

## Лекция 4. Разные конструкции

В начале лекции дадим еще некоторое число новых понятий, а потом, по ходу разберем несколько задач из домашнего задания.

**Определение 1.** Даны две группы  $G, H$ . Отображение  $\varphi: G \rightarrow H$  называется *гомоморфизмом* групп, если  $\forall a, b \in G, \varphi(a \cdot_G b) = \varphi(a) \cdot_H \varphi(b)$ .

**Предложение 1.** При любом гомоморфизме а)  $\varphi(e) = e$ ; б)  $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$ ;

**Определение 2.** Пусть дан гомоморфизм групп  $\varphi: G \rightarrow H$ . *Ядром* гомоморфизма (обозначается  $\text{Ker } \varphi$ ) называется  $\{g \in G \mid \varphi(g) = e\}$ . *Образом* гомоморфизма (обозначается  $\text{Im}(\varphi)$ ) называется  $\{h \in H \mid \exists g \in G \varphi(g) = h\}$ .

**Предложение 2.** а).  $\text{Ker } \varphi$  является нормальной подгруппой в  $G$ . б)  $\text{Im } \varphi$  является подгруппой в  $H$ .

**Предложение 3.**  $\varphi(g_1) = \varphi(g_2) \Leftrightarrow g_1 \in g_2 \text{Ker } \varphi$ . В частности гомоморфизм  $\varphi$  инъективен тогда и только тогда, когда  $\text{Ker } \varphi = \{e\}$ .

### Примеры

1. Отображение взятия остатка по модулю  $n$  из  $\mathbb{Z}$  в  $\mathbb{Z}_n$  является гомоморфизмом. Ядро — это подгруппа  $n\mathbb{Z}$ .
2. Отображение четности определяет гомоморфизм из группы перестановок  $S_n$  в группу  $C_2$ . Ядро — это подгруппа четных перестановок, она обозначается  $A_n$ .
3. Вычисление определителя задает гомоморфизм из группы матриц  $GL(N, \mathbb{C})$  в группу  $\mathbb{C}^*$ . Ядро это матрицы с определителем 1, эта группа обозначается  $SL(N, \mathbb{C})$ .
4. Действия группы  $G$  на множестве  $\{1, 2, \dots, n\}$  находятся в биекции с гомоморфизмами  $G \rightarrow S_n$ .

**Теорема 4 (Теорема о гомоморфизме).** Пусть  $\varphi: G \rightarrow H$  гомоморфизм групп. Тогда  $G/\text{Ker}(\varphi) \simeq \text{Im}(\varphi)$ .

**Краткое доказательство.** Изоморфизм устроен так: каждому элементу  $h = \varphi(g) \in \text{Im } \varphi$  ставится в соответствии класс  $g \text{Ker } \varphi$ . Корректность следует из доказанных выше свойств, свойство гомоморфизма проверяется напрямую. ■

**Предложение 5 (Следствие).** Если группа  $G$  конечна, то  $|G| = |\text{Ker } \varphi| \cdot |\text{Im } \varphi|$ .

**Теорема 6 (Теорема Кэли).** Любая конечная группа изоморфна подгруппе в симметрической группе  $S_n$  для какого-то  $n$ .

**Краткое доказательство** Пусть  $n = |G|$ . Группа  $G$  действует на себе умножением слева. Значит, по примеру выше есть гомоморфизм  $G \rightarrow S_n$ , элемент  $g \in G$  переходит в перестановку  $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ gx_1 & gx_2 & \dots & gx_n \end{pmatrix}$ . ■

Разберем несколько задач из прошлого домашнего задания и дадим нужный для них контекст.

**Задача 2.** а) Пусть  $G$  — группа движений сохраняющих правильный тетраэдр. Докажите, что действие  $G$  на множестве вершин тетраэдра задает изоморфизм  $G$  и

$S_4$ . Опишите геометрически (как вращения, симметрии или зеркальные повороты) все перестановки. Найдите классы сопряженности.

б) Пусть  $G_0$  это подгруппа собственных движений сохраняющих правильный тетраэдр. Является ли она нормальной? Найдите классы сопряженности в  $G_0$ .

**Краткое решение.** а). Действие группы  $G$  на множестве вершин задает гомоморфизм в группу  $S_4$ . То, что это изоморфизм, следует из того, что любое преобразование однозначно задается перестановкой вершин и любая перестановка вершин получается из движения трехмерного пространства. Геометрическая интерпретация указана в следующей таблице:

Геометрическая интерпретация.	Циклический тип.
Тождественное преобразование,	$e$ ,
Отражение относительно плоскости проходящей через ребро и центр противоположного ребра,	Цикл длины 2 (1, 2).
Поворот вокруг оси проходящей через вершину на угол $2\pi/3$ или $4\pi/3$ .	Цикл длины 3 (1, 2, 3).
Зеркальный поворот относительно плоскости проходящей через середины 4 ребер и на угол $\pi/2$ .	Цикл длины 4 (1, 2, 3, 4).
Поворот вокруг оси проходящей через середины противоположных граней на угол $\pi$ .	Произведение двух независимых циклов длины 2 (1, 2)(3, 4).

На прошлой лекции было доказано, что класс сопряженности в группе  $S_n$  определяется циклической структурой, т.е. всего будет 5 классов сопряженности. Геометрически это тоже понятно, при сопряжении отражение переходит в отражение, вращение вокруг оси переходит в поворот на тот же угол и т.д. Повороты на углы  $2\pi/3$  или  $4\pi/3$  сопряжены посредством несобственного преобразования.

б). Как видно из таблицы выше собственным движениям соответствуют четные перестановки (причем все), значит группа  $G_0 \simeq A_4$ . Она состоит из полных классов сопряженности в  $S_4$  поэтому она нормальна.

Ясно, что если элементы не были сопряжены в  $S_4$ , то они и не будут сопряжены в  $A_4$ . Однако обратное неверно и класс состоящий из тройных циклов распадается на два: повороты на угол  $2\pi/3$  и повороты на угол  $4\pi/3$ , один в другой не переводится посредством сопряжения собственным движением.

Это же можно увидеть и алгебраически. А именно, покажем, что тройные циклы (1, 2, 3) и (1, 3, 2) не сопряжены в  $A_4$ . Действительно, так как  $\alpha(1, 2, 3)\alpha^{-1} = (\alpha(1), \alpha(2), \alpha(3))$ , то в качестве  $\alpha$  могут выступать  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$  которые все являются нечетными. ■

**Задача 3.** а) Через  $D_{nh}$  обозначим группу симметрий прямоугольной призмы с основанием правильный  $n$  угольник. Найдите порядок группы  $D_{nh}$ .

*Другое описание группы  $D_{nh}$  — группа движений трехмерного пространства, сохраняющих правильный многоугольник с  $n$  сторонами в плоскости.*

б) Изоморфны ли группы  $D_{3h}$  и  $D_6$ ?

**Доказательство.** Внутри  $D_{nh}$  есть подгруппа  $D_n$  движений переводящих верхнее основание в себя. И есть подгруппа  $C_2$  состоящая из тождественного преобразования и отражения переставляющего верхнее и нижнее основания (плоскость проходит через середины вертикальных ребер). Легко видеть, что любой элемент  $D_{nh}$  представим в виде произведения элемента из  $D_n$  и  $C_2$ . Теперь, чтобы доказать изоморфизм достаточно применить следующее предложение. ■

**Предложение 7.** Пусть группа  $G$  содержит две подгруппы  $A, B$ , такие, что  $A, B$  коммутируют (для любых  $a \in A, b \in B, ab = ba$ ),  $A \cap B = \{e\}$ ,  $G = A \cdot B$  (т.е.  $\forall g \in G, \exists a \in A, b \in B: g = ab$ ). Тогда  $G \simeq A \times B$ .

**Доказательство.** Построим гомоморфизм из  $A \times B$  в  $G$ , который переводит пару  $(a, b)$  в их произведение. То, что это гомоморфизм следует из того подгруппы  $A, B$  коммутируют. Далее, из того  $A \cap B = \{e\}$  следует, что это инъекция, а из  $G = A \cdot B$  то, что это сюръекция. Значит это изоморфизм. ■

Докажем теперь, что  $D_6 \simeq D_3 \times C_2$ . Три вершины шестиугольника стоящие через один образуют правильный треугольник. Подгруппа группы  $D_6$  переводящая этот треугольник в себя изоморфна  $D_3$ . Подгруппа  $D_6$  состоящая из тождественного преобразования и центральной симметрии изоморфна  $C_2$ . Эти две подгруппы коммутируют, не пересекаются, и любой элемент  $D_6$  может быть записан как их произведение. Значит, по предложению выше  $D_6 \simeq D_3 \times C_2 \simeq D_{3h}$ . ■

**Определение 3.** Центром группы  $G$  называется множество  $Z(G) = \{g \in G | \forall x \in G, xg = gx\}$ .

Легко видеть что  $Z(G)$  является подгруппой. В задаче выше в разложении  $D_6 \simeq D_3 \times C_2$  элементы  $C_2$  должны лежать в центре, поэтому в качестве порождающей  $C_2$  можно взять центральную симметрию, но *нельзя* брать никакую осевую симметрию.

Упомянем еще такую тему как задание группы образующими и соотношениями. Мы не будем давать аккуратного определения, а ограничимся одним примером.

**Предложение 8.** Группа  $D_n$  порождается одним поворотом на угол  $2\pi/n$  который мы обозначим  $r$  и одним отражением, которое мы обозначим  $s$ . Соотношения имеют вид  $r^n = s^2 = rsrs = e$ .

**Доказательство.** Во первых, легко видеть, что любое вращение из  $D_n$  имеет вид  $r^b$ ,  $0 \leq b \leq n - 1$ , а любое отражение может быть получено как композиция  $s$  и вращения. Из этого следует, что группа  $D_n$  порождена  $s, r$ .

Во вторых, эти соотношения выполнены в группе  $D_n$ . Единственное, что не сразу очевидно, это  $rsrs = e$ , это происходит из того, что  $rs$  является несобственным преобразованием, а, значит, отражением.

Наконец, проверим, что другие соотношения налагать не надо. Любой элемент группы порожденной  $r, s$  может быть записан в виде  $s^{a_1}r^{b_1} \dots s^{a_k}r^{b_k}$ , где  $a_i \in \mathbb{Z}$ . Пользуясь соотношением  $rs = sr^{-1}$  мы можем пронести  $s$  влево и переписать слово в виде  $s^a r^b$ , где  $a = 0, 1, b = 0, \dots, n - 1$ . Значит группа с данными образующими и соотношениями содержит не более  $2n$  элементов. С другой стороны, она содержит не менее  $2n$  элементов так как из нее есть сюръективный гомоморфизм в  $D_n$ . ■

**Задача 4.** а) Пусть  $G$  — группа симметрий прямоугольной (но не квадратной) решетки на плоскости,  $T$  — подгруппа состоящая из трансляций. Докажите, что  $T$  является нормальной подгруппой в  $G$ . Найдите факторгруппу  $G/T$ . Представьте  $G$  в виде полупрямого произведения.

б)\* Найдите классы сопряженности в  $G$ .

**Доказательство.** Любое аффинное преобразование можно записать в виде  $x \mapsto Ax + v$ . Так как начало координат должно переходить в точку решетки, то вектор  $v$  — это вектор решетки. Кроме того, так как горизонтальные прямые решетки должны перейти в горизонтальные прямые и тоже про вертикальные, то матрица  $A$  — диагональная. Так как  $A$  к тому же ортогональная, то всего есть 4 варианта преобразований в  $G$ :

$$\begin{aligned} \text{(i)} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, & \text{(ii)} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \\ \text{(iii)} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, & \text{(iv)} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Геометрически, преобразования типа **(i)** — это трансляции, преобразования типа **(ii)** — это скользящие симметрии относительно горизонтальных осей, преобразования типа **(iii)** — это скользящие симметрии отражения относительно вертикальных осей, преобразования типа **(iv)** — это центральные симметрии.

Подгруппа  $T$  состоит из преобразований типа (1). Построим гомоморфизм из группы  $G$  в группу матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

который переводит аффинное преобразование в соответствующую ему матрицу  $A$ . Легко проверить, что это действительно гомоморфизм.

Ядром этого гоморфизма является группа трансляций  $T$ , значит, она является нормальной. По теореме о гомоморфизме  $G/T$  изоморфно образу, то есть группе состоящей из матриц (1), эта группа изоморфна  $C_2 \times C_2$ . Значит  $G/T \simeq C_2 \times C_2$ .

Обозначим через  $G_0$  подгруппу  $G$  сохраняющую начало координат (т.е. линейных преобразований в формуле выше). Отметим, что подгруппы  $G_0$  и  $T$  не коммутируют. Например

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Значит, нельзя сказать, что  $G$  является произведением  $G_0$  и  $T$ . Но  $G$  является полупрямым произведением  $G \simeq G_0 \ltimes T$ , это можно увидеть как напрямую, так и из следующего общего предложения.

**Предложение 9.** Пусть группа  $G$  содержит две подгруппы  $A, B$  такие, что  $A \cap B = \{e\}$ ,  $A \cdot B = G$ ,  $B \triangleleft G$ . Тогда  $G$  является *полупрямым произведением*  $A$  и  $B$ .

**Доказательство.** Определим  $\phi_a(b) = aba^{-1}$ . Легко проверить, что сопоставление  $a \mapsto \phi_a$  удовлетворяет условиям

$$\phi_a(b_1 b_2) = \phi_a(b_1) \phi_a(b_2), \quad \text{и} \quad \phi_{a_1}(\phi_{a_2}(b)) = \phi_{a_1 a_2}(b).$$

Поэтому мы можем определить полупрямое произведение  $G = A \ltimes B$ . Гомоморфизм  $\varphi: A \ltimes B \rightarrow G$  строится по формуле  $(a, b) \mapsto a \cdot b$ . Инъективность и сюръективность этого отображения следует из того, что  $A \cap B = \{e\}$ ,  $A \cdot B = G$ . То, что это действительно гомоморфизм проверяется напрямую

$$\begin{aligned} \varphi((a_1, b_1)) \cdot \varphi((a_2, b_2)) &= a_1 b_1 a_2 b_2 = a_1 a_2 (a_2^{-1} b_1 a_2) b_2 = a_1 a_2 \phi_{a_2^{-1}}(b_1) b_2 = \\ &= \varphi((a_1 a_2, \phi_{a_2^{-1}}(b_1) b_2)) = \varphi((a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Предложение 10.** Если  $G = A \ltimes B$ , то  $G/B \simeq A$ .

**Доказательство.** Построим гомоморфизм из  $G$  в  $A$  по формуле  $(a, b) \mapsto a$ . Его ядро есть  $B$ , образ изоморфен  $A$ , по теореме о гомоморфизме получаем нужное.  $\blacksquare$

**Замечание.** Аналогичное утверждение верно и для всей группы движений — она изоморфна полупрямому произведению ортогональной группы и группы трансляций  $O(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ . Также для любой сигнатуры, например группа Пуанкаре есть полупрямое произведение группы Лоренца и группы трансляций  $O(3, 1) \ltimes \mathbb{R}^4$ .

### Домашнее задание

*Решения задач 3 и 4 надо прислать до начала лекции 7 марта. Задачи 1 и 2 надо прислать до начала лекции 14 марта. Помимо письменной сдачи надо быть готовым ответить на вопросы по решениям.*

**Задача 1.** Постройте сюръективный гомоморфизм из группы  $S_4$  в группу  $S_3$ . Найдите его ядро.

*Указание: воспользуйтесь действием  $S_4$  на пространстве многочленов от четырех переменных переставляя переменные. Точнее воспользуйтесь орбитой многочлена  $P = x_1 x_2 + x_3 x_4$  для такого действия.*

**Задача 2.** Через  $\mathbb{C}^*$  обозначим группу ненулевых комплексных чисел с операцией множения, через  $\mathbb{R}_+$  обозначим подгруппу положительных вещественных чисел. Найдите факторгруппу  $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+$ .

*Указание: представьте  $\mathbb{C}^*$  в виде произведения  $\mathbb{R}_+$  и другой подгруппы.*

**Определение 4.** Подгруппа порожденная элементами вида  $x y x^{-1} y^{-1}$  называется коммутантом группы  $G$ . Выражение  $x y x^{-1} y^{-1}$  называется коммутатором элементов  $x, y$ . Коммутант группы  $G$  обозначается  $[G, G]$ .

**Задача 3.** а) Найдите классы сопряженности в группе  $D_n$ .

б) Найдите коммутант группы  $D_n$ .

*Указание: используйте, то что любой элемент  $D_n$  может быть записан в виде  $r^b$  или  $sr^b$  и соотношения на  $r, s$  найденные на лекции*

в)\* Представьте группу  $D_n$  в виде нетривиального полупрямого произведения.

**Задача 4.** Пусть  $G$  — группа движений сохраняющих куб,  $G_0$  — подгруппа собственных движений.

а) Постройте нетривиальный гомоморфизм из  $G_0$  в  $S_4$  используя действие  $G$  на множестве диагоналей куба. Является ли он изоморфизмом?

б) Найдите классы сопряженности в группе  $G_0$ . Опишите эти классы геометрически как (как вращения, симметрии или зеркальные повороты).

в) Опишите  $G$  как произведение (прямое или полупрямое) Сколько существует классов сопряженности в  $G$ ?

---

*Материалы, а также полезная информация есть на сайте:*  
[[qft.itp.ac.ru/mbersht/Group.html](http://qft.itp.ac.ru/mbersht/Group.html)]