Лекция 7

Некоторые решения задач из лекции 6.

Задача 2. Найдите все неприводимые представления группы D_7, составьте таблицу характеров. Для каждого неприводимого представления задайте его указав матрицы соответствующие образующим группы D_7

Решение. В группе D_7 всего 5 классов сопряженности, значит должно быть 5 неприводимых представлений. Сумма квадратов их размерностей должна быть равна 14, значит, это два одномерных и одно двумерное представления. В одномерных представлениях коммутант D_7, т.е. C_7 должен переходить в 1. Таким образом, одномерное представление задается образом отражения s, так как $s^2 = e$, то образ s равен 1 или -1. Первое из этих представлений это тривиальное представление, второе это знаковое, в котором движения сохраняющие ориентацию переходят в 1, а меняющие ориентацию в -1.

Двумерные представлению задаются образами s, r:

$$r \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2k\pi/7) & -\sin(2k\pi/7) \\ \sin(2k\pi/7) & \cos(2k\pi/7) \end{pmatrix}, \quad s \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где $1 \leq k \leq 3$. То, что это действительно представления следует из того, что будут выполнятся соотношения у группе D_7: $r^7 = s^2 = (rs)^2 = e$. Таблица характеров имеет:

	e	$r^{\pm 1}$	$r^{\pm 2}$	$r^{\pm 2}$	sr^b
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	1	1	-1
$\chi^{(3)}$	2	$2\cos(2\pi/7)$	$2\cos(4\pi/7)$	$2\cos(6\pi/7)$	0
$\chi^{(3)}$	2	$2\cos(4\pi/7)$	$2\cos(6\pi/7)$	$2\cos(2\pi/7)$	0
$\chi^{(3)}$	2	$2\cos(6\pi/7)$	$2\cos(2\pi/7)$	$2\cos(4\pi/7)$	0

Можно еще для полноты картины проверить соотношения ортогональности для характеров. Если выразить косинусы через експоненты, то проверка сводится к тождеству

$$1 + \epsilon + \ldots + \epsilon^6 = \frac{\epsilon^7 - 1}{\epsilon - 1} = 0, \tag{1}$$

где $\epsilon = \exp(2\pi/7)$. ■

Замечание. Аналогично описываются неприводимые представления D_n при любом нечетном n.

Задача 4 (Второе соотношение ортогональности для характеров). Докажите, что для любых двух классов сопряженности C_i, C_j, где $1 \leqslant i, j \leqslant k$ верно:

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \chi^{(\alpha)}(h_i)\overline{\chi^{(\alpha)}(h_j)} = \delta_{i,j}\frac{|G|}{|C_i|}$$

Указание: используйте, то что матрица характеров является матрицей переход от одного ортонормированного базиса $\chi^{(i)}$, к другому ортогональному базису γ_i, поэтому после некоторого домножения столбцов должна стать унитарной, а значит ее столбцы будут попарно ортогональны.

Доказательство. Реализуем план из указания при помощи прямого вычисления. Напомним, что через γ_i мы обозначаем функции равные 1 на классе сопряженности C_i и нулю иначе. Тогда γ_i можно разложить по базису $\chi^{(\alpha)}$ и коэффициенты разложения будут равны

$$\langle \chi^{(\alpha)}, \gamma_i \rangle = \frac{|C_i|}{|G|}\chi^{(\alpha)}(h_i), \qquad \gamma_i = \sum_\alpha \frac{|C_i|}{|G|}\chi^{(\alpha)}(h_i)\chi^{(\alpha)}.$$

Найдем скалярные произведения γ_i. С одной стороны, прямо по определению имеем $\langle \gamma_i, \gamma_j \rangle = \delta_{i,j}|C_i|/|G|$. С другой стороны из разложения по характерам неприводимых следует, что

$$\langle \gamma_i, \gamma_j \rangle = \sum_\alpha \chi^{(\alpha)}(h_i)\overline{\chi^{(\alpha)}(h_j)}$$

Отсюда и следует утверждение задачи. ■

Замечание. Это доказательство использовало свойство полноты — то, что характеры образуют ортонормированный базис. Поэтому это соотношение ортогональности иногда называют *соотношением полноты.*

Разные конструкции. Группа $SO(2)$

Обсудим еще две конструкции из теории представлений.

Определение 1. Пусть $\rho\colon G \to GL(V)$ и $\rho'\colon G' \to GL(V')$ два представления. Их тензорным произведением $\rho \boxtimes \rho'$ называется представление группы $G \times G'$ в пространстве $V \otimes V'$ определенное по формуле $(g, g') \mapsto (\rho(g) \otimes \rho'(g'))$.

Не надо путать с тензорным произведением представлений $\otimes$ которое было на прошлой лекции — там мы по двум представлениям группы G строили опять представление группы G, а тут по представлениям двух разных групп G, G' строим представление их произведения $G \times G'$.

Пример. Пусть $G = G' = C_2$. Представления $\rho = \rho'$ заданы матрицами $e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда представление $\rho \boxtimes \rho'$ задается матрицами:

$$(e,e) \mapsto \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix},\ (e,\sigma) \mapsto \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0 \end{pmatrix},\ (\sigma,e) \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix},\ (\sigma,\sigma) \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Легко видеть, что это получилось регулярное представление группы $C_2 \times C_2$.

Так как $\mathrm{Tr}(A \otimes B) = \mathrm{Tr}A \cdot \mathrm{Tr}B$, то $\chi_{\rho \boxtimes \rho'}(g, g') = \chi_\rho(g)\chi_{\rho'}(g')$. Найдем скалярное произведение:

$$
\begin{gathered}
\langle \chi_{\rho_1 \boxtimes \rho_1'}, \chi_{\rho_2 \boxtimes \rho_2'} \rangle = \frac{1}{|G \times G'|} \sum_{g \in G, g' \in G'} \chi_{\rho_1}(g)\chi_{\rho_1'}(g') \overline{\chi_{\rho_2}(g)\chi_{\rho_2'}(g')} = \\
= \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\rho_1}(g) \overline{\chi_{\rho_2}(g)} \right) \left(\frac{1}{|G'|} \sum_{g' \in G'} \chi_{\rho_1'}(g') \overline{\chi_{\rho_2'}(g')} \right) = \langle \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2} \rangle \langle \chi_{\rho_1'}, \chi_{\rho_2'} \rangle \quad (2)
\end{gathered}
$$

Теорема 1. а) Если ρ и ρ' неприводимые представления групп G и G', то $\rho \boxtimes \rho'$ — неприводимое представление группы $G \times G'$. б) Все неприводимые представления группы $G \times G'$ получаются таким способом.

Доказательство. а) Из формулы (2) следует, что $\langle \chi_{\rho \boxtimes \rho'}, \chi_{\rho \boxtimes \rho'} \rangle = 1$. Как мы показывали на прошлой лекции из этого следует неприводимость представления $\rho \boxtimes \rho'$.

б) Пусть k (соответственно k') — число классов сопряженности группы G (соответственно G'). Мы знаем, что число классов сопряженности (а, значит, и число неприводимых представлений) группы $G \times G'$ равно $k \cdot k'$. Если (ρ_1, ρ_1') и (ρ_2, ρ_2') разные пары неприводимых представлений, то из формулы (2) следует, что характеры $\chi_{\rho_1 \boxtimes \rho_1'}$ и $\chi_{\rho_2 \boxtimes \rho_2'}$ ортогональны. Таким образом беря тензорные произведения неприводимых представлений G, G' мы получим $k \cdot k'$ различных неприводимых представлений $G \times G'$, что и требовалось доказать. ■

Определение 2. Пусть заданы H — подгруппа в G и представление $\rho \colon G \to GL(V)$. Тогда ρ задает представление группы H в пространстве V, оно называется *ограничением* представления ρ на подгруппу H.

Пример. Рассмотрим подгруппы $A_3 \subset S_3$, ясно что $A_3 \simeq C_3$. Таблица характеров S_3 приведена на рисунке слева.

При ограничении на C_3 представления χ_1 и χ_2 совпадут, а представление χ_3 окажется приводимым: $\chi_3 = \tilde{\chi_4} + \tilde{\chi_5}$. Соответствующая таблица характеров C_3 приведена на рисунке справа, $\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

	e	$(1,2)$ 3	$(1,2,3)$ 2
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

	e	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$
χ_1	1	1	1
χ_3	2	-1	-1
$\tilde{\chi_4}$	1	ϵ	ϵ^2
$\tilde{\chi_5}$	1	ϵ^2	ϵ

Обсудим теперь представления абелевых групп. Пусть $G = C_N$. Все неприводимые представления одномерны, и мы их уже обсуждали ранее, таблица характеров имеет вид:

	e	r	r^2	$\dots$	r^N
R_0	1	1	1	$\dots$	1
R_1	1	ϵ	ϵ^2	$\dots$	ϵ^{N-1}
R_2	1	ϵ^2	ϵ^4	$\dots$	ϵ^{2N-2}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
R_{N-1}	1	ϵ^{N-1}	ϵ^{2N-2}	$\dots$	ϵ^1

где $\epsilon = \exp(2\pi i/N)$. Можно сказать, что представление R_j переводит r^p в ϵ^{pj}.

Можно проверить соотношения ортогональности, например между характерами представлений R_j и R_k. Проверка сводится к тождеству

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\overline{\chi^{(j)}(r^n)}\chi^{(k)}(r^n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left(\frac{2\pi i}{N}(k-j)\right)^n = \delta_{k,j}.$$

Последнее равенство очевидно при $j = k$ так как мы складываем одни единицы, а при $j \neq k$ следует из формулы суммы геометрической прогрессии (подобно тождеству (1) выше).

Заметим кстати, что из этой проверки видно зачем нужно комплексное сопряжение в формуле для скалярного произведения, иначе не получится ортонормированности.

Аналогично можно проверить соотношение полноты (второе соотношение ортогональности), оно записывается таким образом

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\chi^{(j)}(r^n)\overline{\chi^{(j)}(r^m)} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\exp\left(\frac{2\pi i}{N}(n-m)\right)^j = \delta_{n,m}$$

Пространство Θ — это пространство всех функций на группе, так как группа абелева. То есть для любого $n = 0,\dots N-1$ у нас есть число $f(r^n)$. Удобно не ограничиваться конечным набором значений n, а рассматривать все целые n, наложив условие периодичности, то есть $\Theta = \{f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C} | f(x+N) = f(x)\}$.

Пользуясь полнотой можно написать

$$f(n) = \sum_{m=0}^{N-1} f(m)\delta_{n,m} = \sum_{m=0}^{N-1} f(m)\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\chi^{(j)}(r^n)\overline{\chi^{(j)}(r^m)} = \sum c_j e^{\frac{2\pi i}{N}nj},$$

где $c_j = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} f(m)\overline{\chi^{(j)}(r^m)}$. Такие формулы для разложения называются дискретным преобразованием Фурье. Мы к ним пришли рассматривая теорию представлений группы C_N.

Если G не циклическая, а произведение циклических $G \simeq C_{n_1} \times C_{n_2}$, то ее представления строятся по предложению выше $R_{j_1,j_2} = R_{j_1} \boxtimes R_{j_2}$; в таком представлении общий элемент $(r^{m_1}, r^{m_2}) \in G$ переходит в $\exp(\frac{2\pi i}{n_1}m_1 j_1 + \frac{2\pi i}{n_2}m_2 j_2)$.

Рассмотрим теперь первый пример бесконечной (непрерывной группы). Через $SO(2)$ мы обозначим группу ортогональных преобразований плоскости с определителем 1 (O от слова *Orthogonal*, S от слова *Special*). Геометрически элементы группы $SO(2)$ — это повороты на углы $0 \leq \alpha < 2\pi$, матрица имеет вид

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Сопоставление $\alpha \mapsto R(\alpha)$ задает изоморфизм между группами $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ и группой $SO(2)$.

Есть еще одно описание этой же группы. А именно, обозначим через $U(n)$ множество унитарных матриц размера $n \times n$ (U от слова *Unitary*). Тогда $U(1)$ состоит из комплексных чисел по модулю равных 1, их можно записать в виде $\exp(2\pi i\alpha)$. Ясно, что это та же самая группа.

Будем искать представления группы $U(1)$. То есть мы хотим найти набор матриц $T(\alpha)$ таких, что $T(\alpha+\beta) = T(\alpha)T(\beta)$ и $T(2\pi) = 1$. При этом мы будем рассматривать только гладкие представления, то есть такие, что все матричные элементы $T(\alpha)$ будут гладкими функциями от α.

Взяв производную равенства $T(\alpha+\beta) = T(\alpha)T(\beta)$ по β при $\beta = 0$ получаем дифференциальное уравнение

$$T'(\alpha) = T(\alpha)T'(0).$$

Это линейное дифференциально уравнение, его общее решение имеет вид $T(\alpha) = C\exp(\alpha A)$, где $A = T'(0)$, C константа интегрирования. Из условий $T(0) = T(2\pi) = 1$ следует, что $C = 1$ и матрица A диагональная с собственными значениями вида ik, $k \in \mathbb{Z}$. Представление таким образом, разлагается в прямую сумму одномерных, соответствующих собственным векторам матрицы A.

Таким образом неприводимые представления параметризуются собственными значениями ik матрицы A, характер соответствующего представления равен:

$$\chi^{(k)}(\alpha) = \exp(ik\alpha).$$

Проверим соотношения ортогональности для характеров. Сумму по элементам группы естественно заменить интегралом $\int_0^{2\pi} d\alpha$, $|G|$ заменяется на интеграл 1 (объем группы), то есть на 2π. Соотношения ортогональности принимают вид

$$\langle \chi^{(k)}, \chi^{(j)} \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(i\alpha(k-j))d\alpha = \delta_{j,k}.$$

Соотношение полноты тогда принимает вид

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi^{(k)}(\alpha)\overline{\chi^{(k)}(\beta)} = \delta_{2\pi}(\alpha-\beta),$$

где $\delta_{2\pi}(\alpha)$ это дельта функция на окружности, т.е. такая обобщенная функция, что $\int_0^{2\pi} f(\beta)\delta_{2\pi}(\beta-\alpha)d\beta = f(\alpha)$, для любой 2π периодической функции f. Соотношение полноты можно переписать явно

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik\alpha} = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\alpha - 2n\pi) = 2\pi\delta_{2\pi}(\alpha).$$

Это формула верна и называется формулой суммирования Пуассона. Здесь $\delta(x)$ это дельта функция Дирака.[1]

Пространство Θ функций на группе можно отождествить с пространством периодических функций $\Theta = \{f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C} | f(x+2\pi) = f(x)$. Используя формулу полноты или теоремы из математического анализа, получаем, что $f(z)$ принимает вид

$$f(\alpha) = \int_0^{2\pi} f(\beta)\delta_{2\pi}(\beta-\alpha)d\beta = \int_0^{2\pi} f(\beta)\frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i\alpha k}e^{-i\beta k}d\beta = \sum c_k e^{i\alpha k},$$

где $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\beta)\overline{\chi^{(k)}(\beta)}d\beta$. То есть функция f разлагается в ряд Фурье.

Домашнее задание

Решения задач 1-3 надо прислать или принести до начала лекции 4 апреля. Решения задач 4-6 надо прислать или принести до начала лекции 11 апреля. Помимо письменной сдачи надо быть готовым ответить на вопросы по решениям.

Упражнение 1. * Пусть A — матрица состоящая из одного жорданова блока размера $n\times n$, $n>1$ с собственным значением $\lambda\in\mathbb{C}$. Докажите, что матрица $\exp(\alpha A)$ не будет диагональной при любом $\alpha\in\mathbb{C}$, $\alpha\neq 0$. Докажите, что при $\lambda\neq 0$ матрица A^k не будет диагональной при любом любых $k\in\mathbb{N}$.

Задача 2. а) Напишите таблицу характеров группы D_6.
б) Скольку существует неприводимых двумерных представлений у группы движений призмы D_{6h}? Найдите их характеры.

[1] Обычно формулу суммирования Пуассона пишут в виде

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k),$$

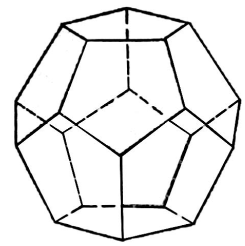
для любой достаточно гладкой и убывающей на бесконечности функции f, $\hat{f}$ обозначает преобразование Фурье. Теперь заметим, что это равенство можно написать для обобщенных функций, обобщенная функция $\delta(x-n)$ примененная к f дает $f(n)$, применение функции $\delta(x-k)$ к $\hat{f}$ равносильно умножению на $e^{2\pi ikx}$. Итого имеем равенство обобщенных функций (мы тут делаем замену переменной)

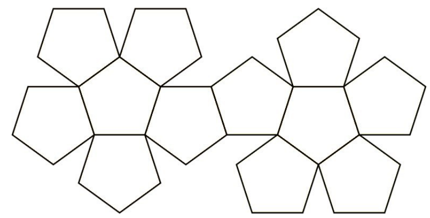
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(x-2\pi n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ikx}$$

У нас функции периодические, поэтому слева стоит просто одна δ функция.

Задача 3. Найдите матрицу характеров неприводимых представлений группы A_4. Опишите разложение ограничений неприводимых представлений S_4 на A_4.
Указание: помимо ограничения представлений S_4, используйте умение описывать одномерные представления.

Задача 4. а) Докажите, что порядок группы вращений додекаэдра G_0 равен 60.
б) Найдите порядки элементов этой группы, опишите эти вращения геометрически.
в) Докажите, что G_0 изоморфна группе четных перестановок A_5.
Указание: разбейте вершины додекаэдра на 5 тетраэдров, так чтобы группа G_0 действовала на этом множестве из 5 элементов.
г) Докажите, что группа всех симметрий додекаэдра G изоморфна одной из групп S_5 или $C_2 \times A_5$.
д) Докажите, что группы S_5 и $C_2 \times A_5$ не изоморфны.


Додекаэдр


Развертка

Задача 5. Разложите пятимерное перестановочное (мономиальное) представление группы S_5 в прямую сумму двух неприводимых.
Указание: разложение устроено аналогично разложению перестановочного представления для группы S_3. Неприводимость можно доказывать или посчитав скалярный квадрат характера или по определению. Во втором способе можно взять произвольный вектор $x = \sum x_i e_i$, $\sum x_i = 0$ и действуя на него S_5 и беря линейные комбинации получить все вектора вида $e_1 - e_j$ т.е. получить базис подпредставления.

Задача 6. * а) Найдите классы сопряженности в группе A_5.
Указание: удобно использовать геометрическое описание как вращения додекаэдра.
б) Найдите три различных неприводимых представления группы A_5.
в) Найдите таблицу характеров A_5.

Материалы, а также полезная информация есть на сайте:
[qft.itp.ac.ru/mbersht/Group.html]