

Программа

Часть 1

1. Группа перестановок. Разложение в произведение циклов. Разложение в произведение транспозиций. Четность перестановок.
2. Абстрактные группы. Подгруппа. Порядок группы. Примеры.
3. Таблица умножения группы. Группа остатков \mathbb{Z}_n^* . Изоморфизм групп. Прямое произведение групп. Классификация конечных абелевых групп.
4. Действие группы на множестве. Орбиты, стабилизаторы. $|G| = |Gx| \cdot |G_x|$
5. Порядок элемента. Смежные классы. Теорема Лагранжа.
6. Классы сопряженности. Описания классов сопряженности для группы S_n , для группы движений пространства.
7. Нормальные подгруппы. Полупрямое произведение групп.
8. Теорема о гомоморфизме. Теорема Кэли.
9. Группа симметрий правильного многоугольника. Группы симметрий правильных многогранников.

Часть 2

10. Представления групп. Примеры. Прямая сумма представлений. Неприводимые представления. Теорема Машке. Представления конечных циклических групп.
11. Коммутант группы. Одномерные представления групп. Примеры.
12. Характеры представлений. Свойства характеров. Таблица характеров. Примеры.
13. Тензорное произведение векторных пространств. Симметрические тензоры, кососимметрические тензоры.
14. Тензорные произведения представлений (\boxtimes и \otimes). Ограничение представления на подгруппу. Примеры.

Часть 3

15. Группы $U(1)$, $SO(2)$, их представления, соотношение ортогональности.
16. Группы Ли. Алгебры Ли. Примеры. Касательное пространство к единице является алгеброй Ли.
17. Изоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{so}(3)$, $\mathfrak{su}(2)$ и \mathbb{R}^3 .
18. Группы $SU(2)$, $SO(3)$, связь между ними. Координаты на них. Экспоненциальное отображение.
19. Представления алгебр Ли. Неприводимые представления алгебры $\mathfrak{su}(2)$.
20. Представления групп $SU(2)$ и $SO(3)$.
21. Характеры представлений групп Ли. Тензорное произведение представлений $SU(2)$.
22. Комплексификация алгебры Ли, связь представлений. Примеры: $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{so}(p, q)$.
23. Ортогональная алгебра Ли. Алгебра $\mathfrak{so}(4)$.