Лекция 12

Некоторые решения задач из лекции 9.

Задача 3. а) Напишите матрицу обратную для матрицы g заданной формулой

$$g = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha(\vec{n}, \vec{\sigma}). \tag{1}$$

Как изменились параметры $\vec{n}$ и α?
б) Напишите формулу (матрицу для 3×3) присоединенного действия матрицы $g = \exp(i\alpha\sigma_3)$, проверьте, что получилось ортогональное преобразование
(в алгебре Ли $\mathfrak{su}(2)$ *удобно взять базис* $\mathrm{i}\sigma_1, \mathrm{i}\sigma_2, \mathrm{i}\sigma_3$*).*
в) Покажите, что общему g заданному формулой (1) в присоединенном представлении будет соответствовать ортогональное преобразование.
г) Является ли полученный гомоморфизм из группы $SU(2)$ в группу $SO(3)$ сюръективным, какое у него ядро?

Решение. б) Напомним вид σ матриц

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$g = \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}, \qquad g(\mathrm{i}\sigma_3)g^{-1} = \mathrm{i}\sigma_3$$

$$g(\mathrm{i}\sigma_1)g^{-1} = g\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & ie^{2\mathrm{i}\alpha} \\ \mathrm{i}e^{-2\mathrm{i}\alpha} & 0 \end{pmatrix} = \cos(2\alpha)\mathrm{i}\sigma_1 - \sin(2\alpha)\mathrm{i}\sigma_2$$

$$g(\mathrm{i}\sigma_2)g^{-1} = g\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & e^{2\mathrm{i}\alpha} \\ -e^{-2\mathrm{i}\alpha} & 0 \end{pmatrix} = \sin(2\alpha)\mathrm{i}\sigma_1 + \cos(2\alpha)\mathrm{i}\sigma_2.$$

Т.е. действие $\exp(\mathrm{i}\alpha\sigma_3)$ является поворотом на угол 2α относительно оси натянутой на $i\sigma_3$.

в) Прямым вычислением можно показать, что сопряжение элементом g вида (1) дает поворот вокруг оси $\vec{n}$ на угол 2α. Из этого следует, что получилось ортогональное преобразование.

Приведем другой способ доказать ортогональность, который не требует вычислений. А именно, нам надо доказать что присоединенное представление группы $SU(2)$ сохраняет некоторое положительно определенное скалярное произведение. Определим скалярное произведение на пространстве алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$ по формуле $(A, B) = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(AB)$. Тогда, легко видеть что в базисе из матриц $\mathrm{i}\sigma_1, \mathrm{i}\sigma_2, \mathrm{i}\sigma_3$ эти скалярные произведения имеют вид $(\mathrm{i}\sigma_a, \mathrm{i}\sigma_b) = \delta_{ab}$, то есть получилось положительно определенное скалярное произведение. Теперь проверим, что оно является инвариантным

$$(gAg^{-1}, gBg^{-1}) = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(gAg^{-1}gBg^{-1}) = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(gABg^{-1}) = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(AB) = (A, B)$$

Значит присоединенное действие $SU(2)$ сохраняет положительно определенное скалярное произведение, т.е. образ лежит в $SO(3)$.

Еще один (близкий) способ, это построить на алгебре Ли $\mathfrak{su}(2)$ не скалярное произведение, а квадратичную форму $A \mapsto \det A$. Далее можно показать, что присоединенное представление сохраняет эту форму, и условие, того что группа сохраняет квадратичную форму эквивалентно тому, что группа сохраняет скалярное произведение.

г) Сюрьективность следует из того, что сопряжение элементом g вида (1) дает поворот вокруг оси $\vec{n}$ на угол 2α и все элементы группы $SO(3)$ имеют такой вид.

Можно показать сюръективность не проводят вычисления для общего g, а воспользоваться тем, что действие элементов $\exp(i\alpha\sigma_a)$ будут поворотами относительно соответствующих осей и такие повороты порождают группу $SO(3)$.

Ядро — это элементы $g \in SU(2)$ такие, что $g\sigma_a g^{-1} = \sigma_a$ для любого $a = 1, 2, 3$. Легко видеть, что этим условиям удовлетворяю только скалярные матрицы, таких в $SU(2)$ две: E и $-E$. Они образуют подгруппу из двух элементов изоморфную C_2. ■

Замечание. Из этой задачи и теоремы о гомоморфизме следует, что $SO(3) \simeq SU(2)/C_2$. У групп $SO(3)$ и $SU(2)$ изоморфные алгебры Ли, но как группы они различны, отличаются на фактор по дискретной подгруппе. Мы уже знаем, что $SU(2)$ можно отождествить с трехмерной сферой, тогда $SO(3)$ отождествится с трехмерным проективным пространством.

Решение одного пункта одной задачи из 8

Задача 4. в)* Докажите, что алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ не изоморфна $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$.

Доказательство. Алгебр Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ состоит из матриц 2×2 с нулевым следом. Естественным базисом в ней являются матрицы

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Коммутаторы в этом базисе равны

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h. \tag{3}$$

Но в алгебре Ли $\mathbb{R}^3$ (изоморфной $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$) не может быть чтобы вектороное произведение двух ненулевых векторов было пропорционально третьему. А для $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ так получается. Значит, они не изоморфны. ■

Некоторые решения задач из лекции 9.

Задача 4. а) Рассмотрим алгебру $\mathfrak{so}(n)$. Она имеет естественный базис $J_{ik} = E_{ik} - E_{ki}$, где E_{ik} это матрица у которых 1 стоит на месте (i, k), а в остальных местах стоит 0. Разложите коммутатор $[J_{ab}, J_{cd}]$ по этому базису.
б)* Докажите, что алгебра Ли $\mathfrak{so}(4)$ изоморфна прямой сумме $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$.

Указание: выразите через J_{ab} другие образующие J_1, J_2, J_3 и J'_1, J'_2, J'_3 так, что каждая тройка удовлетворяет соотношениям $\mathfrak{so}(3)$, а $[J, J'] = 0$.

Решение. а) Сначала напишем коммутатор матричных единиц

$$[E_{ab}, E_{cd}] = \delta_{bc} E_{ad} - \delta_{ad} E_{cb}.$$

Отсюда следует, что

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \delta_{bc} J_{ad} + \delta_{ad} J_{bc} + \delta_{ac} J_{db} + \delta_{bd} J_{ca}. \tag{4}$$

Заметим, что при перестановке a и b левая часть меняет знак (так как $J_{ab} = -J_{ba}$). Можно проверить, что этим свойством обладает и правая часть. Эта симметрия, вместе с аналогичным свойством при перестановке c, d, фиксирует знаки слагаемых в правой части.

б) Введем элементы

$$J_1 = \frac{1}{2}(J_{12} + J_{34}), \quad J_2 = \frac{1}{2}(J_{14} + J_{23}) \quad J_3 = \frac{1}{2}(J_{13} + J_{42}),$$
$$J'_1 = \frac{1}{2}(J_{12} - J_{34}), \quad J'_2 = \frac{1}{2}(-J_{14} + J_{23}) \quad J'_3 = \frac{1}{2}(J_{13} - J_{42}).$$

Тогда легко видеть, что $[J_a, J_b] = \epsilon_{abc} J_c$, $[J'_a, J'_b] = \epsilon_{abc} J'_c$ и $[J_a, J'_b] = 0$. ■

Представления более общих групп Ли

До сих пор мы говорили только о представлениях трех групп Ли $SO(2)$, $SU(2)$ и $SO(3)$. Сегодня мы будем говорить про другие группы Ли и соответствующие им алгебры Ли.

Во первых, вспомним, что мы знаем еще одну трехмерную группу Ли: $SL(2, \mathbb{R})$. Но если ограничиться комплексными представлениями и не обсуждать вопросы унитарности, то ее теория представлений не даст нам ничего нового, так как рассматривая комбинации с комплексными коэффициентами можно получить из элементов $\mathfrak{su}(2)$ элементы $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ и наоборот. На самом деле, мы уже брали такие комбинации когда строили конечномерные представления $\mathfrak{su}(2)$. Мы там брали элементы $J_+, J_-, \mathrm{i}J_3$, их коммутационные соотношения имеют вид

$$[\mathrm{i}J_3, J_+] = J_+, \quad [\mathrm{i}J_3, J_-] = -J_-, \quad [J_+, J_-] = -2\mathrm{i}J_3.$$

Тогда после замены $2\mathrm{i}J_3 \leftrightarrow h$, $\mathrm{i}J_+ \leftrightarrow f$, $\mathrm{i}J_- \leftrightarrow e$, мы получим коммутационные соотношения (3).

Комплексификацией вещественной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется алгебра Ли с такими же структурными константами, но уже рассматриваемая как векторное пространство над комплексными числами. Предыдущие рассуждения показывали, что комплексификации алгебр Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ и $\mathfrak{su}(2)$ изоморфны.

Формулой комплексификацию алгебры Ли можно написать как $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Основные примеры это

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}), \tag{5}$$

$$\mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{so}(n, \mathbb{C}), \tag{6}$$

$$\mathfrak{su}(n, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}). \tag{7}$$

Нетривиальным тут является последний пример, он следует из того, что любая матрица X представима в виде $\frac{1}{2}(X-X^*)+\frac{1}{2}(X+X^*)$, где первое слагаемое является антиэрмитовым $\frac{1}{2}(X - X^*) \in \mathfrak{su}(n)$, а второй эрмитовы $\frac{1}{2}(X + X^*) \in \mathrm{i}\,\mathfrak{su}(n)$.

Другой пример, где важны подобные рассуждения — это ортогональные группы и алгебры Ли. Напомним, что они определяются по скалярному произведению, если оно имеет сигнатуру (n, m), то соответствующие группа и алгебра Ли обозначаются $O(n, m)$ и $\mathfrak{so}(n, m)$ соответственно. Так как с комплексными коэффициентами все сигнатуры эквивалентны, то и комплексификации этих алгебр изоморфны:

$$\mathfrak{so}(n, m) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{so}(n + m, \mathbb{C})$$

Рассмотрим случай четырехмерного пространства. Ясно, что изменение знака у скалярного произведения меняет сигнатуру, но не меняет ни группу Ли ни алгебру Ли, поэтому $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{so}(4, 0) \simeq \mathfrak{so}(0, 4)$ и $\mathfrak{so}(3, 1) \simeq \mathfrak{so}(1, 3)$. Таким образом, есть три ортогональных алгебры Ли $\mathfrak{so}(4), \mathfrak{so}(3, 1), \mathfrak{so}(2, 2)$. У каждой из них есть другое описание

$$\mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \tag{8}$$

$$\mathfrak{so}(3, 1) \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \tag{9}$$

$$\mathfrak{so}(2, 2) \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \tag{10}$$

Формулу (8) мы показали выше, в решении задачи из лекции 9. Формула (10) тоже ожидаема, так как мы знаем, что комплексификации $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ и $\mathfrak{su}(2)$ совпадают.

Прокомментируем формулу (9). Стоящая в правой части алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ рассматривается как вещественная алгебра Ли. Как у вещественной алгебры Ли у нее есть базис $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \mathrm{i}\sigma_1, \mathrm{i}\sigma_2, \mathrm{i}\sigma_3$. Можно брать и другой базис, например $e, f, h, \mathrm{i}e, \mathrm{i}f, \mathrm{i}h$. Изоморфизм (9) говорит, что можно так выбрать базис в алгебре $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, что получатся структурные константы такие же как у алгебры $\mathfrak{so}(3, 1)$, доказательство этого вынесено в задачи ниже.

Группа $O(3, 1)$ называется группой Лоренца и имеет исключительное значение в физике.

Изоморфизмы (8),(9),(10) полезны для изучения представлений. Напомним, что представления прямого произведения групп строятся при помощи внешнего тензорного произведения $\boxtimes$. Аналогично строятся представления прямой суммы двух алгебр Ли. Например представления алгебры $\mathfrak{so}(4)$ строятся как тензорные произведения представлений алгебр $\mathfrak{su}(2)$, неприводимые представления имеют вид $\pi_j \boxtimes \pi_{j'}$.

В частности, есть два двумерных представления $\pi_{1/2} \boxtimes \pi_0$ и $\pi_0 \boxtimes \pi_{1/2}$. Так как комплексификации у алгебр $\mathfrak{so}(3,1)$ и $\mathfrak{so}(2,2)$ такие же, то у этих алгебр также есть по два двумерных представления. Конечно, вопрос интегрируются ли эти представления до представлений группы, например группы Лоренца $O(3,1)$ требует дополнительного изучения.

Упомянем общий результат о классификации групп Ли. Мы ограничиваемся *компактными* группа Ли, т.е. такими, что множество их элементов является замкнутым и ограниченным подмножеством в $\mathbb{R}^{N^2}$ (множестве матриц $N \times N$). Группы $SU(N)$ и $SO(N)$ являются компактными, тогда как группы $SL(N, \mathbb{R})$ и $SO(N, M)$ при $N, M > 0$ не являются компактными.

Группа Ли называется *простой* если она не имеет связных нормальных подгрупп. Условие простоты полезно для классификации, чтобы сразу избавится от случаев вроде прямого и полупрямого произведения.

Теорема 1 (Классификация Картана-Киллинга). Пусть G связная компактная простая группа Ли. Тогда с точностью до факторизации по конечной подгруппе G изоморфна одной из следующих групп $U(1)$, $SU(n)$, $SO(n)$, $Sp(n)$, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2.

Здесь $Sp(n)$ — это компактная симплектическая группа, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 — это, так называемые, исключительные группы.

Неприводимые представления компактных групп все описаны. Чтобы не обращать внимания на факторизацию по конечной подгруппе мы будем далее говорить про представления соответствующих алгебр Ли и ограничимся случаем уже известных нам алгебр $\mathfrak{su}(N)$ и $\mathfrak{so}(n)$.

Обозначим через V стандартное N-мерное представление алгебры $\mathfrak{su}(N)$.

Теорема 2. Для любого конечномерного неприводимого представления W алгебры $\mathfrak{su}(N)$ найдется k такое, что $W \subset V^{\otimes k}$.

Для алгебры $\mathfrak{su}(2)$ это означает, что любое представление получается перемножением представлений вида $\pi_{1/2}$, это следует из формулы Клебша-Гордона. Также, на прошлой лекции мы показывали что все неприводимые представления $\mathfrak{su}(2)$ получаются как симметрические тензорные степени V.

Посмотрим пример группы $SU(3)$. В тензорном произведении $V \otimes V$ есть подпространства S^2V и $\Lambda^2 V$. Первое из них 6-мерно, второе 3-мерно. Найдем его характер. Базисом в $\Lambda^2 V$ являются тензоры вида

$$e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1, \quad e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_2, \quad e_3 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_3.$$

Любая матрица в $SU(3)$ сопряжена диагональной, поэтому характер достаточно находить на таких матрицах. Запараметризуем диагональные матрицы в виде

$$g = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi_1 + i\varphi_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\varphi_2} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

ясно, что это параметризация общей диагональной унитарной матрицы с определителем 1. Тогда

$$\chi_V(g) = e^{i\varphi_1} + e^{-i\varphi_1+i\varphi_2} + e^{-i\varphi_2},$$
$$\chi_{\Lambda^2 V}(g) = e^{-i\varphi_1} + e^{i\varphi_1-i\varphi_2} + e^{i\varphi_2}.$$

Видим, что характеры получились разными. Т.е. у группы $SU(3)$ есть два разных трехмерных представления, их различие связано с различием между кварком и антикварком в физике. Легко видеть, что $\chi_{\Lambda^2 V}(g) = \overline{\chi_V(g)}$, т.е. представление $\Lambda^2 V$ является двойственным к представлению V.

Шестимерное представление $S^2 V$ является неприводимым.

Рассмотрим третью тензорную степень $V \otimes V \otimes V$. Пространство кососимметрических тензоров $\Lambda^3 V$ теперь одномерно и является тривиальным представлением. Пространство симметрических тензоров $S^3 V$ является 10-мерным. Можно доказать, что оно является неприводимым представлением. Так как $V \otimes V \otimes V$ 27-мерно, то еще остается $27 - 10 - 1 = 16$-мерная часть.

На самом деле эта 16-мерная часть является суммой двух неприводимых 8-мерных. Это 8-мерное представлением мы знаем — это присоединенное представление. Его можно также найти как подредставление внутри $V \otimes \Lambda^2 V$.

Подводя итог: мы описали как строить 1-мерное, два 3-мерных, 6-мерное, 8-мерное, 10-мерное неприводимые представления группы $SU(3)$. Конечно, это только начало большого списка. Тот факт, что элементарные частицы объединяются в группы такого размера послужил указанием наличия $SU(3)$ симметрии в теории поля (в частности, в современной в Стандарной модели).

У алгебры Ли $\mathfrak{so}(n)$ тоже есть стандартное n-мерное представление V. Опять же можно брать тензорные произведения V с собой, но, в отличии от предыдущего случая, так получатся не все представления алгебры Ли $\mathfrak{so}(n)$.

Пример. Алгебра $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathfrak{su}(2)$. Тогда $V \simeq \pi_1$, в его тензорных степених встречаются только представления вида π_k, при $k \in \mathbb{Z}$. То есть не встречаются представления с полуцелым спином.

Пример. Алгебра $\mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$. Тогда можно показать (см. задачи), что $V \simeq \pi_{1/2} \boxtimes \pi_{1/2}$, в его тензорных степенях не встречаются например представления $\pi_{1/2} \boxtimes \pi_0$,$\pi_0 \boxtimes \pi_{1/2}$.

Чтобы построить недостающие представления $\mathfrak{so}(n)$ нужна новая конструкция.

Определение 1. Пусть задано векторное пространство V с базисом $e_1, \ldots, e_n$ и невырожденным скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. *Алгеброй Клиффорда* Cl построенной по V называется ассоциативная алгебра с 1, образующими $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ и соотношениями

$$\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = (e_1, e_j). \tag{12}$$

В частности, если соответствующие векторы e_i, e_j ортогональны, то γ-образующие антикоммутируют $\gamma_i \gamma_j = -\gamma_j \gamma_i$.

Замечание. Алгебра Клиффорда не зависит от выбора базиса $e_1, \dots, e_n$. Вообще, есть линейное отображение $\gamma\colon V \to \mathrm{Cl}$ которое переводит любой вектор $v = \sum a_i e_i$ в $\gamma(v) = \sum a_i \gamma_i$. Тогда

$$\gamma(v)\gamma(u) + \gamma(u)\gamma(v) = (v, u), \quad \forall u, v \in V. \tag{13}$$

Алгебра Ли $\mathfrak{so}(V)$ получается квадратичным комбинациями γ-образующих. Чтобы строить представления алгебры Клиффорда (алгебры γ-образующих) удобно взять четномерное пространство $n = 2N$ с сигнатурой (N, N). Матрицу Грамма удобно взять в блочном виде $\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$, где E единичная матрица размера $n \times n$.

Теперь построим соответствующее представление алгебры Клиффорда. Рассмотрим переменные $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ и потребуем, чтобы они актикоммутировали: $\xi_a \xi_b + \xi_b \xi_a = 0$. В частности, из соотношения следует, что $\xi_a^2 = 0$. Рассмотрим пространство S — пространство многочленов от переменных ξ_a, поскольку эти переменные антикоммутируют, можно назвать пространство S пространством супермногочленов. Естественным базисом в пространстве S являются вектора $\xi_{a_1} \xi_{a_2} \cdots \xi_{a_k}$, где $a_1 < a_2 < \dots < a_k$. Размерность пространства S равна числу подмножеств N-элементного множества, то есть 2^N. Для случая $N = 2$ базис имеет вид

$$1,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_1\xi_2.$$

Введем еще действие на S операторов дифференцирования $\xi_a^* = \frac{\partial}{\partial \xi_a}$. Более точно, если мы дифференцируем $\frac{\partial}{\partial \xi_a}$ моном в котором нет ξ_a, то мы получаем ноль, а если моном в котором есть ξ_a, то мы должны сначала поставить ξ_a на первое место, а потом его убрать. Это значит дифференцирования ξ_a^* между собой антикоммутируют, а с операторами умножения на ξ_b они антикоммутируют при $a \neq b$. Также легко видеть, что $\xi_a \xi_a^* + \xi_a^* \xi_a = 1$. Итого коммутационные соотношения тогда имеют вид:

$$\xi_a^* \xi_b^* + \xi_b^* \xi_a^* = 0, \quad \xi_a \xi_b^* + \xi_b^* \xi_a = \delta_{a,b}.$$

Таким образом операторы ξ_a, ξ_b^* удовлетворяют соотношениям алгебры Клиффорда построенной по матрице Грамма $\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$. Теперь мы из них построим представления ортогональной алгебры Ли.

Предложение 3. Операторы $\xi_a \xi_b$ при $a < b$, $\xi_a^* \xi_b^*$, при $a < b$ и $\frac{1}{2}(\xi_a^* \xi_b - \xi_b \xi_a^*)$ образуют алгебру Ли $\mathfrak{so}(N, N)$.

Доказательство этого предложения вынесено в задачу ниже. Посчитаем только размерность полученной алгебры: $\frac{N(N-1)}{2} + \frac{N(N-1)}{2} + N^2 = \frac{2N(2N-1)}{2} = \dim \mathfrak{so}(N, N)$.

Так комплексификации алгебр $\mathfrak{so}(N, N)$ и $\mathfrak{so}(2N)$ совпадают, пространство S получает структуру представления алгебры $\mathfrak{so}(2N)$. Более того, как представление алгебры $\mathfrak{so}(2N)$ пространство S разлагается в прямую сумму двух подпространств S_{even} и S_{odd} состоящих из четного и нечетного числа операторов ξ соответственно.

Оба эти подпространства S_{even} и S_{odd} имеют размерность 2^{N-1} и называются спинорными представлениями алгебры $\mathfrak{so}(2N)$.

Пример. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{so}(4)$. Упомянутые выше спинорные представления S_{even} и S_{odd} являются двумерными. С другой стороны мы знаем, что $\mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ и все ее неприводимые представления строятся как тензорные произведения представлений левой и правой $\mathfrak{su}(2)$. В действительности S_{even} и S_{odd} изоморфны представлениям $\pi_{1/2} \boxtimes \pi_0$ и $\pi_0 \boxtimes \pi_{1/2}$.

Домашнее задание

Решения надо прислать к 16 мая. Помимо письменной сдачи надо быть готовым ответить на вопросы по решениям.

Задача 1. а) Найдите характер (на матрицах вида (11)) тензорного произведения представлений $V \otimes \Lambda^2 V$.
б) Найдите характер (на матрицах вида (11)) присоединенного представления $SU(3)$
в)* Покажите, что характер $V \otimes \Lambda^2 V$ есть сумма характеров присоединенного и тривиального одномерного, укажите явно это тривиальное подпредставлением внутри $V \otimes \Lambda^2 V$.

Задача 2. а) Найдите базис в алгебре Ли $\mathfrak{so}(3,1)$, найдите структурные константы в этом базисе.
б) Докажите, что алгебры $\mathfrak{so}(3,1)$ и $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ изоморфны (здесь $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ рассматриваемая как вещественная 6-мерная алгебра Ли).
в)* Задайте два двумерных представления алгебры Ли $\mathfrak{so}(3,1)$ явно (т.е. укажите в какие матрицы переходят базисные элементы).

Задача 3. Пусть V векторное пространство с положительно определенным скалярным произведением, $e_1, \dots, e_N$ ортонормированный базис. Через $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ обозначим соответствующие образующие, которые удовлетворяют соотношениям (12) которые в данном случае имеют вид $\gamma_a\gamma_b + \gamma_b\gamma_a = \delta_{a,b}$. Проверьте, что элементы $J_{ab} = \gamma_a\gamma_b$, $a \neq b$ удовлетворяют соотношениям (4) алгебры Ли $\mathfrak{so}(N)$.

Задача 4. а) Пусть V — четырехмерное представление алгебры $\mathfrak{so}(4)$. Используя изоморфизм $\mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ посчитайте характер V. Достаточно его считать на матрицах вида $\begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}\varphi_1} & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{i}\varphi_1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}\varphi_2} & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{i}\varphi_2} \end{pmatrix}$. Свяжите это представление с $\pi_{j_1} \boxtimes \pi_{j_2}$.

б)* Найдите характеры спинорных представлений. Свяжите эти представления с $\pi_{j_1} \boxtimes \pi_{j_2}$.

Материалы курса смотрите на сайте:
[`qft.itp.ac.ru/mbersht/Group.html`]