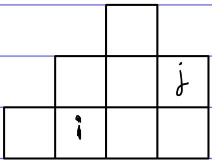
W & Y

Brundan, Kleshchev "Shifted Yangians and finite W-algebras" arXiv: 0407012

1. Пирамиды

Опр Пирамида — это упорядоченный набор чисел $(q_1, q_2, \dots, q_l)$ таких, что

$q_1 < q_2 < q_3 < \dots < q_k$ $\quad q_k > q_{k+1} > \dots > q_l$



$(1, 2, 3, 2)$

$\deg e_{ij} = 2$

Пусть $\sum q_i = N$

Занумеруем клеточки пирамиды $1, \dots, N$

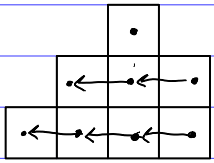
$row(i)$ - номер строки $\quad col(i)$ - номер столбца

Рассмотрим векторное пр-во V с базисом $v_1, \dots, v_N$

Матричные единицы $e_{ij} v_k = \delta_{jk} v_i$

Определим нильпотент

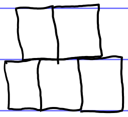
$$e = \sum_{\substack{row(i) = row(j) \\ col(i) = col(j) - 1}} e_{ij}$$



Градуировка на алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N = \bigoplus_j \mathfrak{g}_j$

$$\deg(e_{ij}) = col(j) - col(i)$$

Замечание В прошлом семестре градуировка на $\mathfrak{g}$ приходила из h т.ч. $\{e, h, f\}$ — sl_2-тройка.



deg — это град. из прошлого семестра $/2$

2. W-алгебры

$$\mathfrak{m} = \bigoplus_{j<0} \mathfrak{g}_j$$

$\chi : \mathfrak{m} \to \mathbb{C}$ — характер

$\chi(a) = (e, a)$

$Q_\chi = U(\mathfrak{g}) / I_\chi$

левый идеал порождённый $a - \chi(a)$ для $a \in \mathfrak{m}$

Опр W-алгебра

$$W(\pi) = \{ x \in Q_\chi \mid (a - \chi(a))\, x = 0 \text{ для всех } a \in \mathfrak{m} \}$$

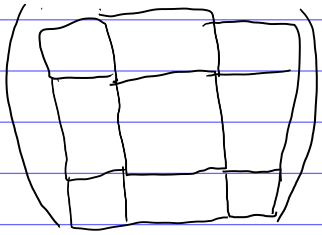
Альтернативное описание

$\mathfrak{p} = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}_i$ По теореме PBW

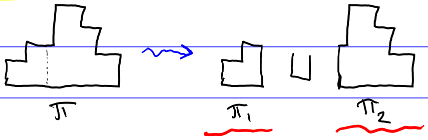
$U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{p}) \oplus U(\mathfrak{g}) I_\chi$

$(a - \chi(a))\, x \in U(\mathfrak{g}) I_\chi$

$W(\pi) = \{ x \in U(\mathfrak{p}) \mid [a, x] \in U(\mathfrak{g}) I_\chi$ для всех $a \in \mathfrak{m} \}$



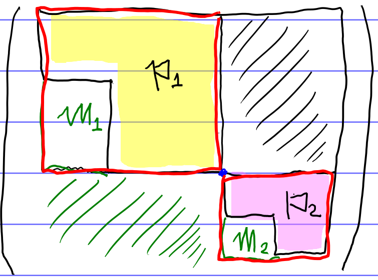
"Коумножение" Пусть $\pi = \pi_1 \sqcup \pi_2$



Тогда $W(\pi) \to W(\pi_1) \otimes W(\pi_2)$

индуцированное отображением

$\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2$ $\qquad$ $U(\mathfrak{p}) \to U(\mathfrak{p}_1) \otimes U(\mathfrak{p}_2)$



В частности $W(\pi) \longrightarrow W(\pi') \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_t)$

где

$\pi = (q_1, \dots, q_\ell)$ $\quad \pi' = (q_1, \dots, q_{\ell-1})$ $\quad t = q_\ell$

С другой стороны $\quad W(\pi') \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_t) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{p})$

Идея Строить образующие $W(\pi)$ рекурсивно;

"подправить" образующие $W(\pi') \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_t)$

Пример $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_3$ $\quad \begin{array}{|c|c} \hline 1 & \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{|c|}{3} \\ \hline \end{array}$

$$\mathfrak{p} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix} \qquad e = e_{23}; \qquad \begin{matrix} \chi(e_{31}) = 0 \\ \chi(e_{32}) = 1 \end{matrix}$$

I_χ порождён e_{31} и $e_{32} - 1$

Утв $e_{11}, e_{21} \in W(\pi)$

$e_{12}, e_{22} \notin W(\pi)$

Например

$[e_{31}, e_{21}] = 0 \qquad [e_{32}, e_{21}] = e_{31} \in I_\chi$ ✓

$[e_{31}, e_{12}] = e_{32} \notin I_\chi$ ✗

Напоминание $\operatorname{gr} W(\pi) = \mathbb{C}[S_e]$

$\dim S_e = \dim \mathfrak{g} - 2 \dim \mathfrak{m} = 9 - 2 \times 2 = 5$

$S_e = (\mathfrak{m}^\perp + e)/\mathfrak{m}$

наша гр $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & \\ \hline -2 & -1 \\ \hline \end{array}$

5 обр. степ. -1

~~2 обр. степ -2~~

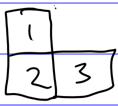
$T_e\left(\mathfrak{m}^\perp + e/\mathfrak{m}\right)$ $\quad$ 3 обр. степ. -1

2 обр. степ. -2

$T_{11}^{(1)} = e_{11}$	$T_{12}^{(2)} = e_{13} + e_{11}e_{12} - e_{12}e_{33} - 2e_{12}$
$T_{21}^{(1)} = e_{21}$	$T_{22}^{(1)} = e_{22} + e_{33}$ $T_{22}^{(2)} = e_{23} + e_{21}e_{12} - e_{22}e_{33} + e_{33} - e_{22}$

$T_{ij}^{(k)} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$

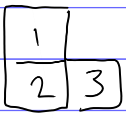
$T_{ij}^{(k)} \in W(\pi)$



$e_{ij} = \mathrm{col}(j) - \mathrm{col}(i) + 1$

1 строка

2 строка

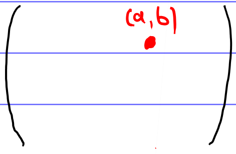


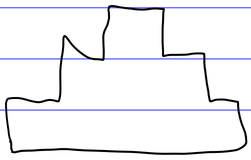
5 генераторов

deg   2 степ 2

3 степ 1

В общем случае





σ S_{ab} в месте (a,b) стоят генераторы степени

$S_{ab}+1, S_{ab}+2, \ldots, S_{ab}+p_{\min(a,b)}$

p_k – длина k-ой строки сверху

$(a - \chi(a))(x + I_\chi) \in I_\chi$

$y(a - \chi(a)) \in I_\chi \qquad [a, x] \in I_\chi$

$S_e = \mathfrak{g} /\!/_{\chi} M = (\chi + \mathfrak{m}^{\perp}) / M$

$Sym(\mathfrak{g})$ — функции на $\mathfrak{m}^{\perp} + \chi$

Теорема (1) $n = \max(q_1, \dots, q_\ell)$

сдвин $Y_n(\sigma) \twoheadrightarrow W(\pi)$

где σ — матрица сдвигов, строится по π

(2) $Y_{n,\ell}(\sigma) \xrightarrow{\sim} W(\pi)$

сдвин. , обрез.

$$Y_{n,\ell}(\sigma) = Y_n(\sigma) / (P_{0,0}^{(\ell)})$$

$$\begin{pmatrix} & \overset{(i,j)}{\bullet} & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

обыч. Янгиан — степени ≥ 0

сдвинутый — степени $\geq s_{i,j}$

обрез. $s_{i,j} + p_{\min(i,j)} \geq$ степ $\geq s_{i,j}$

$Y_n(\sigma) \subset Y_n$