Эквивалентность Скрябина.

$\mathfrak{g}$ – п/п алг. Ли /$\mathbb{C}$, (e,h,f) – $\mathfrak{sl}_2$-тройка,

$\mathfrak{g}_{-1}$ – симпл. форма, $\ell \subset \mathfrak{g}_{-1}$ – лагранжево.

$\mathfrak{m} = \ell \oplus \bigoplus_{i\leq -2} \mathfrak{g}_i$ $\qquad x \in \mathfrak{g}^*$, $\chi(x) = (e, x)$

$Q_\chi = \mathcal{U}(\mathfrak{g})/I_\chi$, $I_\chi = \langle a - \chi(a) \mid a \in \mathfrak{m} \rangle$.

$W_\chi = (\operatorname{End} Q_\chi)^{op} = Q_\chi^{\operatorname{ad} \mathfrak{m}} = H^0(\mathfrak{m}, Q_\chi)$

W_χ-mod ?

<u>Опр.</u> $\mathfrak{g}$-модуль E – модуль Уиттекера, если $(a - \chi(a))$ действует на E локально-нильпотентно $\forall a \in \mathfrak{m}$.

$x \in E$ – вектор Уиттекера, если $(a - \chi(a))x = 0$ $\forall a \in \mathfrak{m}$.

$\mathfrak{g}\text{-Wmod}^\chi$ – категория к/п модулей Уитт.

$E \in \mathfrak{g}\text{-Wmod}^\chi$, $Wh(E) = \{x \in E \mid (a - \chi(a))x = 0 \ \forall a \in \mathfrak{m}\}$

<u>Лемма</u>. (1) $E \in \mathfrak{g}\text{-Wmod}^\chi$. На $Wh(E)$ есть действие W_χ:

$$\bar{y} . v = yv, \text{ где } y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}), \ \bar{y} \in \left(\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I_\chi\right)^{\operatorname{ad} \mathfrak{m}} = W_\chi$$

(2) $V \in W_\chi$-mod, $Q_\chi \otimes_{W_\chi} V$ – $\mathfrak{g}$-модуль Уиттекера:

$$y . (q \otimes v) = (yq) \otimes v.$$

$\square$ (1) Не зависит от выбора y. $I_x = \langle a - x(a) \rangle$

$W_x = \{ \bar{y} \mid (a - x(a))\, y \in I_x \quad \forall a \in m \}$

$v \in Wh(E)$ $\bar{y} . v \in Wh(E)$.

(2) Нужно, что $Q_x \in Wmod^x$.

$(a - x(a))^N . x = 0$ в $Q_x \Leftarrow ad^N_{a - x(a)} x = 0$ в $U(g)$

$ad_{a - x(a)} = ad_a$. m действует лок. нильпот. в g, т.к. m — отрицат. градуирована

$U(g) = \langle g \rangle$ $\square$

$Wh(Q_x) = W_x$.

Функтор Уиттекера:

$$Wh: g\text{-}Wmod^x \to W_x\text{-}mod$$
$$E \longmapsto Wh(E)$$

$$Q_x \otimes_{W_x} - : W_x\text{-}mod \to g\text{-}Wmod^x$$

<u>Th</u>. Wh и $Q_x \otimes_{W_x} -$ — квазиобратные эквивалентности категорий. (Скрябин, 2002)

$\square$ Эти функторы сопряжены

сопряж. к $Q_x \otimes_W -$ — это $Hom(Q_x, -) = (-)^{m_x} = Wh(-)$.

Rem.

$Hom(FX, Y) = Hom(X, GY)$, $\boxed{FGY_1 \cong Y_1} + GF = id$

$Hom(Y_1, Y_2) = Hom(GY_1, GY_2)$ $X \to GY_1$

$$\left[\begin{array}{l}(1)\ Wh(Q_x \otimes_{W_x} V) \leftarrow V \qquad 1\otimes V \leftarrow V \\ (2)\ Q_x \otimes_{W_x} Wh(V) \xrightarrow{\sim} V \quad , \ \bar{y} \otimes v \to yv.\end{array}\right.$$

(1) V порождено V_0, $\dim V_0 < \infty$. на V есть фильтрация $F_k^n V = (F_k^n W_x) V_0$.

$$Wh(Q \otimes_{W_x} V) = H^0(m, Q_x \otimes_{W_x} V).$$

$\leftarrow$ действие m_x

$V \to Wh(Q_x \otimes_{W_x} V) \Rightarrow$ достаточно: $gr V \simeq gr\, Wh(Q_x \otimes_{W_x} V)$

<u>Утв</u>. $gr\, H^0(m, Q_x \otimes_{W_x} V) = H^0(m, gr(Q_x \otimes_{W_x} V)) =$
$= gr V$.

и $H^{>0}(m, Q_x \otimes_{W_x} V) = H^{>0}(m, gr(Q_x \otimes_{W_x} V)) = 0$.

$\square$ $gr(Q_x \otimes_{W_x} V) \overset{?}{=} gr Q_x \otimes_{gr W_x} gr V =$
$= (\mathbb{C}[M] \otimes gr W_x) \otimes_{gr W_x} gr V = \mathbb{C}[M] \otimes gr V$.

$\left(gr Q_x = \mathbb{C}[m^\perp + e] = \mathbb{C}[M] \otimes \underset{gr W_x}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{C}[S]}} \right)$

$$H^i(m, gr(Q_x \otimes_{W_x} V)) = gr V \otimes H^i(m, \mathbb{C}[M]) = \\ = \delta_{i,0}\, gr V$$

$gr(A \otimes_C B) \leftarrow gr A \otimes_{gr C} gr B$ $\qquad$ $gr A$ свободен над $gr C$

$$\cancel{\frac{(A \otimes_C B)_k}{(A \otimes_C B)_{k-1}}} \leftarrow \bigoplus_{i+j=k} \underbrace{A_i / A_{i-1}} \otimes \underbrace{B_j / B_{j-1}} \qquad \Downarrow \quad A \simeq C^N.$$

$$\longleftarrow \quad A_i \otimes B_j \qquad \square$$

(2) $Q_x \otimes_{W_x} Wh(E) \xrightarrow{\gamma} E \qquad y \otimes v \to yv.$

γ - изоморфизм?

Rem. $Wh(E) = 0 \Longrightarrow E = 0$, при $E \in Wmod^x$.

$$0 \to \underset{\ker \gamma}{\overset{\|}{E'}} \hookrightarrow Q_x \otimes_{W_x} Wh(E) \xrightarrow{\gamma} E \twoheadrightarrow \underset{\operatorname{coker} \gamma}{\overset{\|}{E''}} \to 0$$

(i) $E' = 0$.

$$Wh(E') = E' \cap Wh(Q_x \otimes_{W_x} Wh(E)) = E' \cap \underset{1 \otimes WhE}{\underset{\|}{WhE}} = 0$$

(ii) $E'' = 0$:

$$0 \to Q_x \otimes_{W_x} Wh(E) \xrightarrow{\gamma} E \to E'' \to 0$$

$$C^n(m, E) = \Lambda^n m^* \otimes E$$
$$\downarrow$$
$$C^n(m, E'') = \Lambda^n m^* \otimes E''$$

$$0 \to H^0(m, Q_x \otimes_{W_x} Wh(E)) \xrightarrow{\gamma^*} H^0(m, E) \to H^0(m, E'') \to$$
$$\to \underset{0}{\underset{\|}{H^1(m, Q_x \otimes_{W_x} Wh(E))}}$$

$$0 \to \underset{Wh(E)}{\underset{\|}{Wh(Q_x \otimes_{W_x} Wh(E))}} \xrightarrow{\gamma^*} Wh(E) \to Wh(E'') \to 0$$

γ^* - изоморфизм $\Longrightarrow Wh(E'') = 0 \Longrightarrow E'' = 0$

$\square$

Функтор Гамильтоновой редукции;

$U(\mathfrak{g})$ - - - - -> произвольная алгебра A.

$\uparrow$

$\mathfrak{m}$ - - - - -> алгебра Ли $\mathfrak{a}$, $\rho: \mathfrak{a} \to A$

$$Q = A / A\rho(\mathfrak{a})$$

$$\mathcal{U} = (\mathrm{End}_A (A / A\rho(\mathfrak{a})))^{op} = Q^{\mathfrak{a}}$$

$(A, \mathfrak{a})$ - mod - категория к/п A-модулей, которые вполне приводимы как $\mathfrak{a}$-модули.

$M^{\mathfrak{a}}$ - инварианты, $M_{\mathfrak{a}} = M / \mathfrak{a}M$, - $A^{\mathfrak{a}}$-модули

<u>Prop.</u> $M \in (A, \mathfrak{a})$-mod, $M_{\mathfrak{a}} = M^{\mathfrak{a}}$

$\square$ Если M - неприводим над $\mathfrak{a}$, то очевидно. $\square$

<u>Rem.</u> $\mathrm{Hom}_A(Q, M) = M^{\mathfrak{a}}$

<u>Def.</u> Функтор Гамильтоновой редукции:

$$\mathbb{H}: (A, \mathfrak{a})\text{-mod} \to \mathcal{U}\text{-mod}$$

$$M \longmapsto M^{\mathfrak{a}} = \mathrm{Hom}(Q, M)$$

<u>Th.</u> A - вполне приводимо над $\mathfrak{a}$. 1) $\mathbb{H}$ - точен.

2) у $\mathbb{H}$ есть $\underbrace{\text{сопряженный}}_{}$ левый

$$\mathbb{H}^{\top}: E \to Q \otimes_{\mathcal{U}} E$$

3) $E \simeq \mathbb{H}(\mathbb{H}^{T} E)$

<u>Сл</u>. $\mathbb{H}$ – фактор-функтор

$$\left(A\text{-}\alpha\right)\text{-mod} \big/ \ker \mathbb{H} \xrightarrow{\sim} U\text{-mod}.$$

<u>Сл</u>. $\mathbb{H}$ переводит простые в простые.