e$-экв.

$\mathbb{C}[N_e \times S] = \mathbb{C}[N_e] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[S]$, $\mathbb{C}[N_e]^{n_e} = \mathbb{C}$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[S'] \arrow[dr, "\sim"'] & & \mathbb{C}[x+\mathfrak{m}_e^{\perp}]^{\mathfrak{n}_e} \arrow[ll, "(\psi^{\#})^{\mathfrak{n}_e}"', "\sim"] \arrow[dl] \\
& \mathbb{C}[S'] &
\end{tikzcd}
$$

$\square$

Рассмотрим композицию

$$\mathrm{gr}_k^0 Q_e \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[x+\mathfrak{m}_e^{\perp}] \longrightarrow \mathbb{C}[S'] .$$

$\mathfrak{n}_e$ - экв.

$\Rightarrow$ индуцирует морфизм $\psi: H^0(\mathfrak{n}_e, \mathrm{gr}_k^0 Q_e) \longrightarrow \mathbb{C}[S']$.
Лемма 1 $\Rightarrow$ $\psi$ - iso.

<u>Лемма 2</u>: $H^{\geq 1}(\mathfrak{n}_e, \mathrm{gr}_k^0 Q_e) = 0$.

Обозначим вложение $W_e \hookrightarrow Q_e$ за $\varphi$.
$\varphi$ - $\mathfrak{n}_e$ - экв., причем $\mathfrak{n}_e \curvearrowright W_e$ тривиально $\Rightarrow$
$\Rightarrow$

$\tilde{\varphi}: W_e \longrightarrow C^0(\mathfrak{n}_e, Q_e)$ - морфизм фильтрованных комплексов, где

$F^p(\Lambda^k \mathfrak{n}_e^* \otimes Q_e)$ порождено

$(x_1 \wedge \ldots \wedge x_k) \otimes v : \; x_m \in \mathfrak{n}_e^*(i_m), \; v \in F_k^j Q_e$ ;
$i_1 + \ldots + i_m + j \leq p$.

Лемма 3: $F^p\tilde{\varphi} : F^p_k W_e \longrightarrow F^p C^\bullet(\mathfrak{n}_e, Q_e)$ – q.i.

Лемма 4: Вложение $\varphi : W_e \hookrightarrow Q_e$ индуцирует изоморфизм $\mathrm{gr}^i_k W_e \xrightarrow{\sim} H^0(\mathfrak{n}_e, \mathrm{gr}^i_k Q_e)$.

Д-во теоремы 1:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{gr}^i_k W_e \arrow[r] \arrow[dr, "\sim"] & \mathrm{gr}^i_k Q_e \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{C}[\chi + \mathfrak{m}_e^\perp] \arrow[r] & \mathbb{C}[S'] \\
& H^0(\mathfrak{n}_e, \mathrm{gr}^i_k Q_e) \arrow[u] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathbb{C}[\chi + \mathfrak{m}_e^\perp]^{\mathfrak{n}_e} \arrow[u] \arrow[ur, "\sim"] &
\end{tikzcd}$$

$\square$