Лекция 11

Теорема 1 (Без доказательства). Если $G \subset SO(3)$ и $|G| < \infty$, то G изоморфна одной из следующий групп: C_n, D_n, A_4, S_4, A_5.

Для поиска представлений иногда может помочь следующая теорема.

Теорема 2 (Без доказательства). Размерность неприводимого представления делит порядок группы $|G|$.

Представления групп $SO(3)$ и $SU(2)$

На прошлой лекции мы строили представления алгебры Ли $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathfrak{su}(2)$ и от них переходили к представлениям групп Ли $SU(2)$ и $SO(3)$. Сейчас мы обсудим как можно строить представления стартуя с группы.

Группа $SO(3)$ задана своим трехмерным представлением $V = \mathbb{R}^3$. Напомним, что матрицы R в нем удовлетворяю уравнениям

$$R_{ik}R_{jk} = \delta_{ij}, \quad \epsilon_{ijk}R_{ip}R_{jq}R_{kr} = \epsilon_{pqr}.$$

Из этих уравнений сверткой получается

$$\epsilon_{pqr}R_{rk} = \epsilon_{ijk}R_{ip}R_{jq}.$$

Рассмотрим тензорное произведение $V \otimes V$. Элементы в нем можно писать как тензоры $t = t_{ij}e_i \otimes e_j$. Группа $SO(3)$ действует по формуле

$$(R \otimes R)t = t'_{pq}e_p \otimes e_q, \qquad t'_{pq} = R_{pi}R_{qj}t_{ij}.$$

Мы знаем, что тензорное произведение можно разложить в прямую сумму $V \otimes V = S^2V \oplus \Lambda^2V$. Начнем с кососимметрических тензоров. Имеем $\dim \Lambda^2 V = 3$. Это можно еще объяснить сказав, что у кососимметричного тензора есть только три нетривиальные компоненты t_{12}, t_{13}, t_{23}. Обозначим базис в Λ^2V как $e'_i = \epsilon_{ijk}e_j \otimes e_k$. Тогда имеем

$$Re'_i = R \otimes R(\epsilon_{ijk}e_j \otimes e_k) = R_{qj}R_{rk}\epsilon_{ijk}e_q \otimes e_r = \epsilon_{pqr}R_{pi}e_q \otimes e_r = R_{pi}e'_p.$$

Получили, что группа $SO(3)$ действует на Λ^2V в базисе e'_i той же формулой, что и на V в базисе e_i. Значит эти представления изоморфны.

Можно это увидеть и на уровне характеров. Характеры постоянен на классах сопряженности, классы сопряженности в $SO(3)$ задаются углом поворота. Тогда, если $R(\alpha)$ какой-то поворот на этот угол, то

$$\chi_V(R(\alpha)) = 1 + 2\cos\alpha$$

$$\chi_{\Lambda^2V}(R(\alpha)) = \frac{\chi_V(R(\alpha))^2 - \chi_V(R(\alpha)^2))}{2} = 2\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - \cos(2\alpha) = 1 + 2\cos\alpha$$

$$\chi_{S^2V}(R(\alpha)) = \frac{\chi_V(R(\alpha))^2 + \chi_V(R(\alpha)^2))}{2} = 1 + 2\cos\alpha + 2\cos^2\alpha + \cos(2\alpha)$$

Мы видим, что характеры χ_V и $\chi_{\Lambda^2 V}$ равны, это является подтверждением того, что эти представления изоморфны.

Теперь посмотрим на симметрические тензоры S^2V. Это пространство шестимерно, независимые компоненты — это t_{11}, t_{12}, t_{22}, t_{13}, t_{23}, t_{33}. Его характер мы нашли выше, правда формула пока не очень внятная.

Удобно перейти от косинусов к экспонентам от мнимых аргументов. Тогда

$$\begin{aligned}\chi_V(R(\alpha)) &= e^{-\mathrm{i}\alpha} + 1 + e^{\mathrm{i}\alpha}\\ \chi_{S^2V}(R(\alpha)) &= e^{-2\mathrm{i}\alpha} + e^{-\mathrm{i}\alpha} + 2 + e^{\mathrm{i}\alpha} + +e^{2\mathrm{i}\alpha}\end{aligned}$$

На самом деле представление S^2V не является неприводимым. В нем есть тривиальное подпредставление натянутое на вектор

$$\delta = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3.$$

Можно это записать в тензорных обозначениях

$$t_{ij} = \delta_{ij}, \qquad R_{pi}R_{qj}\delta_{ij} = \delta_{pq}.$$

Вторым представлением будет ортогональное дополнение, оно соответственно будет пятимерным. Чтобы говорить о таком дополнении надо ввести эрмитово скалярное произведение, но это, в данном случае, просто, базис e_1, e_2, e_3 является ортонормированным и скалярное произведение на тензоры переносится по формуле $\langle x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle \langle x_2, y_2 \rangle$. Тогда ортогональное дополнение к δ задается уравнением

$$t_{11} + t_{22} + t_{33} = 0.$$

Если отождествить симметричные тензоры t_{ij} с симметричными матрицами, то последнее условие превратится в условие бесследовости матрицы.

Обозначим получившееся пятимерное представление как S_2. Тогда его характер находится из характера S^2V:

$$\chi_{\mathrm{S}_2}(R(\alpha)) = e^{-2\mathrm{i}\alpha} + e^{-\mathrm{i}\alpha} + 1 + e^{\mathrm{i}\alpha} + e^{2\mathrm{i}\alpha}$$

Если обозначить S_1 представление V и S_0 тривиальное представление, то имеем их характеры

$$\chi_{\mathrm{S}_1}(R(\alpha)) = e^{-\mathrm{i}\alpha} + 1 + e^{\mathrm{i}\alpha}, \qquad \chi_{\mathrm{S}_0}(R(\alpha)) = 1.$$

Из этих примеров можно предположить схему для любого целого n есть представление S_n размерности $2n+1$, с характером

$$\chi_{\mathrm{S}_n}(R(\alpha)) = e^{-\mathrm{i}n\alpha} + \ldots + e^{-\mathrm{i}\alpha} + 1 + e^{\mathrm{i}\alpha} + \ldots + e^{\mathrm{i}n\alpha}.$$

По формулам для характеров видно, что это представления π_n которые были на прошлой лекции.

Как строить следующие S_n? Надо брать большие тензорные степени. Возьмем треть степень $V \otimes V \otimes V$. Там есть подпространства S^3V и Λ^3V. Размерность Λ^3V равна 1, единственная нетривиальная компонента это t_{123}. Представление будет тривиальным

$$t_{ijk} = \epsilon_{ijk}, \quad (R \otimes R \otimes R)\epsilon_{ijk} = R_{pi}R_{qj}R_{rk}\epsilon_{ijk} = \epsilon_{pqr}.$$

Симметрические тензоры S^3V образуют 10 мерное пространство. По аналогии с прошлыми случаями надо ожидать, что S^3V является приводимым и там внутри найдется 7-мерное подпредставление S_3. Это представлением можно выделить условием бесследовости, т.е. что свертка с δ_{ij} ($SO(3)$ инвариантный тензор) равна нулю

$$\delta_{ij}t_{ijk} = 0.$$

Так как индекс k является свободным, то это 3 линейных уравнения в 10-мерном пространстве, они задают 7-мерное подпредставление. И так далее, представление S_n можно построить как пространство тензоров ранга n которые являются симметричными и бесследовыми (зануляются при свертке с δ_{ij}).

Есть другой способ явно реализовать эти представления S_n как гармонические полиномы степени n. Подробности даны в задаче ниже.

Рассмотрим теперь группу $SU(2)$. Она задана своим двумерным представлением, назовем пространство представления V.[1] Будем брать его тензорные степени, а в них симметричные тензоры. Зафиксируем ортонормированный базис e_+, e_- в пространстве V в котором матрицы $\mathrm{i}J_3$, J_+, $J_=$ имеют вид

$$\mathrm{i}J_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим пространство S^2V. Базисом в нем являются вектора

$$e_+ \otimes e_+, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- + e_- \otimes e_+), \quad e_- \otimes e_-.$$

Коэффициент во втором векторе подобран, чтобы базис был ортонормированным. Пользуясь формулой действия алгебры Ли в тензорном произведении находим формулы для действия генераторов $\mathrm{i}J_3$, J_+, $J_=$ в этом базисе

$$\mathrm{i}J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Видно, что получилось представление изоморфное π_1 построенное на прошлой лекции: структура матриц такая же.

[1] Выше мы называли V трехмерное представление $SO(3)$, но этот конфликт обозначений не должен привести к недоразумениям.

Рассмотрим пространство S^3V. Базисом в нем являются вектора

$$e_+\otimes e_+\otimes e_+,\quad \frac{1}{\sqrt{3}}(e_+\otimes e_+\otimes e_- + e_+\otimes e_-\otimes e_+ + e_-\otimes e_+\otimes e_+),$$
$$\frac{1}{\sqrt{3}}(e_+\otimes e_-\otimes e_- + e_-\otimes e_+\otimes e_- + e_-\otimes e_-\otimes e_+),\quad e_-\otimes e_-\otimes e_-.$$

Пользуясь формулой действия алгебры Ли в тензорном произведении находим формулы для действия генераторов $\mathrm{i}J_3$, J_+, $J_=$ в этом базисе

$$\mathrm{i}J_3 = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix},\quad J_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Получилось представление $\pi_{3/2}$, построенное на прошлой лекции.

Очевидно, что это вычисление работает и в общем случае, представление S^nV неприводимо и изоморфно $\pi_{n/2}$. В частности мы доказали, что все эти представления интегрируются до представления группы $SU(2)$.

Перейдем к характерам представлений и тензорным произведениям. Напомним, что в группе $SU(2)$ любая матрица сопряжена матрице $\exp(i\varphi\sigma_3)$ и характер можно писать в виде $\chi(\varphi) = \mathrm{Tr}\,\rho\left(\exp(i\varphi\sigma_3)\right)$. Характеры представлений мы нашли на прошлой лекции:

$$\chi_j(\varphi) = e^{2j\mathrm{i}\varphi} + e^{2(j-1)\mathrm{i}\varphi} + \ldots + e^{-2j\mathrm{i}\varphi} = \frac{\sin((2j+1)\varphi)}{\sin\varphi}. \tag{1}$$

Предложение 3 (Клебш, Гордан). Тензорное произведение представлений π_{j_1} и π_{j_2} разлагается в прямую сумму неприводимых:

$$\pi_{j_1}\otimes\pi_{j_2} = \bigoplus_{\substack{|j_1-j_2|\leqslant j\leqslant(j_1+j_2)\\ (j_1+j_2)-j\in\mathbb{Z}}} \pi_j. \tag{2}$$

В частности $(\pi_0\otimes\pi_j)=\pi_j$, $(\pi_{1/2}\otimes\pi_j)=\pi_{j+1/2}+\pi_{j-1/2}$ (при $j>0$), $(\pi_1\otimes\pi_j) = \pi_{j+1}+\pi_j+\pi_{j-1}$ (при $j>1/2$).

Доказательство. Удобнее всего производить вычисления с характерами. Например:

$$\chi_{1/2}(\varphi)\cdot\chi_j(\varphi) = e^{(2j+1)\mathrm{i}\varphi}+2e^{(2j-1)\mathrm{i}\varphi}+\ldots+2e^{(-2j+1)\mathrm{i}\varphi}+e^{(-2j-1)\mathrm{i}\varphi} = \chi_{j+1/2}(\varphi)+\chi_{j-1/2}(\varphi)$$

Аналогично доказывается и общая формула (2). ■

Это разложение означает, что в пространстве $\pi_j\otimes\pi_{j'}$ есть два базиса. Один это базис это тензорные произведения базисов в π_{j_1} и π_{j_2}: $v_{j_1,m_1}\otimes v_{j_2,m_2}$ (здесь $v_{j,m}$ это тоже самое, что мы обозначали $v_{\lambda,m}$ на прошлой лекции, базис $v_{j,m}$ мы будем считать ортонормированным). Другой базис $v_{j,m}$ возникает из разложение в прямую сумму неприводимых, здесь j должно принадлежать региону суммирования в правой части формулы (2). Коэффициенты разложения одного базиса по другому

$$v_{j,m} = \sum C_{j,m}^{j_1,m_1,j_2,m_2} v_{j_1,m_1} \otimes v_{j_2,m_2}$$

называются $3j$ символами Вигнера (также иногда называются коэффициентам Клебша-Гордана). Из условия что iJ_3 действует одинаково на левую и правую часть следует, что коэффициенты ненулевые только при $m = m_1 + m_2$.

Теперь запишем соотношения ортогональности для характеров. По аналогии с конечными группами и группой $SO(2)$ скалярное произведение должно выглядеть как

$$\langle \phi(g), \psi(g) \rangle = \frac{1}{\operatorname{vol} G} \int_G \phi(g) \overline{\psi(g)} dg = \frac{1}{\operatorname{vol} G} \int_{\text{conj.cl.}} \phi(h) \overline{\psi(h)} \operatorname{vol} C_h \, dh.$$

Здесь второй интеграл берется по классам сопряженности, C_h обозначет класс сопряженности элемента h. Мера интегрирования dg должна быть правильно выбрана, мы не будем это обсуждать подробно, а ограничимся случаем $G = SU(2)$.

Напомним, что общий элемент из этой группы $G = SU(2)$ имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} a_0 + \mathrm{i}a_3 & a_2 + \mathrm{i}a_1 \\ -a_2 + \mathrm{i}a_1 & a_0 - ia_3 \end{pmatrix}, \text{ где } a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1.$$

Множество таких наборов (a_0, a_1, a_2, a_3) отождествляется с точками трехмерной сферы. Тогда можно ожидать, что мера dg это просто стандартная мера на трехмерной сфере.

Класс сопряженности матрицы из $SU(2)$ зависит только от ее собственных значений, обозначим их $e^{\mathrm{i}\varphi}$ и $e^{-\mathrm{i}\varphi}$. След такой матрицы равен $2\cos\varphi$, с другой стороны в обозначения выше он равен $2a_0$. Точки класс сопряженности соответствующий данному a_0 параметризуются наборами (a_1, a_2, a_3) такими, что $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 - a_0^2 = \sin^2\varphi$. Таким образом класс сопряженности соответсвующий φ — это двумерная сфера радиуса $|\sin\varphi|$, ее объем (т.е. в данном случае площадь поверхности) пропорционален $\sin^2\varphi$.

Эту меру можно найти и более явным вычислением. Напомним, что мы интегрируем только функции постоянные на классам сопряженности, в нашем случае это означает, что функции зависят только от a_0. Преобразуем интеграл для произвольной такой функции $F(a_0)$

$$\int_{\mathbb{R}^4} F(a_0)\delta(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2-1)da_0da_1da_2da_3 \sim$$
$$\int_{\mathbb{R}^4} F(a_0)\delta(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2-1)\frac{da_0da_1da_2}{2a_3}d(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2-1) \sim$$
$$\int_{a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2=1} F(a_0)\frac{da_0da_1da_2}{\sqrt{1-a_0^2-a_1^2-a_2^2}}.$$

Здесь $\sim$ означает пропорциональность, общий множитель мы подберем потом. Теперь возьмем интеграл по a_1, a_2:

$$\int_{a_1^2+a_2^2\leq r^2} \frac{1}{\sqrt{r^2-a_1^2-a_2^2}}da_1da_2 = 2\pi r,$$

где мы использовали обозначение $r^2 = 1-a_0^2$. Тогда исходный интеграл сводится к

$$\int_{-1}^{1} F(a_0)\sqrt{1-a_0^2}\,da_0 = \int_0^{\pi} F(\varphi)\sin^2\varphi\,d\varphi \sim \int_0^{2\pi} F(\varphi)\sin^2\varphi\,d\varphi$$

То есть мы опять получили меру $\sin^2\varphi\,d\varphi$ для интегрирования по классам сопряженности. Надо еще найти общий множитель перед интегралом. Он подбирается из условия, что интеграл от единичной функции равен 1. Так как $\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi = \pi$, то этот множитель равен $1/\pi$.

Соотношения ортогональности характеров χ_j и χ_l выглядят так

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \chi_j(\varphi)\overline{\chi_l(\varphi)}\sin^2\varphi\,d\varphi = \delta_{j,l}.$$

Их легко проверить из явной формулы (1) для $\chi_j(\varphi)$.

Можно написать также соотношения полноты

$$\sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \chi_{k/2}(\alpha)\overline{\chi_{k/2}(\beta)} = \frac{\pi}{2\sin^2\alpha}\left(\delta_{2\pi}(\alpha-\beta)-\delta_{2\pi}(\alpha+\beta)\right)$$

где мы использовали формулу суммирования Пуассона. Здесь $\delta_{2\pi}(\alpha) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta(\alpha-2\pi k)$ дельта функция на пространстве 2π периодических функций, а $\delta(\alpha-\beta)-\delta(\alpha+\beta)$ это дельта функция в на пространстве 2π периодических нечетных функций.

Домашнее задание

Решения надо прислать к 10 мая. Помимо письменной сдачи надо быть готовым ответить на вопросы по решениям.

Упражнение 1. а) Разложите тензорное произведение $\pi_{1/2}\otimes\pi_{1/2}\otimes\pi_{1/2}$ на неприводимые. б) Найдите кратность вхождения тривиального представления в $\pi_{1/2}^{\otimes 101}$.

Задача 2. Обозначим через $\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]_n$ пространство однородных многочленов степени n от трех переменных x_1,x_2,x_3. Группа $SO(3)$ действует на пространстве $\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]_n$ по формуле

$$P(x_1,x_2,x_3)\to P((x_1,x_2,x_3)g)$$

Пусть $\Delta=\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2$ оператор Лапласа (здесь $\partial_i=\partial/\partial_{x_i}$). Пусть H_n пространство гармонических функций степени n, т.е. ядро оператора $\Delta\colon \mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]_n\to\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]_{n-2}$.
а) Найдите размерности и базис пространств H_0,H_1,H_2,H_3.
б) Докажите, что оператор Δ являются инвариантным относительно действия группы $SO(3)$. Выведите из этого, что пространства H_n являются инвариантными подпространствами относительно группы $SO(3)$.
в) Докажите, что отображение

$$t_{i_1\dots i_n}\to P(x)=t_{i_1\dots i_n}x_{i_1}\cdots x_{i_n}$$

осуществляет изоморфизм между пространством симметричных бесследовых тензоров в $S^n\mathbb{C}^3$ и пространством гармонических полиномов степени n.
г)* Найдите размерность пространства $\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]_n$. Докажите, что Δ является сюръективным отображением. Найдите размерность H_n.

Задача 3. Рассмотрим тензорное произведение $\pi_1\otimes\pi_{1/2}$ представлений $\mathfrak{su}(2)$.
а) Задайте операторы $J_+,J_-,\mathrm{i}J_3$ матрицами в базисе из разложимых тензоров.
б) Найдите инвариантные подпространства (в терминах базиса разложимых векторов).
в)* Найдите $3j$ символы (в обозначениях лекции речь идет о случае $j_1=1,j_2=1/2$, можно ограничиться случаем $m=1$).

Задача 4. * Группа S_4 вложена группу $SO(3)$ как группа вращений куба. Тогда любое неприводимое представление группы $SO(3)$ π_n (выше оно еще обозначалось S_n) можно ограничить на S_4.
а) Разложите это ограничение π_2 на неприводимые представления S_4.
б) То же, для произвольного π_n, $n\in\mathbb{Z}$.

Материалы курса смотрите на сайте:
[qft.itp.ac.ru/mbersht/Group.html]