Лекция 8.

Некоторые решения задач из лекции 6.

Задача 3. Найдите таблицу характеров группы S_4. Проверьте соотношения ортогональности между характерами. Разложите тензорные произведения трехмерных на неприводимые.

Решение. Так как классов сопряженности 5, то всего неприводимых представлений 5. Мы уже знаем два одномерных представления: ρ_1 — тривиальное, ρ_2 — знаковое. Также у нас есть геометрическая конструкция двух трехмерных представлений: ρ_3 происходит из геометрического действия S_4 симметриями тетраэдра, ρ_4 происходит из из геометрического действия S_4 вращениями куба.

Характеры ρ_3 и ρ_4 находятся следующим образом. Матрица поворота вокруг оси на угол α может быть приведена к виду $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, поэтому ее след равен $1+2\cos\alpha$. Аналогично, матрица зеркального поворота на угол α приводится к виду $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ и ее след равен $-1+2\cos\alpha$

Представление ρ_3 можно еще описать аналогично примеру с S_3. А именно, это представление можно реализовать как подпредставление четырехмерного перестановочного представления S_4 в пространстве $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$. Его характер находится вычитанием из характера перестановочного представления характера тривиального представления. Представление ρ_4 после этого можно найти как тензорное произведение $\rho_4 = \rho_3 \otimes \rho_1$.

Из того что сумма квадратов размерностей равна 24 следует, что нужно двумерное представление, обозначим его ρ_5. Его характер можно найти из соотношений ортогональности. Другой способ — воспользоваться разложением регулярного представления и написать $2\chi^{(5)} = \chi_{\text{reg}} - \chi^{(1)} - \chi^{(2)} - 3\chi^{(3)} - 3\chi^{(4)}$.

Явно постороить это двумерное представление можно при помощи гомоморфизма $S_4 \to S_3$ и последующего двумерного представления S_3.

	e	$(1,2)$ ^{6}	$(1,2,3)$ ^{8}	$(1,2,3,4)$ ^{6}	$(1,2)(3,4)$ ^{3}
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1	1	-1	1
$\chi^{(3)}$	3	1	0	-1	-1
$\chi^{(4)}$	3	-1	0	1	-1
$\chi^{(5)}$	2	0	-1	0	2

Группы Ли, алгебры Ли.

Обсудим еще раз группу $SO(2)$ на которой мы закончили прошлую лекцию. Она состоит из элементов вида $g(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Матрицы $g(\alpha)$ удовлетворяют соотношению

$$g(\alpha+\beta) = g(\alpha)g(\beta).$$

Можно сказать, что группа $SO(2)$ задана в своем двумерном представлении. Если продифференцировать последнее равенство по β и положить $\beta = 0$, то получаем

$$g'(\alpha) = g(\alpha)g'(0) = g(\alpha)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это равенство (дифференциальное уравнение) можно проверить и непосредственно, используя $g'(\alpha) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{pmatrix}$. Единственным решение этого уравнения удовлетворяющим начальному условию $g(0) = E$ является матричная экспонента

$$g(\alpha) = \exp\left(\alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Опять же, последнее равенство легко проверить непосредственно:

$$\exp\left(\alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\alpha^2}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha^3}{6}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \\ + \frac{\alpha^4}{24}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \ldots = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Можно сказать, что матрица $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ определяет группу $SO(2)$ — любой элемент является экспонентой это этой матрицы. Она называется инфинитезимальным генератором группы $SO(2)$. На прошлой лекции мы описывали представления группы $SO(2)$ основываясь на образе этой матрицы — для любого представления $g(\alpha) \mapsto T(\alpha)$ мы имеем соотношение $T(\alpha) = \exp(T'(0))$. При этом матрица $T'(0)$ должна удовлетворять соотношению $\exp(2\pi T'(0)) = E$. Поэтому ее собственные значения должны быть равны $ik_1, \ldots, ik_N$, где $k_1, \ldots, k_N \in \mathbb{Z}$.

Далее мы (кроме некоторых отступлений) будем заниматься *непрерывным группами* (другой термин *группы Ли*). Все группы которые мы будем рассматривать будут матричными, то есть заданными как подгруппы в $GL(n, \mathbb{R})$ или $GL(n, \mathbb{C})$. Элементы группы должны быть представлены как функции $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ от какого-то набора вещественных параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$. Требуется, чтобы матричные элементы как функции от $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ были гладкими. Также требуется, чтобы функции $\gamma_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_d, \beta_1, \ldots, \beta_d)$ определенные при помощи умножения в группе

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)g(\beta_1, \ldots, \beta_d) = g(\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$$

были гладкими. Аналогично, требуется, чтобы функции $\delta_i(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ определнные при помощи операции взятия обратного элемента в группе

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_d)^{-1} = g(\delta_1, \dots, \delta_d)$$

были гладкими.

Первым примером группы Ли является группа $SO(2)$ которую мы обсуждали ранее.

Выше мы не уточняли какому множеству принадлежат параметры $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ — правильно думать, что они принадлежат некоторому открытому подмножеству в $\mathbb{R}^d$ и g осуществляет гладкую биекцию между этим открытым множеством и окрестностью единицы в группе G. Число параметров d называется размерностью группы.

Примеры.

0. Группа всех невырожденных матриц $GL(n, \mathbb{R})$. В качестве параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ можно взять все матричные элементы. Размерность группы равна n^2. Аналогично, группа всех невырожденных комплексных матриц $GL(n, \mathbb{C})$ вдвое большую размерность $2n^2$.

1. Группа матриц с единичным определителем $SL(n, \mathbb{R})$. Она задается одним уравнением $\det(g) - 1 = 0$. По теореме о неявной функции можно взять $n^2 - 1$ матричных элементов и тогда оставшийся выражается через них при помощи гладкой функции. Эти $n^2 - 1$ элементов и можно взять в качестве локальных параметров, размерность группы равна $n^2 - 1$. Единственное, что надо проверить, что дифференциал не равен нулю. На более конкретном языке это означает, что есть ненулевая частная производная.

Проверим это сначала для случая $n = 2$. Тогда

$$\delta(\det g - 1) = g_{11}\delta g_{22} + g_{22}\delta g_{11} - g_{12}\delta g_{21} - g_{21}\delta g_{12}.$$

Мы видим, что $\delta(\det g - 1) = 0$ только если все матричные элементы g равны нулю, но такая матрица не лежит в $SL(2, \mathbb{R})$.

Для произвольной матрицы g легко видеть, что $\delta \det g = \sum_{i,j} G^{ij} \delta g_{ij}$, где G^{ij} алгебраическое дополнение к матричному элементу g_{ij}. Так как $\det g = 1$, то одно из этих дополнений не равно 0, значит дифференциал невырожден.

В частности в точке $g = E$, мы имеем

$$\delta \det g = \delta g_{11} + \dots + \delta g_{nn} = \operatorname{Tr} \delta g.$$

То есть мы получили, что частные производные по координатам g_{ii} не равны нулю, в качестве локальных координат можно взять все координаты кроме любой из них.

2. Через $O(n)$ обозначается группа всех ортогональных матриц, через $SO(n)$ подгруппа, состоящая из ортогональных матриц с определителем 1. Ортогональные матрицы задаются уравнением $gg^t = E$. Так как матрица XX^t — симметрична, то уравнение $gg^t = E$, являет собой $\frac{n(n+1)}{2}$ уравнений на матричные элементы матрицы g которых всего n^2. По теореме о неявной функции матрицы из $SO(n)$ могут локально быть выражены через $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ параметров. Но для того чтобы применить теорему о неявной функции надо проверить, что дифференциалы этих уравнений линейно независимы.

Рассмотрим малое приращение $g = E + t\delta g + o(t)$. Подставим это в уравнение на g мы получаем, что в первом порядке $\delta g + \delta g^t = 0$. Это система линейных уравнений на δg, ее решения это кососимметричные матрицы которые образуют пространство размерности $\frac{n(n-1)}{2}$. Значит ранг системы равен $\frac{n(n+1)}{2}$, совпадает с количеством уравнений, что и требовалось показать.

3. Группа унитарных матриц $U(n)$. У нее есть подгруппа $SU(n)$ унитарных матриц с определителем 1. О них речь в задаче ниже.

Рассмотрим все возможные гладкие кривые $g(t)$, где $g(0) = E$. При малых t эта кривая имеет вид $g(t) = E + At + o(t)$, где $A = g'(0)$. Множество таких A называется касательным пространство к G в точке E, обозначает $T_E G$.

Заметим, что $T_E G$ является векторным пространством. Действительно, если есть две кривые $g_1(t) = E + A_1 t + o(t)$ и $g_2(t) = E + A_2 t + o(t)$, то их прозведение имеет вид $g_1(t)g_2(t) = E + (A_1 + A_2)t + o(t)$. Значит, если $A_1, A_2 \in T_E G$, то $A_1 + A_2 \in T_E G$. Кроме того, если рескалироть параметр t, то есть взять кривую $g_3(t) = g_1(\lambda t) = 1 + \lambda A_1 t + o(t)$, то мы получаем, что если $A_1 \in T_E G$, то $\lambda A_1 \in T_E G$.

Укажем, что это за векторные пространства для примеров выше. В случае группы $G = SO(2)$ порождено матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. В случае группы $G = SL(n, \mathbb{R})$ мы нашли, что матрица A должна удовлетворять условию $\operatorname{Tr} A = 0$. В случае $G = SO(n, \mathbb{R})$ матрица A удовлетворяет условию $A = -A^t$.

Замечание. Аналогично можно определить касательное пространство к любой точке $g \in G$ (подобно тому как есть касательное пространство к сфере в любой ее точке). Это касательное пространство обозначается $T_g G$, оно всегда будет векторным пространством, для этого структура группы на самом деле не нужна. Но для следующих свойств $T_E G$ структура группы уже является необходимой.

Рассмотрим гладкую кривую $g(t) = E + At + o(t)$. Тогда для любого $h \in G$ кривая $\tilde{g}(t) = hg(t)h^{-1} = E + hAh^{-1}t + o(t)$ тоже является гладкой и $\tilde{g}(0) = E$. То есть, мы доказать, что если $A_1 \in T_E G$ и $h \in G$, то элемент $hAh^{-1} \in T_E G$. Значит, пространство $T_E G$ имеет структуру представления группы G. Такое представление есть для любой группы Ли G, оно называется *присоединенным представлением.*

Пусть теперь элемент h также зависит от параметра, другими словами, рассмотрим кривую $h(s) = E + Bs + o(s)$. Тогда, для любого s, $h(s)Ah(s)^{-1} \in T_E G$. Вычисляя мы получаем

$$h(s)Ah(s)^{-1} = (E + Bs + o(s))A(E - Bs + o(s)) = A + (BA - AB)s + o(s).$$

Дифференцируя по s мы получаем, что $BA - AB \in T_E G$. Это выражение называется коммутатором матриц B, A и обозначается $[B, A]$.

Резюмируя, мы получили, что векторное пространство $T_E G$ является замкнутым относительно действия группы G сопряжениями и взятия коммутатора.

Определение 1. Алгеброй Ли называется векторное пространство $\mathfrak{g}$ снабженное билинейное операцией $[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ удовлетворяющей следующим двум аксиомам:

$$\begin{array}{rl} \text{Антикоммутативность} & [x,y] = -[y,x] \\ \text{Тождество Якоби} & [[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0 \end{array}$$

Легко проверить, что коммутатор матриц $[A,B] = AB - BA$ удовлетворяет антикоммутативности и тождеству Якоби.

Примеры.

1. Касательное пространство к единице к любой группе Ли G является алгеброй Ли. Обычно обозначается Lie$G$ или маленькой готической буквой $\mathfrak{g}$. Для матричных групп:

а) Алгебра Ли группы всех невырожденных матриц $GL(n)$ размера $n \times n$ обозначается $\mathfrak{gl}(n)$. Состоит из всех матриц размера $n \times n$

б) Алгебра Ли группы всех матриц с определителем 1 $SL(n)$ обозначается $\mathfrak{sl}(n)$. Состоит из всех матриц размера $n \times n$ с нулевым следом.

в) Алгебра Ли группы всех ортогональных матриц $O(n)$ обозначается $\mathfrak{so}(n)$. Состоит из всех кососимметричных матриц размера $n \times n$.

2. Вектора в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$. Коммутатор — векторное произведение.

Замечание. Тождество Якоби введенное можно еще переписать в виде:

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] + [y,[x.z]],$$

что означает, что оператор $[x,\cdot]$ является дифференцированием, т.е. удовлетворяет правилу Лейбница.

3. Пространство функций от переменных q_i и p_i со скобкой Пуассона:

$$\{f,g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial g}{\partial p_i}$$

4. Одномерная алгебра Ли $\dim\mathfrak{g} = 1$. Можно считать, что порождается одним элементом x. Тогда, $[x,x] = -[x,x]$, значит $2[x,x] = 0$, $[x,x] = 0$.

Определение 2. Алгебра Ли называется коммутативной (абелевой) если для любых элементов $x,y \in \mathfrak{g}$ верно, что $[x,y] = 0$.

Ясно, что есть коммутативная алгебра любой размерности.

5. Двумерные алгебры Ли $\dim\mathfrak{g} = 2$. Можно считать, что $\mathfrak{g}$ порождается двумя элементами x,y. Так как $[x,x] = [y,y] = 0$ и $[x,y] = -[y,x]$, то единственный коммутатор который надо описать это $[x,y]$. Если коммутатор $[x,y] = 0$, то алгебра $\mathfrak{g}$ коммутативная. Иначе коммутатор $[x,y] \neq 0$ можно взять в качестве одного из базисных элементов, скажем y. Тогда коммутатор $[x,y]$ пропорционален y и перенормировав x можно сделать $[x,y] = y$. Получилась такая новая алгебра $\mathfrak{g} = \langle x,y\rangle$

и единственный ненулевой коммутатор имеет вид $[x,y]=y$. Эту алгебру можно реализовать как подалгебру в алгебре матриц 2×2: $x=\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & -1/2\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Замечание. Пусть $I_1, I_2, \dots, I_l$ базис в алгебре Ли. Тогда коммутатор базисных элементов снова разлагается по базису $[I_i, I_j]=\sum_k c_{ij}^k I_k$. Числа c_{ij}^k называются *структурными константами.* По аналогии с тем, что конечная группа описывается таблицей умножения, алгебра Ли описывается своими структурными константами.

Определение 3. Линейное отображение $\varphi\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ называется *изоморфизмом алгебр Ли*, если оно является изоморфизмом векторных пространств и $[\varphi(x),\varphi(y)]=\varphi([x,y])$, $\forall x,y\in\mathfrak{g}$.

Эквивалентно, можно сказать, что две алгебры Ли являются изоморфными, если у них есть базисы в которых совпадают структурные константы.

Выше мы показали, что любая двумерная алгебра Ли изоморфна или коммутативной алгебре или алгебре с коммутатором $[x,y]=y$.

6. Описать трехмерные алгебры Ли уже не так просто. Отметим, что помимо коммутативных алгебр выше были еще три примера трехмерных алгебр: $\mathbb{R}^3$, $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Среди них есть изоморфные, см задачи ниже.

Домашнее задание

Решения задач 3аб надо прислать до начала лекции 4 апреля. Решения остальных задач надо прислать или принести до начала лекции 11 апреля. Помимо письменной сдачи надо быть готовым ответить на вопросы по решениям.

Упражнение 1. Группа $U(1)$ действует на матрицах 2×2 по формуле

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}e^{i\alpha} & 0\\ 0 & e^{-i\alpha}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-i\alpha} & 0\\ 0 & e^{i\alpha}\end{pmatrix}$$

Рассматривая a,b,c,d как координаты в четырехмерном пространстве мы получаем четырехмерное представление $U(1)$. Найдите его характер, разложите его на неприводимые.

Задача 2. Найдите число (вещественных) уравнений задающих группу унитарных матриц $U(n)$. Найдите касательно пространство $T_E U(n)$. Проверьте, что полученное множество матриц замкнуто относительно коммутатора.

Задача 3. а) Докажите, что алгебра Ли $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ изоморфна алгебре векторов $\mathbb{R}^3$.
б) Обозначим через $SU(2)$ группу унитарных матриц с определителем 1, через $\mathfrak{su}(2)$ ее алгебру Ли. Докажите, что $\mathfrak{su}(2)$ тоже изоморфна $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$.
в)* Докажите, что алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ не изоморфна $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$.

Указание: а) Выберите удачный базис в $\mathfrak{so}(3)$ и проверьте совпадение структурных констант.

Материалы, а также полезная информация есть на сайте:
[qft.itp.ac.ru/mbersht/Group.html]