Янгианы $\mathfrak{gl}_n$

Молев, Янгианы и классические алгебры Ли

Brundan, Kleshchev Parabolic representations of $Y(\mathfrak{gl}_n)$

Янгиан.

- RTT $\quad t_{ij}^{(r)} \quad r \geq 1 \quad t_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq n$

$$R(u-v)\, T_1(u)\, T_2(v) = T_2(v)\, T_1(u)\, R(u-v)$$

$$T(u) = \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq N \\ r \geq 0}} E_{ij} \; t_{ij}^{(r)} \, u^{-r} = \begin{pmatrix} t_{11}(u) & t_{12}(u) & t_{13}(u) \\ t_{21}(u) & t_{22}(u) & t_{23}(u) \\ t_{31}(u) & t_{32}(u) & t_{33}(u) \end{pmatrix}$$

$$R = 1 - \frac{P}{u} \qquad P = \sum E_{ij} \otimes E_{ji}$$

- $$\left[t_{ij}^{(r)}, t_{kl}^{(s)}\right] = \sum_{a=1}^{\min(r,s)} \left(t_{kj}^{(a-1)} t_{il}^{(r+s-a)} - t_{kj}^{(r+s-a)} t_{il}^{(a-1)}\right)$$

- токовая форма $\quad [t_{ij}(u), t_{kl}(v)] = \dfrac{1}{u-v}\left(t_{kj}(u) t_{il}(v) - t_{kj}(v) t_{il}(u)\right)$

- $$\Delta t_{ij}^{(r)} = \sum_{k,s} t_{ik}^{(s)} \otimes t_{kj}^{(r-s-1)}$$

$$\Delta T(u) = T(u) \otimes T(u)$$

Первая фильтрация

- $[t_{ij}^{(r)}, t_{kl}^{(s)}] = \sum_{a=1}^{\min(r,s)} \left(t_{kj}^{(a-1)} t_{il}^{(r+s-a)} - t_{kj}^{(r+s-a)} t_{il}^{(a-1)} \right)$

- $\deg' t_{ij}^{(r)} = r-1$

$$\mathrm{gr}' Y = \bigoplus Y_r' / Y_{r-1}' \simeq \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_N[t])$$

$$\bar{t}_{ij}^{(r)} \longmapsto e_{ij} t^{r-1}$$

- $\Delta \bar{t}_{ij}^{(r)} = \bar{t}_{ij}^{(r)} \otimes 1 + 1 \otimes \bar{t}_{ij}^{(r)}$

Вторая фильтрация

- $$[t_{ij}^{(r)}, t_{kl}^{(s)}] = \sum_{a=1}^{\min(r,s)} \left(t_{kj}^{(a-1)} t_{il}^{(r+s-a)} - t_{kj}^{(r+s-a)} t_{il}^{(a-1)}\right)$$

- $\deg t_{ij}^{(r)} = r \qquad \operatorname{gr} Y = \bigoplus Y_r/Y_{r-1} \simeq \mathbb{C}[t_{ij}^{(r)}]$

$$\{\cdot,\cdot\}: Y_r/Y_{r-1} \otimes Y_s/Y_{s-1} \xrightarrow{[\cdot,\cdot]} Y_{r+s-1}/Y_{r+s-2}$$

$$\{\bar t_{ij}^{(r)}, \bar t_{kl}^{(s)}\} = \Sigma_a \left(\bar t_{kj}^{(a-1)} \bar t_{il}^{(r+s-a)} - \bar t_{kj}^{(r+s-a)} \bar t_{il}^{(a-1)}\right)$$

- <u>Предл</u> $\{\bar T(u), \bar T(v)\} = [r(u-v), \bar T(u) \otimes \bar T(v)]$

$$r(u-v) = \frac{\Sigma E_{ij} \otimes E_{ji}}{u-v} = \sum_{r=0}^{\infty} E_{ij} u^{-r-1} \otimes E_{ji} v^{r}$$

<u>Замеч</u> П.Ч не имеет полюса при $u=v$ $\Rightarrow$ разложения по u/v и v/u равны $\Rightarrow$ нет членов с v в положит. степени.

- $\Delta \bar T(u) = \bar T(u) \otimes \bar T(u) \longrightarrow \mathbb{C}[[t^{-1}]]_1 \qquad G = GL_N$

$\longleftarrow$ двойств умножению в группе

Общие теоремы

- **Опр** $(\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_+, \mathfrak{q}_-)$ — тройка Манина
$\mathfrak{q}$ — алг. Ли, $\mathfrak{q}_+, \mathfrak{q}_-$ — подалг., $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_+ \oplus \mathfrak{q}_-$ как вект. пр-во
$\exists$ невыр. инв. скаляр. произв. на $\mathfrak{q}$, т.ч. $\mathfrak{q}_+, \mathfrak{q}_-$ — изотропны

- **Опр** G — группа Пуассона-Ли
G — гр. Ли, со скобкой $\{\cdot,\cdot\}$, т.ч. $m: G\times G \to G$ пуассоново
Π — пуасс. бивектор

- **Теор** $\forall$ тройке Манина соотв тройка групп Пуассона-Ли Q, Q_+, Q_-, $\mathrm{Lie}\, Q = \mathfrak{q}$, $\mathrm{Lie}\, Q_\pm = \mathfrak{q}_\pm$
Q_+, Q_- — подгр П-Л. в Q

- Скобка Пуассона по Q — скобка Склянина.
$\{L \otimes, L\} = [r, L \otimes L]$
$r = \sum x_i \otimes x^i \in \mathfrak{q}_+ \otimes \mathfrak{q}_- \subset \mathfrak{q} \otimes \mathfrak{q}$
$\Pi(x) = \lambda_x \otimes \lambda_x\, r - \rho_x \otimes \rho_x\, r$

В нашем случае

- $(\mathfrak{g}((t^{-1})), \mathfrak{g}[[t^{-1}]]t^{-1}, \mathfrak{g}[t])$ $\qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$

  $$(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint \mathrm{Tr}\, xy \, dt$$

- $\mathfrak{a}((t^{-1})), \quad \mathfrak{a}[[t^{-1}]]_1, \quad \mathfrak{a}[t]$ — тройка групп Ли

скобка r $\qquad \{L \overset{\otimes}{,} L\} = \{r, L \otimes L\}$

$$r = \sum_{r=1} E_{ij} t^{-r} \otimes E_{ji} t^{r-1}$$

ПБВ теорема

- Теор Для $\forall$ порядка на $t_{ij}^{(r)}$ любой элемент Y записан как комбинация упорядоченных произведений

- $\exists$ представления — следует из $\exists$ предст в дгY

- Алгебраическая независимость

Гомом Ольшанского $Y(\mathfrak{gl}_n) \to U(\mathfrak{gl}_{n+m})$

$$t_{ij}^{(r)} \mapsto \left(E^r\right)_{m+i,\, m+j}$$

$$E = \begin{pmatrix} e_{11} & \dots & e_{1\,n+m} \\ & & \\ e_{n+m\,1} & & e_{n+m,\,n+m} \end{pmatrix}$$

e_{ke} – обр $\mathfrak{gl}_{n+m}$

$$t_{ij}^{(r)} \mapsto \sum_{1 \le p_1, \dots, p_{r-1} \le n+m} e_{m+i\, p_1} e_{p_1 p_2} \dots e_{p_{r-1}\, m+j}$$

При данных $t_{i_1 j_1}^{(r_1)} \dots t_{i_k j_k}^{(r_k)}$ $\exists$ большое M такое, что $t_{ij}^{(r)}$ алг. независимы как функции на подход. разреженных матрицах

- $\pi : Y(\mathfrak{gl}_N) \to U(\mathfrak{gl}_N)$

$t_{ij}^{(r)} \mapsto 0 \quad r > 1 \qquad t_{ij}^{(1)} \mapsto e_{ij}$

Гомоморфизм Ольшанского: $Y(\mathfrak{gl}_N) \xrightarrow{\omega} Y(\mathfrak{gl}_N) \xrightarrow{\varphi} Y(\mathfrak{gl}_{N+M}) \xrightarrow{\pi} U(\mathfrak{gl}_{N+M})$

$t_{ij}^{(r)} \mapsto t_{i+M, j+M}^{(r)}$

$\omega : T(u) \mapsto T^{-1}(-u)$

ПБВ для усеченных янгианов

- [BK] $\pi^{\otimes d}\Delta_{(d)}: Y(\mathfrak{gl}_N) \longrightarrow \underbrace{U(\mathfrak{gl}_N)\otimes\ldots\otimes U(\mathfrak{gl}_N)}_{d}$

① $t_{ij}^{(r)}$ $r>d$ лежат в ядре.

② $\operatorname{Im} Y(\mathfrak{gl}_N) = Y_{N,d}$ – имеет ПБВ базис $t_{ij}^{(r)}$ $1\le r\le d$.

- Д-во ② применим ПБВ фильтрацию на $U(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes d}$.

$$(e_{ij})_s \mapsto (x_{ij})_s, \qquad t_{ij}^{(r)} \mapsto y_{ij}^{(r)} = \sum_{\substack{1\le s_1<\ldots<s_r\le d\\ p_1,\ldots,p_{r-1}}} (x_{ip_1})_{s_1}\cdot\ldots\cdot(x_{p_{r-1}j})_{s_r}$$

<u>Надо</u> $\{(x_{ij})\} = \mathfrak{gl}_n^{\oplus d} \longmapsto (y_{ij}^{(r)})$ доминантный

дифференциал в точке $(c_1 I, \ldots, c_d I_d)$

$$dY^{(r)} = \sum_{s=1}^{d} e_{r-1}(c_1,\ldots,\hat{c}_s,\ldots c_d)\, dX_s$$

матрица дифференциала: $(e_{r-1}(c_1 \ldots \hat{c}_s \ldots c_d))$
детерминант $\sim \prod (c_i - c_j) \neq 0$.

- <u>Следств</u> $Y_{n,d} = Y(\mathfrak{gl}_n) / \langle t_{ij}^{(r)} \mid r > d \rangle$

<u>Д-во</u> Размеры не больше и не меньше

- По другому. Выберем порядок в котором $t_{ij}^{(r)} > t_{kl}^{(s)}$ при $r > s$.

Из $[t_{ij}^{(r)}, t_{kl}^{(s)}] = \sum_{a=1}^{\min(r,s)} \left(t_{kj}^{(a-1)} t_{il}^{(r+s-a)} - t_{kj}^{(r+s-a)} t_{il}^{(a-1)}\right) \Rightarrow$
$I = Y(\mathfrak{gl}_n) \langle t_{ij}^{(r)} \mid r > d \rangle \longrightarrow$ двусторонний идеал.

- <u>Следств</u> $\mathrm{gr}\, Y_{n,d} = \mathbb{C}[t_{ij}^{(r)} \mid 1 \le r \le d,\ 1 \le i,j \le n]$

$\mathrm{gr}'\, Y_{n,d} = U(\mathfrak{gl}_n[t] / t^d)$.

Квантовые миноры

- $t^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_m}(u) = \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}\sigma \; t_{a_{\sigma(1)} b_1}(u) \cdot \ldots \cdot t_{a_{\sigma(m)} b_m}(u-m+1)$

$$= \sum_{p \in S_m} \operatorname{sgn} p \; t_{a_1 b_{p(1)}}(u-m+1) \cdot \ldots \cdot t_{a_m b_{p(m)}}(u)$$

- Для $\mathbb{C}[G_1[[t^{-1}]]]$ миноры — матричные элементы $\Lambda^m \mathbb{C}^N$

- Для Y $\mathbb{C}^N[u^{-1}] \to Y \otimes \mathbb{C}^N[u^{-1}]$ — предст. коалгебры

$\Lambda^d \mathbb{C}^n[u^{-1}] \to Y \otimes \Lambda^d \mathbb{C}^n[u^{-1}]$ — предст коалгебры.

$\Lambda^d \mathbb{C}^N \to \Lambda^d \mathbb{C}^N \otimes Y$ ⇉ $\Lambda^d \mathbb{C}^N \otimes Y \otimes Y \;\; || \;\; \Lambda^d \mathbb{C}^N \otimes Y \otimes Y$

$\Delta t^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_m} = \sum_c t^{a_1 \dots a_m}_{c_1 \dots c_m} \otimes t^{c_1 \dots c_m}_{b_1 \dots b_m}$

Гомоморфизмы

- $\omega_N : Y(\mathfrak{gl}_N)$ $\quad T(u) \mapsto T^{-1}(-u)$ — композ двух антиавтом.

<u>Теор</u> $\omega_N\left(t^{j_1 \dots j_M}_{i_1 \dots i_M}(u)\right) = q\det T(-u+N-1)^{-1}\, t^{j_{M+1} \dots j_N}_{i_{M+1} \dots i_N}(-u+N-1)\ \mathrm{sgn}\, i\ \mathrm{sgn}\, j$

$(i_1 \dots i_N)$, $(j_1, \dots j_N)$ — перестановки

<u>Rk</u> $\omega_N^2 = id$

$S : T(u) \mapsto T^{-1}(u)$ антиавтоморф

$S(t_{ij}) = q\det T(u+N-1)^{-1} (-1)^{i+j}\, t^{1 \dots \hat{j} \dots N}_{1 \dots \hat{i} \dots N}(u+N-1)$

$S^2 : T(u) \mapsto \dfrac{q\det T(u+N-1)}{q\det T(u+N)}\, T(u+N)$ $\quad$ если $q\det T = 1 \Rightarrow$ S^2 — сдвиг

- $i_M: Y(\mathfrak{gl}_N) \longrightarrow Y(\mathfrak{gl}_{N+M})$ $\qquad t_{ij}^{(r)} \longmapsto t_{ij}^{(r)}$

- $\varphi_M: Y(\mathfrak{gl}_N) \longrightarrow Y(\mathfrak{gl}_{N+M})$ $\qquad t_{ij}^{(r)} \longmapsto t_{i+M,\,j+M}^{(r)}$

$$t^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_r} \longmapsto t^{i_1+M \;\dots\; i_r+M}_{j_1+M \;\dots\; j_r+M}$$

- $\psi_M = \omega_{N+M}\circ\varphi\circ\omega_N : Y(\mathfrak{gl}_N) \longrightarrow Y(\mathfrak{gl}_{N+M})$

<u>Предл.</u> $\psi: \; t_{ij}(u) \longmapsto t^{1\dots M}_{1\dots M}(u+M)^{-1}\, t^{1\dots M\; M+i}_{1\dots M\; M+j}(u+M)$

$$\mathbb{C}^N \hookrightarrow \mathbb{C}^N \otimes \Lambda^M \mathbb{C}^M \subset \Lambda^{M+1}\mathbb{C}^{N+M}$$

<u>Д-во</u> $\psi(t_{ij}(u)) = (-1)^{i+j}\,\omega_{N+M}\circ\varphi\left(t^{1\dots N}_{1\dots N}(-u+N-1)^{-1}\, t^{1\dots\hat{i}\dots N}_{1\dots\hat{j}\dots N}(-u+N-1)\right)$

$$=(-1)^{i+j}\,\omega_{N+M}\left(t^{M+1\dots M+N}_{M+1\dots M+N}(-u+N-1)^{-1}\, t^{M+1,\dots,\widehat{M+i},\dots M+N}_{M+1\dots\widehat{M+j}\dots M+N}(-u+N-1)\right) =$$

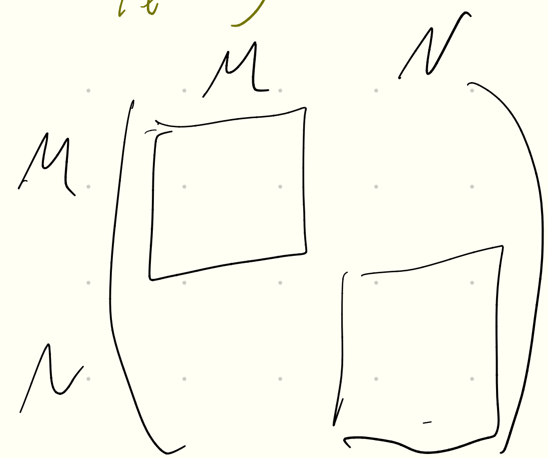
$$= t^{1\dots M}_{1\dots M}(u+M)^{-1}\, t^{1\dots M\; M+i}_{1\dots M\; M+j}(u+M) \qquad \square$$

- <u>Замеч.</u> $\psi_{N_1}\circ i_{N_3} = i_{N_3}\circ \psi_{N_1} : Y(\mathfrak{gl}_{N_2}) \longrightarrow Y(\mathfrak{gl}_{N_1+N_2+N_3})$

$$Y(\mathfrak{gl}_M)\otimes Y(\mathfrak{gl}_N)\subset Y(\mathfrak{gl}_{M+N})$$

- $$[t_{ij}^{(r)}, t_{kl}^{(s)}] = \sum_{a=1}^{\min(r,s)} \left(t_{kj}^{(a-1)}\, t_{il}^{(r+s-a)} - t_{kj}^{(r+s-a)}\, t_{il}^{(a-1)} \right)$$

t_{11} и t_{22} — <u>не</u> коммутируют



- <u>Лемма</u> $T_{ij}(u)$, $(T^{-1})_{kl}(u)$ коммут при $j\neq k$, $i\neq l$.

<u>Д-во</u>
$$R(u-v)\,T_1(u)\,T_2(v) = T_2(v)\,T_1(u)\,R(u-v)$$
$$T_2^{-1}(v)\,R(u-v)\,T_1(u) = T_1(u)\,R(u-v)\,T_2^{-1}(v)$$

$$\sum \left(1\otimes E_{kl}\,(T^{-1})_{kl}(v)\right)\left(E_{aa}\otimes E_{bb} - \frac{1}{u-v}E_{ab}\otimes E_{ba}\right)\left(E_{ij}\otimes 1\; T_{ij}(u)\right) = \text{П.Ч.}$$

$$\|$$

$$\sum E_{ij}\otimes E_{kl}\,(T^{-1})_{kl}(v)\,T_{ij}(u) = \sum E_{ij}\otimes E_{kl}\,T_{ij}(u)\,(T^{-1})_{kl}(v)$$

$\square$

- Предл $i_N(Y(\mathfrak{gl}_M))$ комм с $\varphi_M(Y(\mathfrak{gl}_N))$ в $Y(\mathfrak{gl})_{N+M}$

Д-во $\operatorname{Im}\psi = \operatorname{Im} \omega_{M+N}\circ\varphi$.

$\omega_{M+N}(\varphi(t_{ij}(u))) = \omega_{M+N}(t_{i+M,\,j+M}(u)) = (T^{-1})_{i+M,\,j+M}(-u)$

коммутирует по лемме $t_{kl}(u)$ $1\le k,l\le M$ $\square$

- Замеч $Y(\mathfrak{gl}_{N_1+N_2+N_3}) \supset Y(\mathfrak{gl}_{N_1})\times Y(\mathfrak{gl}_{N_2})\times Y(\mathfrak{gl}_{N_3})$

$\underbrace{i_{N_2+N_3}(Y(\mathfrak{gl}_{N_1})), \; i_{N_3}(\psi_{N_1}(Y(\mathfrak{gl}_{N_2}))), \; \psi_{N_1+N_2}(\mathfrak{gl}_{N_3})}_{\text{коммутируют}}$

- Замеч $\psi_{N_1}\circ\psi_{N_2} = (\omega_{N_1+N_2+N_3}\varphi_{N_1}\omega_{N_2+N_3})(\omega_{N_2+N_3}\varphi_{N_2}\omega_{N_3})$

$= \omega_{N_1+N_2+N_3}\varphi_{N_1}\varphi_{N_2}\omega_{N_3} = \omega_{N_1+N_2+N_3}\varphi_{N_1+N_2}\omega_{N_3} = \psi_{N_1+N_2}$

Разложение Гаусса 1

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$$

- <u>Теор</u> $\exists!\ T(u) = F(u)\,H(u)\,E(u)$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & e_{12} & e_{13} \\ 0 & 1 & e_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 \\ f_{31} & f_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

- Начало д-ва

$$t_{11} = h_1$$

$$t_{12} = h_1 e_{12} \qquad e_{12} = t_{11}^{-1} t_{12}.$$

$$f_{21} = t_{21} t_{11}^{-1}$$

$$t_{22} = f_{21} h_1 e_{12} + h_2. \qquad h_2 = t_{22} - t_{21} t_{11}^{-1} t_{12}.$$

$$t_{13} \qquad e_{13} = t_{11}^{-1} t_{13}$$

$$t_{23} = f_{21} h_1 e_{13} + h_2 e_{23} \qquad e_{23} = h_2^{-1}(t_{23} - t_{21} t_{11}^{-1} t_{13}).$$

$\square$

Квазидетерминанты

- **Опр** Квазидетерминант

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & \boxed{D} \end{vmatrix} = D - CA^{-1}B \quad \left(\approx \frac{\det \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}}{\det A} \right)$$

- $$h_i = \begin{vmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1\,i-1} & t_{1i} \\ & & & \\ t_{i-1\,1} & & & t_{i-1\,i} \\ t_{i1} & & t_{i\,i-1} & \boxed{t_{ii}} \end{vmatrix}$$

$i < j$

$$e_{ij} = h_i^{-1} \begin{vmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1\,i-1} & t_{1j} \\ & & & \\ t_{i-1\,1} & & & t_{i-1\,j} \\ t_{i1} & & t_{i\,i-1} & \boxed{t_{ij}} \end{vmatrix} \qquad f_{ji} = \begin{vmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1\,i-1} & t_{1i} \\ & & & \\ t_{i-1\,1} & & & t_{i-1\,i} \\ t_{j1} & & t_{j\,i-1} & \boxed{t_{ji}} \end{vmatrix} h_i^{-1}$$

Д-во формулы через квазидетерминанты

- Индукция по j

$$T=\begin{pmatrix} T^{(j-1)} & t^{(j)} \\ t_{(j)} & t_{jj}\end{pmatrix},\quad E^{(j)}=\begin{pmatrix} E^{(j-1)} & e^{(j)} \\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad H^{(j)}=\begin{pmatrix} H^{(j-1)} & 0 \\ 0 & h_j\end{pmatrix},\quad F^{(j)}=\begin{pmatrix} F^{(j-1)} & 0 \\ f_j & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} F^{(j-1)}H^{(j-1)}E^{(j-1)}=T^{(j-1)} \\ f_j H^{(j-1)}E^{(j-1)}=t_{(j)} \\ F^{(j-1)}H^{(j-1)}e^{(j)}=t^{(j)} \\ h_j+f_{(j)}H^{(j-1)}e^{(j)}=t_{jj}\end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} h_j=t_{jj}-t_{(j)}\left(T^{(j-1)}\right)^{-1}t^{(j)} \\ h_j=\begin{vmatrix} T^{(j-1)} & t^{(j)} \\ t_{(j)} & \boxed{t_{jj}}\end{vmatrix}\end{array}$$

- $H^{(j-1)}e^{(j)}=\left(F^{(j-1)}\right)^{-1}t^{(j)}$ для e_{ij} только блок $i\times i$ важен $\Longrightarrow$

$$h_i e_{ij}=t_{ij}+\sum_{a<i}(F^{-1})_{ia}t_{aj}=t_{ij}-\sum_{a,b=1}^{i-1}t_{ib}\left(\left(T^{(i-1)}\right)^{-1}\right)_{ba}t_{bj}=\begin{vmatrix} t_{11} & & t_{1j} \\ & & \\ t_{i1}\ldots & & \boxed{t_{ij}}\end{vmatrix}$$

т.к.

$$F^{-1}T=HE \Rightarrow \left((F^{-1})_{i1}\ \ldots\ (F^{-1})_{i\,i-1},\ 1\right)\begin{pmatrix} T^{(i-1)} \\ t_{i1}\ \ldots\ t_{i\,i-1}\end{pmatrix}=(0\ \ldots\ 0)$$

Квазидетерминанты и Ψ

Лемма

$$\Psi_M : t_{ij}(w) \longmapsto \begin{vmatrix} t_{11}(w) & t_{1M}(w) & t_{1,M+j}(w) \\ t_{M1}(w) & t_{MM}(w) & t_{M,M+j}(w) \\ t_{M+i,1}(w) & t_{M+i,M}(w) & \boxed{t_{M+i,M+j}(w)} \end{vmatrix}$$

Д-во Пусть

$$\begin{array}{c} M \\ N \end{array} \begin{pmatrix} A'(w) & B'(w) \\ \underbrace{C'(w)}_{M} & \underbrace{D'(w)}_{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(w) & B(w) \\ C(w) & D(w) \end{pmatrix}^{-1}$$

Тогда $\Psi_M(T^{-1}(-w)) = \Psi_M(\omega_N(T(w))) = D'(-w)$

Т.к. $D' = (D - CA^{-1}B)^{-1}$, то

$$\Psi_M(T(w)) = D'(w)^{-1} = D(w) - C(w)A^{-1}(w)B(w)$$

∎

Разложение Гаусса 2

- <u>Теор</u> $\quad T(u) = F(u)\, H(u)\, E(u)$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & e_{12} & e_{13} \\ 0 & 1 & e_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 \\ f_{31} & f_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

- $e_{ij}(u) = \psi_{i-1}\left(t_{11}(u)^{-1} t_{1,\, j-i+1}(u)\right) \qquad \psi_{i-1} : Y_{n-i+1} \to Y_n$

$$f_{ji}(u) = \psi_{i-1}\left(t_{j-i+1,1}(u)\, t_{11}(u)^{-1}\right)$$

$$h_i(u) = \psi_{i-1}\left(t_{11}(u)\right)$$

- Напомним:

$$\psi_m : t_{ij} \mapsto \begin{vmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1m} & t_{1\,m+j} \\ \vdots & & & \vdots \\ t_{m1} & \cdots & & t_{m\,m+j} \\ t_{m+i\,1} & \cdots & t_{m+i\,m} & \boxed{t_{m+i\,m+j}} \end{vmatrix}, \quad h_i = \begin{vmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1i} \\ \vdots & & \\ t_{i1} & \cdots & \boxed{t_{ii}} \end{vmatrix}, \quad e_{ij} = h_i^{-1} \begin{vmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1\,i-1} & t_{1j} \\ \vdots & & \vdots & \\ t_{i-1\,1} & \cdots & t_{i-1\,i-1} & t_{i-1\,j} \\ t_{i\,1} & \cdots & t_{i\,i-1} & \boxed{t_{ij}} \end{vmatrix}$$

Разложение Гаусса 3

- <u>Теор</u> $T(u) = F(u)\, H(u)\, E(u)$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & e_{12} & e_{13} \\ 0 & 1 & e_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 \\ f_{31} & f_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

- $$h_i(u) = t^{1\ldots i}_{1\ldots i}(u+i-1)\; t^{1\ldots i-1}_{1\ldots i-1}(u+i-1)^{-1}$$

$$f_{ji}(u) = t^{1\ldots i-1\, j}_{1\ldots i}(u+i-1)\left(t^{1\ldots i}_{1\ldots i}(u+i-1)\right)^{-1}$$

$$e_{ij} = t^{1\ldots i}_{1\ldots i}(u+i-1)^{-1}\; t^{1\ldots i}_{1\ldots i-1\, j}(u+i-1)$$

$i<j$

- Сравните с

$$h_i = \begin{vmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1i} \\ \vdots & & \\ t_{i1} & \cdots & \boxed{t_{ii}} \end{vmatrix}, \qquad e_{ij} = h_i^{-1} \begin{vmatrix} t_{11} & & t_{1\, i-1} & t_{1j} \\ \vdots & & \vdots & \\ t_{i-1\, 1} & & t_{i-1\, i-1} & t_{i-1\, j} \\ t_{i1} & & t_{i\, i-1} & \boxed{t_{ij}} \end{vmatrix}$$

Пример $\mathfrak{sl}_2$

- $$h_2(u) = \begin{vmatrix} t_{11}(u) & t_{12}(u) \\ t_{21}(u) & \boxed{t_{22}(u)} \end{vmatrix} = t_{22}(u) - t_{21}(u)\, t_{11}^{-1}(u)\, t_{12}(u)$$

- $$h_2(u) = t_{11}^{-1}(u)\, t^{12}_{12}(u)$$
$$= t_{11}^{-1}(u) \left(t_{22}(u-1)\, t_{11}(u) - t_{21}(u-1)\, t_{12}(u) \right)$$

Сравнить формулы непросто

Реализация Дринфельда

Теорема $T = FHE$

$e_i(u) = e_{i,i+1}(u)$, $f_i(u) = f_{i+1,i}(u)$, $h_i(u)$ —

порожд $Y(\mathfrak{gl}_N)$ с соотношениями

① h, h $\quad [h_i(u), h_j(v)] = 0$

② h, e $\quad [h_i(u), e_j(v)] = (\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1}) \frac{1}{u-v} h_i(u)(e_i(u) - e_i(v))$

③ e, e $\quad$ ⓐ $(u-v)[e_i(u), e_i(v)] = (e_i(v) - e_i(u))^2$ ⓑ $[e_i(u), e_{i+1}(v)] + \ldots$

ⓑ $[e_i(u), e_j(v)] = 0 \quad |i-j| > 1$ ⓖ Serre

④ $h\ f$

⑤ $f\ f$

⑥ e, f $\quad [e_i(u), f_j(v)] = \frac{1}{u-v}(h_i^{-1}(u) h_{i+1}(u) - h_i^{-1}(v) h_{i+1}(v))$

Доказательство

- Соотношения

$$h_i(u) = \psi_{i-1}(t_{11}(u)) \in \mathrm{Im}\, i_{N-i} \circ \psi_{i-1}(Y(\mathfrak{gl}_1)) \subset Y(\mathfrak{gl}_N)$$

$$e_i(u) = \psi_{i-1}(t_{11}(u)^{-1} t_{12}(u)) \in \mathrm{Im}\, i_{N-i-1} \circ \psi_{i-1}(Y(\mathfrak{gl}_2)) \subset Y(\mathfrak{gl}_N)$$

$$f_i(u) = \psi_{i-1}(t_{21}(u)\, t_{11}(u)^{-1}) \in \mathrm{Im}\, i_{N-i-1} \circ \psi_{i-1}(Y(\mathfrak{gl}_2)) \subset Y(\mathfrak{gl}_N)$$

① При $j \neq i$ h_i, h_j лежат в коммут. $Y(\mathfrak{gl}_1) \subset Y(\mathfrak{gl}_N)$

$$[t_{11}(u), t_{11}(v)] = 0 \implies [h_i(u), h_j(v)] = 0$$

② При $j \neq i, i-1$ h_i, e_j лежат в комм. $Y(\mathfrak{gl}_1), Y(\mathfrak{gl}_2) \subset Y(\mathfrak{gl}_N)$

$$[h_i(u), e_i(v)] = \psi_{i-1}([t_{11}(u), t_{11}^{-1}(v) t_{12}(v)]) =$$

$$= \psi_{i-1}\left(t_{11}^{-1}(v) \frac{1}{u-v}\left(t_{11}(u) t_{12}(v) - t_{11}(v) t_{12}(u)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{u-v} \psi_{i-1}\left(t_{11}(u)\left(t_{11}^{-1}(u) t_{12}(v) - t_{11}^{-1}(u) t_{12}(u)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{u-v} h_i(u)\left(e_i(v) - e_i(u)\right)$$

$$[h_{i+1}(u), e_i(v)] = \psi_{i-1}\left(\left[t_{11}(u+1)^{-1} t_{12}^{12}(u+1),\ t_{11}^{-1}(v)\, t_{12}(v)\right]\right)$$

$$= \psi_{i-1}\left(\frac{1}{v-u-1}\left(t_{11}^{-1}(v)\, t_{12}(v) - t_{11}^{-1}(u+1)\, t_{12}(u+1)\right) t_{11}^{-1}(u+1)\, t_{12}^{12}(u+1)\right)$$

$$= \frac{1}{v-u-1}\left(e_i(v) - e_i(u+1)\right) h_{i+1}(u)$$

Равносильно $(u-v)[h_{i+1}(u), e_i(v)] = -h_{i+1}(u) e_i(v) + e_i(u+1)\, h_{i+1}(u)$

Подставляя $u=v$ $\quad h_{i+1}(u)\, e_i(u) = e_i(u+1)\, h_{i+1}(u)$

$$[h_{i+1}(u), e_i(v)] = -\frac{1}{u-v} h_{i+1}(u)\left(e_i(v) - e_i(u)\right)$$

3 при $|i-j|>2$ $\quad e_i(u), e_j(u)$ лежат в копии $Y(\mathfrak{gl}_2) \subset Y(\mathfrak{gl}_n)$

$$[e_i(u), e_i(v)] = \psi_{i-1}\left(t_{11}^{-1}(u)\, t_{12}(u),\ t_{11}^{-1}(v)\, t_{12}(v)\right)$$

$$= \psi_{i-1}\Big(\frac{1}{v-u}\left(t_{11}^{-1}(v)\, t_{12}(v) - t_{11}^{-1}(u)\, t_{12}(u)\right) t_{11}^{-1}(u)\, t_{12}(u)$$

$$+ \frac{1}{v-u}\left(t_{11}^{-1}(u)\, t_{12}(u) - t_{11}^{-1}(v)\, t_{12}(v)\right) t_{11}^{-1}(v)\, t_{12}(v)\Big)$$

$$= \frac{1}{u-v}\left(e_i(u) - e_i(v)\right)^2$$

при $|i-j|=1$ все сводится к $\mathfrak{sl}_3$

(4,5) Соотн h, f и $f f$ аналогично
или используя автоморф. транспонирования

(6) При $|i-j|\geq 2$ $e_i(w)$, $f_j(v)$ лежат в комм. $Y(\mathfrak{sl}_2) \subset Y(\mathfrak{sl}_N)$
При $|i-j|=1$ $e_i(w)$ и $f_j(v)$ комм.
$[e_i(w), f_i(w)]$ — сводится к $\mathfrak{sl}_2$

- $Y(\mathfrak{sl}_N)$ пороржден $e_1 \dots e_{N-1}$ $h_1 \dots h_N$ $f_1 \dots f_{N-1}$

для д-ва достаточно выразить все e_{ij}, f_{ji}

$$e_{i,j+1}(w) = [e_{i,j}(w), e_j^{(1)}]$$

- этих соотн. достаточно

рассм. фильтр $\deg' e_i^{(r)} = \deg' h_i^{(r)} = \deg f_i^{(r)} = r-1$,

показывается, что gr' от соотн $\longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{sl}_N[t])$

- Следств (д-ва) $e_{ij}^{(r)}$, $h_i^{(r)}$, $f_{ij}^{(r)}$ — дают ПБВ базис.