Аффинный Грассманиан

(и Янгиан)

0) Конечномерный случай.

G - связная редуктивная группа $/\mathbb{C}$ $(G = GL_n)$

$B \subset G$ - Борелевская $\left(B = \left\{\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}\right\}\right)$

<u>Th</u>. (Разложение Брюа): $G = \bigsqcup_{w \in W} BwB$.

$W = N(T)/T$ $\qquad G/B = \bigsqcup_w Bw$

$\square$ Идея $(G = GL_n \underset{GL(V)}{\simeq})$ $\quad {}_B\backslash G/B = {}_G\backslash (G/B \times G/B)$ -

взаимное положение двух флагов.

$F_\bullet$ и $F'_\bullet$ - флаги, $d_{ij} = \dim(F_i \cap F'_j)$

$(w)_{i,j=1}^n$ матрица, у которой 1 в i-ой строке на том месте, где в фильтрации на (F_i/F_{i-1}), заданной флагом F'

$w_{ij} = d_{ij} - d_{i-1,j} - d_{i,j-1} + d_{i-1,j-1}$.

$F_\bullet = (e_1) \subset (e_1, e_2) \dots \subset (e_1, \dots e_n))$

$F'_\bullet = e_{w(1)} \subset (e_{w(1)}, e_{w(2)}) \subset \dots \quad (e_{w(1)} \dots e_{w(n)})$ $\square$

<u>Замечание</u>. $G = \bigsqcup_{w \in W} B_- wB$.

<u>Th</u>. $\mathbb{C}^\times \curvearrowright X$ - гладкое проективное мн-зие

и $X^{\mathbb{C}^\times}$ - дискретное, то

$$X = \bigsqcup_{p \in X^{\mathbb{C}^\times}} X_p \qquad X_p = \{x \in X \mid \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \mathbb{C}^\times}} z.x = p\}$$

X_p – аффинное пр-во.

• $X^{\mathbb{C}^\times}$ – не дискретно:

$$X = \bigsqcup_{C \subset X^{\mathbb{C}^\times}} X_C \qquad X_C = \{x \in X \mid \lim_{z\to 0} z.x \in C\}$$

$X_C \longrightarrow C$ – аффинное расслоение.

(Białynicki-Birula)

$2\rho^\vee : \mathbb{C}^\times \to H$, $2\rho^\vee = \mathrm{diag}(z^{-1}, z^{-2}, \ldots, z^{-n})$

$2\rho^\vee : \mathbb{C}^\times \curvearrowright G/B$

$(G/B)^{2\rho^\vee} = W$, $\qquad w \in G/B$, $W \cap G/B$

$2\rho^\vee . w = w \in G/B$

$x \in G/B$

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x = uwB$, $u \in U$

$$2\rho^\vee w = \begin{pmatrix} 0 & z^{-1} & 0 \\ z^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z^{-3} \end{pmatrix} =$$

$G = \bigsqcup_w UwB$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z^{-2} & & 0 \\ & z^{-1} & \\ 0 & & z^{-3} \end{pmatrix} \in WB$$

$(2\rho)\, u\, wB =$

$$= (2\rho^\vee)\, u\, (2\rho^\vee)^{-1} \cdot \underbrace{(2\rho^\vee)\, wB}_{= wB}$$

$$\begin{pmatrix} z^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z^{-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z^{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (z\cdot) & (z\cdot) \\ & \ddots & \\ & & (z\cdot) \\ & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[z\to 0]{}$$

$\to \mathrm{Id} \implies$ Клетки Шуберта $\simeq \mathbb{A}^{\ell(w)}$

Ex. GL_2. $G/B \simeq \mathbb{P}^1 = \underset{1}{\cdot} \sqcup \underset{-1}{\mathbb{A}^1}$

1) Аффинный Грассманиан

$G((t))$

Опр. $Gr_G = G((t)) / G[[t]]$ — аффинный Грассманиан.

Геометрически $G = GL_n = GL(V)$

$Gr_G = \{ L \subset V((t)) \mid L$ — свободный $\mathbb{C}[[t]]$-модуль ранга $n \}$

$G((t)) \curvearrowright V((t))$, $L_0 = V[[t]]$

$\mathrm{Stab}_{G((t))} L_0 = G[[t]]$

$Gr_G^N = \{ L \subset V((t)) \mid t^N L_0 \subset L \subset t^{-N} L_0 \}$

$Gr_G^1 \subset Gr_G^2 \subset \dots \to Gr_G$

$\forall L \in Gr_G^N$ $\left(L / t^N L_0 \right)$ подпр-во в $\left(V \otimes \mathbb{C}[t] / t^{2N} \right)$

$Gr_G^N \hookrightarrow \bigsqcup_{0 \le k \le 2nN} Gr(k, 2n \cdot N)$

$G = \mathbb{G}_a$, $Gr_G = \mathbb{C}((t)) / \mathbb{C}[[t]] \underset{Set}{=} \mathbb{C}[t^{-1}]t^{-1}$

G - не редуктивно

$$G[t^{-1}] \curvearrowright G((t))/G[[t]]$$

<u>Утв</u>. $Gr_G = \bigsqcup_{\mu \in \Lambda^+} G[t^{-1}]\, t^{\mu}$,

$t^{\mu} = \mathrm{diag}(t^{\mu_1}, \dots, t^{\mu_n}) \in Gr_G$, $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_n$

□ I. $\underline{G((t))/G[[t]] = G[t^{\pm 1}]/G[t]}$

II. Если поверить, то: $G[t^{-1}] \backslash G[t^{\pm 1}] / G[t] = ?$

S - схема, $U_1 \cup U_2 = S$.

$\left(G(U_1) \backslash G(U_1 \cap U_2) / G(U_2) \right)$ ~ пр-во модулей всех G-расслоений.

$\mathbb{P}^1$, $U_1 = \mathbb{P}^1 \setminus 0$, $U_2 = \mathbb{P}^1 \setminus \infty$
$\qquad\qquad = \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[t^{-1}] \qquad = \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[t]$

$(*)$ $G[t^{-1}] \backslash G[t^{\pm 1}] / G[t]$ - расслоения (ранга n) на $\mathbb{C}P^1$.

<u>Утв.</u> $\Leftrightarrow$ любое расслоение на $\mathbb{C}P^1 = \mathcal{O}(\mu_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(\mu_n)$

$\underline{\text{I. } S = U_2 = \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[[t]]^{(**)},\ U_1 = S \setminus 0 = \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}((t))}$

$(*)$ $\left(G[t^{\pm 1}] / G[t] \right) = (\xi, \theta)$ - ξ - расслоение на $\mathbb{P}^1$
θ - тривиализация на $\mathbb{P}^1 \setminus 0$.

$\downarrow \; \|$

$$(**)\ \left(G((t)) \big/ G[[t]] \right) = (\mathcal{P}, \mathcal{E}),$$ $\mathcal{P}$ - расслоения $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[[t]]$

$\mathcal{E}$ - тривиал. на $\operatorname{Spec} \mathbb{C}((t))$. $\square$

$\mathbb{C}^\times \curvearrowright Gr_G$ - вращение петли.

$$\underset{\mathbb{C}^\times}{\hat{z}} \cdot t = (zt)$$

<u>Утв.</u> $(Gr_G)^{\mathbb{C}^\times} = \bigsqcup_{\mu \in \Lambda^+} G t^\mu$

$\square$ $\supset$ $z.t^\mu = t^\mu$, $\supset$ - ясно.

$\subset$ $x \in Gr_G$ $x = g(t^{-1}).t^\mu$, где $g(t^{-1}) \in G[t^{-1}]$

$$\underset{\forall z}{x = z.x} = z.(g(t^{-1}).t^\mu) = g(z^{-1}t^{-1})(zt^\mu) =$$

$$= \lim_{z \to \infty} g(z^{-1}t^{-1}).t^\mu = \underset{\hat{G}}{g(0)}.t^\mu \quad \square$$

$$\begin{array}{ccc} G[t^{-1}]\, t^\mu & \xrightarrow{t \to \infty} & G t^\mu \\ \cup & & \cup \\ G[t^{-1}]_1 . t^\mu & \xrightarrow{t \to \infty} & t^\mu \end{array}$$

$G[t^{-1}]_1 = \ker (t \to \infty)$

---

2) Толстый аффинный Грассманиан.

$$Gr_G = G((t^{-1})) \big/ G[t] \left(= G((s)) \big/ G[s^{-1}] \right) = \left(\left(\begin{array}{l} \text{расслоения } \mathbb{P}^1 + \\ \text{тривиализац.} \\ \text{на } \operatorname{Spec} \mathbb{C}[[t^{-1}]] \end{array} \right)\right)$$

$s = t^{-1}$

Ex (нередуктивно) $\mathbb{G}_a$, $\mathrm{Gr}_G = \mathbb{G}_a((t^{-1}))/\mathbb{G}_a[t] = t^{-1}\mathbb{G}_a[[t^{-1}]]$

Замечание. $\mathrm{Gr}_G \hookrightarrow \mathbb{G}\mathrm{r}_G$

тонкий $\qquad\qquad$ толстый

$$G[t^{\pm 1}]/G[t] \hookrightarrow G((t^{-1}))/G[t]$$

Утв. $\mathbb{G}\mathrm{r}_G = \bigsqcup_{\mu\in\Lambda^+} G[[t^{-1}]]\, t^{\mu}$

$\square$ $\quad G[t] \curvearrowright G((t^{-1})) \curvearrowleft G[[t^{-1}]]$

$$\underbrace{\left(G((t^{-1}))/G[t]\right)}_{=\mathbb{G}\mathrm{r}_G} \curvearrowleft G[[t^{-1}]] \qquad\qquad G[t] \curvearrowright \overbrace{\left(G((t^{-1}))/G[[t^{-1}]]\right)}^{\mathrm{Gr}_G}$$

$\blacksquare$

Хотим: $G[[t^{-1}]]_1\, t^{\mu} =: W_\mu \subset \mathbb{G}\mathrm{r}_G$

$W_0 = G[[t^{-1}]]_1\, t^0 = G[[t^{-1}]]_1$, т.к.

квантуется Y_n $\qquad$ $G[[t^{-1}]]_1 \cap G[t] = 1$

W_μ – квантуется сдвинутым Янгианом.

(Есть еще W_μ^λ)

Аффинный грассманиан и сдвинутый Янгиан.

В прошлый раз: $G = GL_n$

$$Gr_G = G((t))/G[[t]] = G[t^{\pm 1}]/G[t]$$

$$Gr_G = \bigsqcup_{\mu \in \Lambda^+} G[t^{-1}]\, t^\mu$$

$t^\mu = \mathrm{diag}(t^{\mu_1}, \ldots, t^{\mu_n}) \in Gr_G.$

Толстый грассманиан:

$$\mathbb{G}r_G = G((t^{-1}))/G[t]$$

<u>Утв.</u> $\mathbb{G}r_G = \bigsqcup_{\mu \in \Lambda^+} G[[t^{-1}]]\, t^\mu.$

<u>Ex</u>. $n = 1$.

$$Gr_G = \mathbb{C}^\times((t))/\mathbb{C}^\times[[t]] = \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{G}_G = \mathbb{C}^\times((t^{-1}))/\mathbb{C}^\times[t] = \mathbb{C}((t^{-1}))^\times/\mathbb{C}^\times = \bigsqcup_{\mu \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times[[t^{-1}]]\, t^\mu.$$

Орбиты группы $G[[t^{-1}]]_1$

$G[[t^{-1}]]_1 = \ker(t^{-1} \mapsto 0)$

$\mathbb{C}[[t^{-1}]] = \varprojlim \mathbb{C}[t^{-1}]/t^{-N}$

$$G\left(\mathbb{C}[[t^{-1}]]/t^{-N}\right)_1 = \{\, 1 + t^{-1} \bigcirc \,\}$$

Хотим: $\underline{W_\mu = G[[t^{-1}]]_1 \, t^{w_0\mu}}$

$$G[[t^{-1}]]_1 \curvearrowright G((t^{-1}))/G[t]$$

$$\mathrm{Stab}_{G[[t^{-1}]]_1} t^{w_0\mu} \xleftarrow[\sim]{\exp} \mathrm{Lie}\,\mathrm{Stab}_{G[[t^{-1}]]_1} t^{w_0\mu}.$$

$$w_0 : (\mu_1, \dots \mu_n) \mapsto (\mu_n, \dots \mu_1).$$

$$\Gamma \curvearrowright G/H \qquad H \subset G, \ \Gamma < G$$

хотим $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Stab}_\Gamma(gH)$

$x \in \mathrm{Lie}\,\mathrm{Stab}_\Gamma(gH)$

$\exp(sx).gH = gH \qquad s \in \mathbb{C}$

$g^{-1}\exp(sx)g \in H$

$\exp(s\underbrace{g^{-1}xg}) \in H$

$\mathrm{Ad}_{g^{-1}} x \in \mathrm{Lie}\,H$

$$\mathrm{Lie}\,\mathrm{Stab}_\Gamma(gH) = \{x \in \mathrm{Lie}\,\Gamma \mid \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(x) \in \mathrm{Lie}\,H\} =$$
$$= \mathrm{Lie}\,\Gamma \cap \mathrm{Ad}_g(\mathrm{Lie}\,H)$$

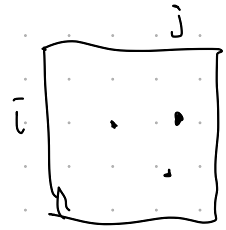
$\mathrm{Lie}\,G = \mathrm{Lie}\,H \oplus \mathrm{Lie}\,H'$

В нашем случае:

$$\operatorname{Lie} \mathrm{Stab}_{G[[t^{-1}]]_1} t^{w_0\mu} = \Big\{ \sum_{\substack{n=1\\ \alpha}}^{\infty} c_{\alpha,n} X_\alpha t^{-n} \Big\} ? \subset t^{-1}\mathfrak{g}[[t^{-1}]]$$

$$\mathrm{Ad}_{t^{w_0\mu}} X_\alpha t^{-n} \in \operatorname{Lie} G[t] = \mathfrak{g}[t] \qquad n>0$$

$$X_\alpha t^{-n-\langle \alpha, w_0\mu\rangle} \in \mathfrak{g}[t]$$



$$-n-\langle \alpha, w_0\mu\rangle \geq 0$$

$$n \leq -\langle w_0\mu, \alpha\rangle$$

Если $\alpha \in \Delta_-$, то $\{n\} = \varnothing$

$\operatorname{Lie} \mathrm{Stab}_{G[[t^{-1}]]_1} t^{w_0\mu} \subset t^{-1}\mathfrak{n}^+[[t^{-1}]]$ $\qquad$ $\mathrm{Stab} \subset U[[t^{-1}]]_1$

$$- \operatorname{Lie} G[[t^{-1}]]_1 \underset{\text{vect}}{=} \operatorname{Lie} \mathrm{Stab}_\mu \oplus \; ?$$

$\simeq t^{-1}\mathfrak{g}[[t^{-1}]]$

$$? = t^{-1}\mathfrak{h}[[t^{-1}]] \oplus \prod_{\substack{n\geq 1\\ \alpha}} \mathbb{C} X_\alpha t^{-n}, \text{ т.ч. } n > \langle -\alpha, w_0\mu\rangle \simeq \operatorname{Lie} G_{\gamma_\mu} =$$

$$= t^{-1}\mathfrak{g}[[t^{-1}]] \cap \mathrm{Ad}_{t^{w_0\mu}}(t^{-1}\mathfrak{g}[[t^{-1}]])$$

$$\operatorname{Lie} G[[t^{-1}]]_1 = \operatorname{Lie} \mathrm{Stab}_{t^{w_0\mu}} \oplus \operatorname{Lie} G_{\gamma_\mu}$$

$$G_{\gamma_\mu} = G[[t^{-1}]]_1 \cap t^{w_0\mu} G[[t^{-1}]]_1 t^{-w_0\mu}$$

$$\mathcal{W}_\mu = G_{\gamma_\mu}, \quad G[[t^{-1}]]_1 \overset{\text{Var}}{=} G_\mu \times \mathrm{Stab}(t^{w_0\mu})$$

$$\mathcal{O}(\mathcal{W}_\mu) = \mathcal{O}(G_{\gamma_\mu}) = \mathcal{O}(G[[t^{-1}]]_1)^{\mathrm{Stab}_{t^{w_0\mu}}}$$

K/μ : $U_w (= Bw = A^{\ell(w)})$, $\ell(w) = |\{\alpha\in\Delta^+ \mid w\alpha\in\Delta^-\}|$

$$\bigoplus_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha = \mathrm{Lie}\, U = \mathrm{Lie}\,\mathrm{Stab}_U w \oplus \bigoplus_{\substack{\alpha\in\Delta^+\\ w\alpha\in\Delta^-}} \mathfrak{g}_\alpha$$

$n^+ \cap (\mathrm{Ad}_w n^-)$ = подалгебра Ли

Разложение Гаусса для $G_{y\mu}$.

$$G[[t^{-1}]]_1 = U_-[[t^{-1}]]_1 \cdot T[[t^{-1}]]_1 U[[t^{-1}]]_1$$

__Утв.__ $G_{y\mu} = U_-[[t^{-1}]]_1 T[[t^{-1}]]_1 t^{w_0\mu} U[[t^{-1}]]_1 t^{-w_0\mu}$

□ RHS $\subset G_{y\mu}$

1) RHS $\subset G[[t^{-1}]]_1$

$$t^{w_0\mu} U[[t^{-1}]]_1 t^{-w_0\mu} \subset U[[t^{-1}]]_1$$

$$t^{w_0\mu}\begin{pmatrix} 1+ & t^{-1}\cdot & * \\ & \ddots & t^{-1}\cdot \\ 0 & & 1+t^{-1}\cdot \end{pmatrix} t^{-w_0\mu}$$

ok из-за доминантн. μ.

2) RHS $\subset t^{w_0\mu} G[[t^{-1}]]_1 t^{-w_0\mu}$

$$t^{-w_0\mu} U_-[[t^{-1}]]_1 T[[t^{-1}]]_1 t^{w_0\mu} U[[t^{-1}]]_1 \in G[[t^{-1}]]_1$$

$$\parallel \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \psi$$

$$\underbrace{t^{-w_0\mu} U_-[[t^{-1}]]_1 t^{w_0\mu}}_{\subset\, U_-[[t^{-1}]]_1} T[[t^{-1}]]_1 U[[t^{-1}]]_1$$

$G_{\gamma\mu} \subseteq RHS$

$g \in$ $\quad g = u_- h u$ $\quad$ Хотим:

$$u \in t^{w_0\mu} U[[t^{-1}]]_1 t^{-w_0\mu} \Leftrightarrow t^{-w_0\mu} u t^{w_0\mu} \in U[[t^{-1}]]_1$$

$$g \in G_{\gamma\mu} \Rightarrow t^{-w_0\mu} g t^{w_0\mu} \in G[[t^{-1}]]_1$$

$$\parallel$$

$$(t^{-w_0\mu} u_- t^{w_0\mu}) h (t^{-w_0\mu} u t^{w_0\mu})$$

$$t^{-w_0\mu} u t^{w_0\mu} \in G[[t^{-1}]]_1,$$

$$t^{-w_0\mu} u t^{w_0\mu} \in U_-((t^{-1}))$$

$$\Downarrow$$

Ok $\square$

Пуассонова структура на Gr_G

Опр Тройка Манина: (g, l_+, l_-) - алгебры Ли, $g = l_+ \underset{\text{Vect}}{\oplus} l_-$, и на g есть невырожд. инвариантн. форма, т.ч. l_+, l_- - изотропны.

(g, δ)

$$r = \sum_i e_i^* \wedge e_i \in \Lambda^2 g$$

$e_i \in l_+$, $e_i^* \in l_-$ т.ч. $(e_i, e_j^*) = \delta_{ij}$.

$\Pi = \tilde{r}_R - \tilde{r}_L$ — Пуассонов тензор на G.

$\delta(X) = (ad_X \otimes 1 + 1 \otimes ad_X) r$.

Факт. G — группа П-Л. $L_\pm$ — подгруппы П-Л.

G/L_+ — Пуассоново, действие L_+ на G/L_- — Пуассоново.

L_+-орбиты на G/L_- — Пуассоновы

Наш случай: $(\underset{\mathfrak{g}}{\mathfrak{g}((t^{-1}))}, \underset{l_+}{t^{-1}\mathfrak{g}[[t^{-1}]]}, \underset{l_-}{\mathfrak{g}[t]})$

$(f(t), g(t)) = -\mathrm{Res}_0 \langle f(t), g(t) \rangle$

$$r = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_a J_a u_1^{-n-1} \otimes J^a u_2^n = \frac{\sum_a J_a \otimes J^a}{u_1 - u_2} = \frac{\Omega}{u_1 - u_2}$$

$\{J_a\}, \{J^a\}$ — двойств. базисы в $\mathfrak{g}$

$G[[t^{-1}]]_1$

$G \ni \mu_G$ $\quad W_\mu = G_{\delta\mu}$ — Пуассоновы мн-зия

Y_n квантует $G[[t^{-1}]]_1$.

$$\varphi : \mathrm{gr}\, Y_n \to \mathcal{O}(G[[t^{-1}]])$$

$W_0 = G[[t^{-1}]]_1$

Def. $Y_\mu \subset Y_n$ — сдвинутый Янгиан

Y_μ порожден:

$$\varphi|_{\mathrm{gr}\,Y_\mu} : \mathrm{gr}\,\underset{\sim}{Y_\mu} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(W_\mu) = \mathcal{O}(G[[t^{-1}]]_1)^{\mathrm{Stab}}$$

Аффинный грассманиан и сдвинутый Янгиан №3

В прошлые разы:

$$Gr_G = G((t^{-1}))\big/G[t] \qquad G = GL_n$$

$$t^\mu = \mathrm{diag}(t^{\mu_1}, \dots, t^{\mu_n}) \in Gr_G$$

$$G[[t^{-1}]]_1 . t^{w_0\mu} = \mathcal{W}_\mu$$

$$\mathrm{Lie}\,\mathrm{Stab}_{G[[t^{-1}]]_1} t^{w_0\mu} = \bigoplus_{0<n\leq -\langle\alpha, w_0\mu\rangle} x_\alpha t^{-n}$$

$\alpha\in\Delta^-$ - условие пусто $\Rightarrow \mathrm{Stab}_{G[[t^{-1}]]} t^{w_0\mu} \subset U[[t^{-1}]]_1$
$\alpha = 0$

$G_{\delta\mu} \underset{var}{\cong} \mathcal{W}_\mu$, итог:

$$\mathcal{O}(\mathcal{W}_\mu) = \mathcal{O}(G[[t^{-1}]]_1)^{\mathrm{Stab}\, t^{w_0\mu}}$$

На Gr_G есть Пуассонова структура

$$r = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_a J_a u_1^{-n-1} \otimes J^a u_2^n \in \mathfrak{g}((u_1^{\pm1})) \otimes \mathfrak{g}((u_2^{\pm1}))$$

$$\Pi = \vec{r}_R - \vec{r}_L$$

$$G[[t^{-1}]]_1 . t^0 = \mathcal{W}_0 \subset Gr_G \qquad \left(\begin{matrix} L_+ \curvearrowright \\ L_- \curvearrowright \end{matrix} G/L_- \right)$$

<u>Утв</u> $t^{w_0\mu}$ - Пуассонов бивектор $=0$

$$G \xrightarrow{\varphi} G \times M \xrightarrow{\Psi} M$$

$$(g, x) \longmapsto g.x$$

$G = G[[t^{-1}]]_1$

$M = Gr_G$

$x = t^{w_0\mu}$

Пуассонова тут:

$$\{f_1, f_2\}(g, x) = \{f_1(g, -), f_2(g, -)\}_M(x) +$$

$\varphi(g) = (g, x)$

$$+ \{f_1(-, x), f_2(-, x)\}_G(g)$$

$\Pi|_x = 0 \implies \Psi \circ \varphi$ Пуассоново.

$\square$ $r.t^{w_0\mu} - t^{w_0\mu} r \in \Lambda^2 T_{t^{w_0\mu}} G((t^{-1}))$

$$(*)\ t^{-w_0\mu} r t^{w_0\mu} - r \overset{?}{\in} \mathfrak{g}[t] \otimes t^{-1}\mathfrak{g}[[t^{-1}]] + t^{-1}\mathfrak{g}[[t^{-1}]] \otimes \mathfrak{g}[t]$$

$\mathfrak{g}((t^{-1}))$ $\quad$ $\mathfrak{g}((t^{-1}))$

дв. базисы в $\mathfrak{gl}_n$: $(e_\alpha, f_\alpha, h_i)$

$(f_\alpha, e_\alpha, h^i)$

$$(*)\ t^{-w_0\mu}\Big(\sum_{n\geq 0} e_\alpha u_1^{-n-1} \otimes f_{-\alpha} u_2^n + f_\alpha u_1^{-n-1} \otimes e_\alpha u_2^n + h_i u_1^{-n-1} \otimes h^i u_2^n\Big) t^{w_0\mu}$$

$-r \in$ чему надо

$$t^{-w_0\mu}(e_\alpha u_1^{-n-1}) t^{w_0\mu} = e_\alpha u_1^{-n-1-(w_0\mu, \alpha)}$$

$\square$

Вывод:

$$\mathcal{O}(W_\mu) = \mathcal{O}(G[[t^{-1}]]_1)^{\mathrm{Stab}\, t^{w_0\mu}}$$ — как Пуассоновы алгебры.

На $G[[t^{-1}]]_1$ есть функции

$$\Delta_i^j = \sum_s (\Delta_i^j)^{(s)} t^{-s}$$

$$\Delta^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_k} = \sum_s \left(\Delta^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_k}\right)^{(s)} t^{-s}.$$

$G[[t^{-1}]]_1 = \{1 + t^{-1} \mathcal{O}\}$

Например: $\left(\Delta^{j}_{i}\right)^{(0)} = \delta_{ij}$

<u>Теорема.</u> Y_n квантует $G[[t^{-1}]]_1$:

$$\varphi : \operatorname{gr} Y_n \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(G[[t^{-1}]]_1)$$

$$H_i(u) \longmapsto \frac{\Delta^{1 \dots i}_{1 \dots i}(u)}{\Delta^{1 \dots i-1}_{1 \dots i-1}(u)} \quad \checkmark$$

$$F^{(u)}_{i+1,i} = F_i(u) \longmapsto \frac{\Delta^{1 \dots i-1, i+1}_{1 \dots i}(u)}{\Delta^{1 \dots i}_{1 \dots i}(u)}$$

$$E^{(u)}_{i,i+1} = E_i(u) \longmapsto \frac{\Delta^{1 \dots i}_{1 \dots i-1, i+1}(u)}{\Delta^{1 \dots i}_{1 \dots i}(u)} \quad \checkmark$$

<u>Опр.</u> $Y_\mu \subset Y_n$ — подалгебра, порожденная

$$\underbrace{E^{(s)}_\alpha \quad \forall \alpha, s}, \quad \underbrace{H^{(s)}_i \quad \forall i, s}, \quad \underbrace{F^{(s)}_\alpha \text{ для } s > -(w_0\mu, \alpha)}$$

<u>Th</u> (Kamnitzer, Webster, Weekes, Yacobi, 2013)

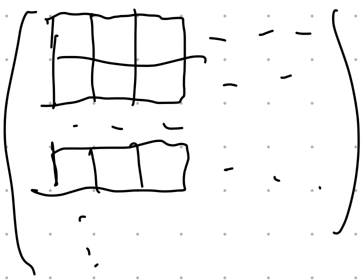
$$\varphi|_{Y_\mu} : \operatorname{gr} Y_\mu \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(W_\mu)$$

<u>Лемма.</u> $\operatorname{Im} \varphi|_{Y_\mu} \subset \mathcal{O}(G[[t^{-1}]]_1)^{\operatorname{Stab} t^{w_0\mu}} = \mathcal{O}(W_\mu)$

□ $(\overset{G[[t^{-1}]]_1}{\overset{\cup}{g}} \cdot f)(x) = f(xg)$

$\mathrm{Stab}\, t^{w_0\mu} \subset U[[t^{-1}]]_1 \Rightarrow \Delta^{1\dots i}_{1\dots i},\ \Delta^{1\dots i}_{1\dots i-1,i+1}$

Stab - инварианты

 $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & 1 & * \\ 0 & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$

$G = GL(V)$, $V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$, $G \curvearrowright \Lambda^i V$

$\Delta^{1\dots i-1, i+1}_{1\dots i}(g)$ - это коэффициент при $e_1 \wedge \dots \wedge e_i$ в

$g \cdot e_1 \wedge \dots \wedge e_{i-1} \wedge e_{i+1}$

для $k \in \mathrm{Stab}\, t^{w_0\mu} \subset U[[t^{-1}]]_1$:

$$k \cdot e_1 \wedge \dots \wedge e_{i-1} \wedge e_{i+1} = e_1 \wedge \dots \wedge e_{i-1} \wedge e_{i+1} + \Delta^{1\dots i-1,i+1}_{1\dots i}(k)\, e_1 \wedge \dots \wedge e_i.$$

$$F_i(gk) = \frac{\Delta^{1\dots i-1,i+1}_{1\dots i}(gk)}{\Delta^{1\dots i}_{1\dots i}(gk)} =$$

$$= \frac{\Delta^{1\dots i-1,i+1}_{1\dots i}(g) + \Delta^{1\dots i}_{1\dots i}(g)\, \Delta^{1\dots i-1,i+1}_{1\dots i}(k)}{\Delta^{1\dots i}_{1\dots i}(g)} =$$

$$= \frac{\Delta^{1\dots i-1,i+1}_{1\dots i}(g)}{\Delta^{1\dots i}_{1\dots i}(g)} + \Delta^{1\dots i-1,i+1}_{1\dots i}(k) = F_i(g) + \Delta^{1\dots i-1,i+1}_{1\dots i}(k)$$

$F^{(s)}_i(gk) = F^{(s)}_i(g)$ при $(s > (-w_0\mu, \alpha_i))$

$$k = \begin{pmatrix} 1 & t^{\cdot} & t^{\cdot} & \cdot & & \\ 0 & 1 & t^{\cdot} & \cdot & & \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{t^{\cdot}} & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

в $(i, i+1)$ хотя бы $t^{-(w_0\mu, \alpha_i)}$

при $s > (-w_0\mu, \alpha_i)$ – все Ok.

H_i, F_i, E_i – Пуассоново-порождают для $\mathcal{Y}_\mu$ $\square$

Th $\varphi|_{\mathcal{Y}_\mu}$ для $\mathcal{Y}_\mu \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathcal{W}_\mu) = \mathcal{O}(G_\mu)$

$\square$ $\varphi|_{\mathcal{Y}_\mu}$ – инъективно, т.к. ограничение инъективного.

Проверим, что размеры совпадают.

т.к. это размеры $\mathbb{C}[E_\alpha^{(u)}, H_i^{(u)}, F_\alpha^{(s)}, s > -(w_0\mu, \alpha)]$

$\square$

$$\mathcal{W}_\mu^\mu = pt$$

$$\mathcal{W}_\mu^\lambda = G[[t]]_1 t^{w_0\mu} \cap \overline{G[t]\, t^{w_0\lambda}}.$$