Лекция 9. Симметрические тензоры. Группы Ли $SO(3), SU(2)$.

Определение 1. Рассмотрим векторное пространство V с базисом $e_1, \dots, e_N$. Тензор $a = a^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} \in V^{\otimes k}$ называется симметричным если его коэффициенты $a^{i_1 \dots i_k}$ симметричны относительно перестановки индексов. Пространство симметричных тензоров обозначается $S^k V$.

Здесь и далее по повторяющимся индексам сверху и снизу предполагается суммирование.

Определение 2. Тензор $a = a^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} \in V^{\otimes k}$ называется кососимметричным если его коэффициенты $a^{i_1 \dots i_k}$ умножаются на знак $(-1)^{|\sigma|}$ при перестановке индексов $\sigma \in S_k$. Пространство кососимметричных тензоров обозначается $\Lambda^k V$.

Более инваривантно можно сказать, что симметричные тензоры это тензоры который при перестановке сомножителей переходят в себя, а кососимметричные тензоры —это тензоры которые при перестановке сомножителей умножаются на знак. В пространствах $S^k V$ и $\Lambda^k V$ несложно указать базис, в простейшем примере $k = 2$ этот базис имеет вид

$$S^2 V = \langle e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i | 1 \leq i \leq j \leq N \rangle, \quad \Lambda^2 V = \langle e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i | 1 \leq i < j \leq N \rangle.$$

Для произвольного k базис можно выбрать в виде

$$\begin{aligned} S^k V &= \langle \quad e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_k} + \text{sym. terms} \quad |1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq N \rangle, \\ \Lambda^k V &= \langle \quad e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_k} + \text{asym. terms} \quad |1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq N \rangle. \end{aligned}$$

Предложение 1. Размерности пространств симметрических и кососимметрических тензоров равны:

$$\begin{aligned} \dim S^k V &= \binom{N+k-1}{k} = \frac{N(N+1)\dots(N+k-1)}{k!} = \frac{N^{\uparrow k}}{k!}, \\ \dim \Lambda^k V &= \binom{N}{k} = \frac{N(N-1)\dots(N-k+1)}{k!} = \frac{N^{\downarrow k}}{k!}. \end{aligned}$$

Предложение 2. $V \otimes V = S^2 V \oplus \Lambda^2 V$, далее появляются еще слагаемые $V^{\otimes k} = S^k V \oplus \Lambda^k V \oplus \dots$.

Для любого линейного преобразования A оператор $A^{\otimes k} \colon V^{\otimes k} \to V^{\otimes k}$ сохраняет подпространства $S^k V$ и $\Lambda^k V$. В частности, если V является представлением группы G, то $S^k V$ и $\Lambda^k V$ также являются представлениями группы G.

Предложение 3. Для любого оператора $A \colon V \to V$ верно

$$\operatorname{Tr} S^2 A = \frac{1}{2}((\mathrm{TrA})^2 + \mathrm{Tr\,A}^2), \quad \operatorname{Tr} \Lambda^2 A = \frac{1}{2}((\mathrm{TrA})^2 \text{-} \mathrm{Tr\,A}^2).$$

Из этой формулы находятся характеры представлений $S^2\rho$ и $\Lambda^2\rho$:

$$\chi_{S^2\rho}(g) = \frac{1}{2}(\chi_\rho(g)^2 + \chi_\rho(g^2)), \quad \chi_{\Lambda^2\rho}(g) = \frac{1}{2}(\chi_\rho(g)^2 - \chi_\rho(g^2)).$$

Теперь обсудим несколько примеров групп Ли.

SO(3) Группа $SO(3)$ состоит из матриц R удовлетворяющих $R^tR = E$, $\det R = 1$. В терминах матричных элементов

$$R_{ki}R_{kj} = \delta_{ij}, \quad \epsilon_{pqr}R_{1p}R_{2q}R_{3r} = 1,$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование и ϵ символ равен нулю если индексы повторяются и знаку перестановки иначе. Второе соотношение можно переписать в более общей форме

$$\epsilon_{pqr}R_{ip}R_{jq}R_{kr} = \epsilon_{ijk}.$$

Свернув с R_{ks} получаем

$$\epsilon_{ijk}R_{ks} = \epsilon_{pqs}R_{ip}R_{jq}.$$

Мы проверяли на прошлой лекции, что группа $SO(3)$ трехмерная. Это означает, что все эти соотношения можно локально разрешить и выразить все матричные элементы через какие-то три, эти три являются локальными координатами на группе. Более геометрически элементы группы $SO(3)$ описываются при помощи углов Эйлера, их опять же три и они тоже являются локальными координатами.

Нам будет удобно ввести координаты на группе $SO(3)$ еще одним способом. Любой элемент $SO(3)$ является вращением относительно некоторой оси на некоторый угол α. Через $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ мы обозначим направляющий вектор этой оси. Отнормируем вектор $\vec{n}$ так, что $|\vec{n}| = 1$. То есть мы считаем, что любой элемент $SO(3)$ параметризуется точкой двумерной сферы $\vec{n}$ и углом α.

Произвольный вектор $\vec{x}$ разлагается в сумму

$$\vec{x} = \vec{x}_\parallel + \vec{x}_\perp,$$

где $\vec{x}_\parallel = (\vec{x}, \vec{n})\vec{n}$ параллелен $\vec{n}$, $x_\perp$ оротогонален $\vec{n}$. Вращение действует на эти векторы по формуле

$$\vec{x}_\parallel \mapsto x_\parallel, \quad \vec{x}_\perp \mapsto \cos\alpha\vec{x}_\perp + \sin\alpha[\vec{n}, \vec{x}_\perp].$$

Здесь $[\cdot, \cdot]$ обозначает векторное произведение. Тогда для вектора $\vec{x}$ мы имеем

$$\vec{x} \mapsto \vec{x} + \sin\alpha[\vec{n}, \vec{x}] + (1 - \cos\alpha)((\vec{x}, \vec{n})\vec{n} - \vec{x}).$$

Вычислим теперь это в матричном языке. Оператор векторного умножения на $\vec{n}$ имеет матрицу N, матрица оператора $\vec{x} \mapsto (\vec{x}, \vec{n})\vec{n} - \vec{x}$ равна N_2:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} n_1^2 - 1 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & n_2^2 - 1 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $N_2 = N^2$. Поэтому матрица поворота на угол α относительно оси натянутой на $\vec{n}$ имеет вид

$$R = E + \sin\alpha N + (1 - \cos\alpha) N^2.$$

Вектор $\vec{n}$ имел единичную длину, поэтому матрица N имеет свойство $N^3 = -N$. Используя разложение в ряд экспоненты мы получаем, что

$$R = \exp(\alpha N).$$

Матрица αN является произвольной кососимметричной матрицей 3×3, т.е. произвольным элементом алгебры Ли $\mathfrak{so}(3)$. Это является иллюстрацией к следующей теореме.

Теорема 4. Пусть G группа Ли и $A \in T_E G$ элемент ее алгебры Ли. Тогда $\exp A \in G$.

Для случая группы $SO(2)$ это утверждение уже видели раньше.

Отметим, что вообще говоря неверно, что *любой* элемент группы Ли является экспонентой от элемента алгебры Ли. Но для элементов близких к E это верно, с другой стороны верно, что окрестность E порождает связную компоненту единицы группы G, в этом смысле алгебра Ли в большой мере определяют группу Ли.

Для групп $SO(N)$ при $N > 3$ уже сложно описать все элементы геометрически. С алгеброй Ли можно работать точно также, образующими являются элементарные кососимметрические матрицы $J_{ab} = E_{ab} - E_{ba}$, $1 \leq a < b \leq N$, которые есть разность двух матричных единиц. В примере группы $SO(3)$ эти матрицы соответствуют единичным базисным векторам

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Коммутаторы в этом базисе имеют вид $[J_a, J_b] = \epsilon_{abc} J_c$ из этого следует, что алгебра Ли $\mathfrak{so}(3)$ изоморфна $\mathbb{R}^3$. Матрица N использованная выше по этому базису разлагается просто как $N = n_1 J_1 + n_2 J_2 + n_3 J_3$.

Есть еще одно обобщение, а именно можно рассмотреть группу $SO(n, m))$ преобразований сохраняющих скалярное произведение с сигнатурой (n, m). Более формально $SO(n, m) = \{g | g S g^t = S\}$, где S матрица Грамма формы. В частности $SO(3, 1)$ называется группой Лоренца.

U(2) Группа $U(2)$ состоит матриц g таких, что $gg^* = E$. Запишем эти соотношения явно:

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a\bar{a} + b\bar{b} = 1,\ a\bar{c} + b\bar{d} = 0,\ c\bar{c} + d\bar{d} = 1.$$

Решая эти уравнения получаем, что $c = -\lambda\bar{b}$, $d = \lambda\bar{a}$, где $|a|^2 + |b^2| = 1$, $|\lambda| = 1$. То есть элемент группы $U(2)$ задается точкой трехмерной сферы и еще комплексным числом по модулю равным 1. Группа $U(2)$ четырехмерна, вообще размерность группы $U(N)$ равна N^2.

SU(2) Если наложить дополнительное условие $\det g = 1$, то это фиксирует $\lambda = 1$. То есть группа $SU(2)$ состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$. Разложив по a, b на вещественную и мнимую часть $a = a_0 + \mathrm{i}a_3$, $b = a_2 + \mathrm{i}a_1$ мы можем переписать произвольный элемент из $SU(2)$ в виде

$$a_0 E + \mathrm{i}a_1\sigma_1 + \mathrm{i}a_2\sigma_2 + \mathrm{i}a_3\sigma_3$$

где σ матрицы Паули определяются по формулам

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Набор параметров (a_0, a_1, a_2, a_3) удовлетворяющие $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ можно воспринимать как точку трехмерной сферы, и это взаимно-однозначное соответствие между трехмерной сферой и $SU(2)$.

Есть еще вариант параметризации при помощи угла α и трехмерного вектора $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$. А именно, пусть $a_0 = \cos\alpha$, $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \sin^2\alpha$, тогда введем n_j так, что $a_j = n_j \sin\alpha$. Тогда матрица g равна

$$g = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha(\vec{n}, \vec{\sigma}). \tag{1}$$

Последняя формула может быть переписана как $\exp(\mathrm{i}\alpha(\vec{n}, \vec{\sigma}))$.

Матрицы $\mathrm{i}\sigma_1, \mathrm{i}\sigma_2, \mathrm{i}\sigma_3$ образуют базис в алгебре Ли $\mathfrak{su}_2$. Как легко видеть из определения эта алгебра состоит из косоэрмитовых матриц со следом 0. Если их перенормировать на минус двойку, то есть ввести $I_a = -\mathrm{i}\frac{1}{2}\sigma_a$, $a = 1, 2, 3$, то получим, что $[I_a, I_b] = \epsilon_{abc} I_c$, то есть алгебра Ли $\mathfrak{su}(2)$ изоморфна $\mathfrak{so}(3)$. Но группы Ли на самом деле разные, см. задачи.

Предложение 5. а) Алгебра Ли коммутативной группы Ли будет тоже коммутативной.
б) Если группа Ли связна и ее алгебра Ли коммутативна, то и сама группа тоже коммутативна.

Доказательство. а) Напомним, что структура алгебры Ли на касательном пространстве происходила из коммутирования элементов в группе. А именно мы брали две кривые $g(t) = E + At + o(t)$ и $h(s) = E + Bs + o(s)$ и рассматривали коммутатор $h(s)g(t)h(s)^{-1}$. Разлагая его в ряд в первых членах получается $E + h(s)Ah(s)^{-1}$ Теперь оставляя только первый член по s мы получаем $[B, A]$.

Если мы предполагаем, что группа коммутативная, $h(s)g(t)h(s)^{-1} = g(t)$. Оставляя только первый член по t получаем $A = h(s)Ah(s)^{-1}$. Оставляя первый член по s получаем $[B, A] = 0$.

б) Если $[A, B] = 0$, то $\exp(A)$ и $\exp(B)$ коммутируют. Поскольку для связной группы образ экспоненциального отображения порождает всю группу, то мы получаем, что группа коммутативная. ■

Домашнее задание

Рашение задач надо прислать до начала лекции 25 апреля. Помимо письменной сдачи надо быть готовым ответить на вопросы по решениям.

Упражнение 1. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Задайте матрицами S^2A, $\Lambda^2 A$, найдите их след.

Упражнение 2. Используя ряды для экспоненты, синуса и косинуса, проверьте, что любой элемент группы $SU(2)$ имеет вид $\exp(\mathrm{i}\alpha(\vec{n}, \vec{\sigma}))$.

Задача 3. а) Напишите матрицу обратную для матрицы g заданной формулой (1). Как изменились параметры $\vec{n}$ и α?
б) Напишите формулу (матрицу для 3×3) присоединенного действия матрицы $g = \exp(\mathrm{i}\alpha\sigma_3)$, проверьте, что получилось ортогональное преобразование
(в алгебре Ли $\mathfrak{su}(2)$ *удобно взять базис* $\mathrm{i}\sigma_1, \mathrm{i}\sigma_2, \mathrm{i}\sigma_3$*).*
в) Покажите, что общему g заданному формулой (1) в присоединенном представлении будет соответствовать ортогональное преобразование.
г) Является ли полученный гомоморфизм из группы $SU(2)$ в группу $SO(3)$ сюръективным, какое у него ядро?

Задача 4. а) Рассмотрим алгебру $\mathfrak{so}(n)$. Она имеет естественный базис $J_{ab} = E_{ab} - E_{ba}$, где E_{ab} это матрица у которых 1 стоит на месте (a, b), а в остальные местах стоит 0. Разложите коммутатор $[J_{ab}, J_{cd}]$ по этому базису.
б)* Докажите, что алгебра Ли $\mathfrak{so}(4)$ изоморфна прямой сумме $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$.
Указание: выразите через J_{ab} *другие образующие* J_1, J_2, J_3 *и* J'_1, J'_2, J'_3 *так, что каждая тройка удовлетворяет соотношениям* $\mathfrak{so}(3)$*, а* $[J, J'] = 0$*.*