Аффинные алгебры Ли и конформная теория поля

9 июня 2022 г.

Лекции в Сколтехе, осень 2018. Содержат опечатки, о найденных сообщайте по адресу mbersht@gmail.com

Содержание

1 Напоминания про конеченомерные алгебры Ли — 2

1.1 Алгебры, системы корней — 2
1.2 Представления — 3
1.3 Элемент Казимира — 5

2 Аффинные алгебры Ли — 5

2.1 Алгебры — 5
2.2 Представления — 6
2.3 Токовая реализация — 8

3 Пространства конформных блоков — 9

3.1 Коинварианты — 9
3.2 Пространство конформных блоков через коинварианты — 10

4 Конформные блоки для интегрируемых представлений. Топологические теории — 12

4.1 Конечномерность пространства конформных блоков — 12
4.2 Топологические теории — 14

5 Вычисление алгебры Верлинде — 16

5.1 Сравнение с операторным подходом к конформным блокам — 16
5.2 Вычисление алгебры Верлинде для случая $\mathfrak{sl}_2$ — 17
5.3 Спектр алгебры Верлинде $\mathfrak{sl}_2$ — 19
5.4 Обобщение на случай других алгебр Ли — 22

6 Свободная реализация **26**
6.1 Алгебра $\mathfrak{sl}_2$ . . . 26
6.2 Общий случай в терминах функций на клетке . . . 31
6.3 Скрининги . . . 36
6.4 В терминах гамильтоновой редукции . . . 37

7 Уравнения Книжника-Замолодчикова **41**
7.1 Конформные блоки . . . 41
7.2 Интегральные формулы для решений . . . 44
7.3 Вывод из свободной реализации . . . 45

Список литературы **48**

Список задач **49**

1 Напоминания про конеченомерные алгебры Ли

Источником может быть [2, Sec. 2], [3, Sec. 13]

1.1 Алгебры, системы корней

Через $\mathfrak{g}$ мы будем обозначать простую алгебру Ли, основной пример для нас это $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$. Также мы может встретится со случаем $\mathfrak{g}$ полупростая, т.е. сумма простых или со случаем $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ которая не является полупростой из-за наличия одномерного центра.

Через $\mathfrak{h}$ мы обозначим картановскую подалгебру. Алгебра $\mathfrak{g}$ разлагается по собственным подространствам $\mathfrak{h}$: $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus\limits_{\alpha\in R} \mathfrak{g}_\alpha$. Множество $R \in \mathfrak{h}^*$ является системой корней.

Через $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset R$ мы будем обозначать систему простых корней. Любой корень $\alpha \in R$ единственным образом представим в виде $\alpha = \sum_{i=1}^l a_i\alpha_i$, причем либо все $a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ либо все $a_i \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$. В первом случае корень называется положительным, во втором отрицательным. Множество положительных корней обозначается R_+, множество отрицательных R_-. Определим подалгебры:

$$\mathfrak{n}^\pm = \bigoplus_{\alpha\in R_\pm} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{b}^\pm = \mathfrak{n}^\pm \oplus \mathfrak{h}.$$

Понятно, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$.

Через θ мы обозначаем старший корень — корень в разложении которого по α_i все a_i максимальны. С точки зрения теории представлений θ является старшим весом присоединенного представления.

На алгебре $\mathfrak{g}$ есть инвариантное скалярное произведение — форма Киллинга. Ее можно спустить на $\mathfrak{h}$ и перенести на $\mathfrak{h}^*$. Элементы R (корни) или будут все иметь одну и ту же длину или длина будет принимать два значения. Мы будем нормировать скалярное произведение на так, что длинный корень имеет норму 2: $(\theta, \theta) = 2$.

Используя отождествление $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}^*$ сопоставим каждому корню $\alpha \in R$ элемент $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ такой, что $(\lambda, \alpha) = \lambda(h_\alpha)$, $\forall \lambda \in \mathfrak{h}^*$.

Простым корням соответствуют образующие $e_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i} \subset \mathfrak{n}^+$, $h_i = h_{\alpha_i} \frac{2}{(\alpha_i,\alpha_i)} \in \mathfrak{h}$, $f_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i} \subset \mathfrak{n}^-$, здесь $i = 1, \ldots, l$. Они удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} [h_i, h_j] = 0,\ [h_i, e_j] = a_{ij} e_j,\ [h_i, f_j] = -a_{ij} f_j, \\ [e_i, f_i] = h_i,\ [e_i, f_j] = 0, i \neq j \\ (\mathrm{ad} e_i)^{1-a_{ij}} e_j = 0, \quad (\mathrm{ad} f_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $a_{ij} = \alpha_i(h_j)$ — матрица Картана. Соотношения в последней строчке называются соотношениями Серра

Пример 1.1. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$. Через E_{ij} будем обозначать матричные единицы. Тогда

$$e_i = E_{i,i+1},\ h_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1},\ f_i = E_{i+1,i}, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Соотношения Серра для e_i принимают вид

$$[e_i, e_j] = 0,\ |i-j| > 1 \quad [e_i, [e_i, e_j]] = 0,\ |i-j| = 1.$$

Через $Q = \oplus \mathbb{Z}\alpha_i$ мы обозначим решетку корней.

Обозначим $\alpha^\vee = h_\alpha \frac{2}{(\alpha,\alpha)}$. Эти элементы образуют двойственную систему корней. Через $P = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* | \lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{Z}\}$. В случае простых связей можно писать просто $(\lambda, \alpha) \in \mathbb{Z}$, то есть это просто решетка двойственная решетке корней. Через P^+ обозначим конус доминантных весов $P^+ = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* | \lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$.

Фундаментальные веса ω_i определяются по формуле $\omega_i(\alpha_j^\vee) = \delta_{i,j}$. Тогда $P = \oplus \mathbb{Z}\omega_i$, $P^+ = \oplus \mathbb{Z}_{\geq 0}\omega_i$. Нам еще понадобится вектор ρ который можно определить по любой из следующих формул:

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+} \alpha = \sum \omega_i.. \tag{1.2}$$

Задача 1.1. *Система корней D_n состоит из корней вида $e_i - e_j, e_i + e_j, -e_i - e_j$, $i \neq j$. Найдите простые корни, θ, ρ, ω_i, проверьте формулу* (1.2).

С каждым простым корнем α_i связано отражение s_i которое действует на $\mathfrak{h}^*$ по формуле $\lambda \mapsto \lambda - \frac{2(\lambda,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\alpha_i$. Группой Вейля называется группа порожденная всеми такими отражениями.

1.2 Представления

Для любого $\lambda \in \mathfrak{h}$ через M_λ мы будем обозначать модуль Верма порожденный старшим вектором веса λ. Это значит, что в модуле Верма есть вектор v_λ такой, что

$$h_i v_\lambda = \lambda(h_i) v_\lambda, \quad e_i v_\lambda = 0$$

и модуль свободно порожден относительно действия $\mathfrak{n}_-$, то есть базисом в нем являются вектора $y_1^{n_1} y_N^{n_N} v_\lambda$, где $y_1, \ldots, y_N$ — базис в $\mathfrak{n}^-$. Коротко это определение записывается формулой $M_\lambda = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{b}^+}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}_\lambda$.

Через L_λ мы будем обозначать (единственный) неприводимый фактор $L_\lambda = M_\lambda / I_\lambda$.

Теорема 1.1. *а) Модуль L_λ является конечномерным если и только $\lambda \in P^+$.*
б) В этом случае, если $\lambda = \sum n_i\omega_i$, то подмодуль I_λ порожден векторами вида $f_i^{n_i+1}v_\lambda$.

Задача 1.2. *Докажите, что вектора $f_i^{n_i+1}v_\lambda \in M_\lambda$ являются сингулярными, т.е. зануляется любым e_j.*

В примере $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ старшие веса конечномерных представлений параметризуются сигнатурами — наборами целых чисел $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ (точнее для алгебры Ли требуется только чтобы $\lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, условие $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ нужно для группы Ли). Характеры представлений равны полиномам Шура:

$$s_\lambda(x_1, \ldots x_n) = \frac{\det(x_i^{\lambda_j+n-j})}{\det(x_i^{n-j})} \tag{1.3}$$

Задача 1.3. *Найдите главную специализацию характера: $s_\lambda(q^\rho)$, где $q^\rho = (q^{n-1}, q^{n-2}, \ldots, 1)$. Выведите из этого формулу для размерности представления.*

Тензорное произведение представлений $V_\lambda \otimes V_\mu = \oplus V_\nu^{\oplus c_{\lambda,\mu}^\nu}$. В терминах характеров:

$$s_\lambda s_\mu = \sum_\nu c_{\lambda,\mu}^\nu s_\nu. \tag{1.4}$$

Числа $c_{\lambda,\mu}^\nu$ называются коэффициентами Литтлвуда—Ричардсона (для $\mathfrak{sl}_2$ Клебша-Гордана).

Пример 1.2. Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_1$, то $s_{\lambda_1}s_{\mu_1} = s_{\lambda_1+\mu_1}$.
Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(2)$, то $s_\lambda s_\mu = \sum_\nu s_\nu$, где суммирование ведется по ν таким, что $|\nu| = |\lambda| + |\mu|$, $\nu_1 \leq \lambda_1 + \mu_1$, $\nu_2 \leq \lambda_1 + \mu_2$,$\nu_2 \leq \mu_1 + \lambda_2$).

В общем случае ответ устроен сложнее, кроме того числа $c_{\lambda,\mu}^\nu$ принимают значения большие 1. Просто сказать ответ в случае когда μ строка или столбец, это называется формулами Пиери. А именно, обозначим через $e_j = s_{(1)^j}$ полином Шура соответствующий столбцу, тогда

$$s_\lambda e_j = \sum_\nu s_\nu, \tag{1.5}$$

где суммирование ведется по ν которые получаются из λ добавлением j клеток никакие две из которых не лежат в одной строке. Аналогично, обозначим через $h_j = s_j$ полином Шура соответствующий строке, тогда

$$s_\lambda h_j = \sum_\nu s_\nu,$$

где суммирование ведется по ν которые получаются из λ добавлением j клеток никакие две из которых не лежат в одном столбце.

1.3 Элемент Казимира

Пусть x_i базис в $\mathfrak{g}$, x^i — двойственный базис. Тогда элемент $C = \sum x_i x^i \in U(\mathfrak{g})$ называется элементом Казимира. Можно доказать, что элемент C не зависит от выбора базиса x_i и лежит в центре $U(\mathfrak{g})$.

Задача 1.4. *Докажите, что C действует на неприводимом представлении со старшим весом λ константой равной $(\lambda, \lambda + 2\rho)$. То же про модуль Верма.*

В частности из этого следует, что на присоединенном представлении C действует числом $(\theta, \theta + 2\rho) = 2h^\vee$, где $h^\vee = (\rho, \theta) + 1$. Число $h^\vee$ называется дуальным числом Кокстера, в случае простых связей оно равно обычному числу Кокстера h. Можно запомнить значение для алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$, а именно $h^\vee = h = n$.

2 Аффинные алгебры Ли

2.1 Алгебры

По алгебре $\mathfrak{g}$ можно построить алгебру токов $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$, где K центральный элемент, а коммутатор общих элементов имеет вид

$$[x \otimes F, y \otimes G] = [x, y] \otimes FG + K(x, y) \frac{1}{2\pi i} \oint G dF,$$

где $(\cdot, \cdot)$ — форма Киллинга на $\mathfrak{g}$.

Часто к алгебре $\widehat{\mathfrak{g}}$ добавляют еще дифференцирование d, с коммутатором $[d, x \otimes F] = x \otimes t\frac{d}{dt}F$, $[d, K] = 0$. Полученную алгебру будем обозначать $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d$. На алгебре $\widetilde{\mathfrak{g}}$ можно ввести невырожденное спаривание

$$(x \otimes F, y \otimes G) = \frac{(x, y)}{2\pi i} \oint FG \frac{dt}{t}, \quad (K, d) = 1.$$

Если посмотреть на формальное определение алгебры Каца-Муди, то под него подходит $\widetilde{\mathfrak{g}}$, а $\widehat{\mathfrak{g}}$ является в ней подалгеброй.

Разложимые элементы вида $x \otimes t^n$ часто обозначаются как x_n или $x[n]$. Дифференцирование действует на них по формуле $[d, x_n] = n x_n$.

Картановские подалгебры определены как $\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}K$, $\widetilde{\mathfrak{h}} = \widehat{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}d$. По отношению к $\widetilde{\mathfrak{h}}$ алгебра $\widetilde{\mathfrak{g}}$ разлагается

$$\widetilde{\mathfrak{g}} = \tilde{h} \oplus \sum_{\alpha \in \widehat{R}} \widehat{g}_\alpha.$$

Здесь $\widehat{R} \subset \widetilde{\mathfrak{h}}^*$ обозначает аффинную систему корней. Чтобы написать ее более явно введем элемент δ, ω_0 по формулам

$$\delta(\mathfrak{h}) = \omega_0(\mathfrak{h}) = 0, \quad \delta(K) = \omega_0(d) = 0, \quad \delta(d) = \omega_0(K) = 1.$$

Тогда аффинная система корней имеет вид

$$\widehat{R} = \{\alpha + n\delta | (\alpha, n) \in (R \cup 0) \times \mathbb{Z} \setminus (0, 0)\}.$$

Корневые подпространства соответствующие корням (α, n), $\alpha \neq 0$ одномерны и равны $\mathfrak{g}_\alpha \otimes t^n$ (такие корни называются *вещественными*), корневые подпространства соответствующие корням вида $n\delta$ (такие корни называются *мнимыми*) имеют размерность $\dim \mathfrak{h}$ и равные $\mathfrak{h} \otimes t^n$.

Простые корни имеют вид $\alpha_0, \ldots, \alpha_l$, где $\alpha_0 = \delta - \theta$. Положительные корни имеют вид

$$\widehat{R}_+ = \{\alpha + n\delta | n \geq 0 \text{ или } n = 0, \alpha \in R_+\},$$

аналогично можно описать отрицательные корни $\widehat{R}_-$. Борелевские и нильпотентные подалгебры определены как

$$\widehat{\mathfrak{n}}^\pm = \bigoplus_{\alpha \in \widehat{R}_\pm} \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha, \quad \widehat{\mathfrak{b}}^\pm = \widehat{\mathfrak{n}}^\pm \oplus \widehat{\mathfrak{h}}.$$

Можно написать, что $\widehat{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t]t \oplus \mathbb{C}K$, и аналогично для других подалгебр. Через $e_0, e_1, \ldots, e_l$, $f_0, f_1, \ldots, f_l$ мы обозначим образующие Шевалле, они удовлетворяют соотношениям (1.1) с аффинной матрицей Картана. В токовом описании новые генераторы равны $e_0 = f_\theta \otimes t$, $f_0 = e_\theta \otimes t^{-1}$.

Иногда мы будем брать в определении $\widehat{\mathfrak{g}}$ и $\widetilde{\mathfrak{g}}$ кольцо формальных степенных рядов $[[t, t^{-1}]$ вместо многочленов. Это не важно для представлений старшего веса.

2.2 Представления

Представления старшего веса аффинной алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ порождаются старшим вектором $v_{\lambda,k}$, где $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $k \in \mathbb{C}$ таким, что

$$h_i v_{\lambda,k} = \lambda(h_i) v_{\lambda,k}, \;\; K v_{\lambda,k} = k v_{\lambda,k} \quad e_i v_{\lambda,k} = 0.$$

Будем обозначать $M_{\lambda,k}$ модуль Верма над алгеброй $\widehat{\mathfrak{g}}$. Этот модуль является индуцированным с подалгебры $\widehat{\mathfrak{b}}^+$, если $y_1, y_2, \ldots$ это базис в дополнительной подалгебре $\widehat{\mathfrak{n}}^-$, то базис $M_{\lambda,k}$ состоит из векторов вида $y_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot y_l^{n_l} v_{\lambda,k}$.

Через $L_{\lambda,k}$ мы будем обозначать неприводимых фактор модуля Верма $L_{\lambda,k} = M_{\lambda,k}/I_{\lambda,k}$.

Для алгебр петель нам будет нужен еще один тип модулей, так называемые модули Вейля. А именно, на неприводимом представлении L_λ алгебры $\mathfrak{g}$ можно определить действие алгебры $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t] + \mathbb{C}K$: элементы положительной степени $\mathfrak{g}t[t]$ действуют нулем, элемент K действует числом k. Тогда $V_{\lambda,k}$ это представление $\widehat{\mathfrak{g}}$ индуцированное с этого представления $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t] + \mathbb{C}K$. Опять же в терминах базиса — если $y_1, y_2, \ldots$ базис в дополнительной подалгебре $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]t^{-1}$, $v_1, v_2 \ldots$ базис в L_λ, то базис в $V_{\lambda,k}$ имеет вид $y_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot y_l^{n_l} v_j$.

При общих λ представления $M_{\lambda,k}$, $V_{\lambda,k}$, $L_{\lambda,k}$ совпадают, вообще говоря $V_{\lambda,k}$ является промежуточным — меньше чем модуль Верма $M_{\lambda,k}$, но больше чем $L_{\lambda,k}$. На этих представлениях можно определить действие алгебры $\widetilde{\mathfrak{g}}$, для этого можно определить собственное значение действия d на старшем векторе $v_{\lambda,k}$ как угодно и далее продолжить на все представление. Часто удобно считать, что d действует оператором $-L_0$, см. ниже.

Представление старшего веса алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ называется интегрируемым, если для любой $\mathfrak{sl}_2$ тройки e_i, h_i, f_i, $0 \le i \le r$ элементы e_i и f_i действовали локально нильпотетно, то есть для любого вектора v существует N такое, что $e_i^N v = f_i^N v = 0$. На самом деле из этого следует, что любой f_α соответствующий вещественному корню действует локально нильпотетно, позже мы этим воспользуемся.

Паре (λ, k) можно сопоставить вес в $\widehat{\mathfrak{h}}^*$ значение которого на h_i равно $\lambda(h_i)$, $1 \le r$ и значение на K равно k. Если разложение λ по фундаментальным весам равно $\lambda = \sum_{i=1}^r n_i\omega_i$, то $(\lambda, k) = \sum_{i=0}^r n_i\omega_i$, где $n_0 = k - (\lambda, \theta^\vee)$ (как обычно в случае простых связей можно не отличать θ и $\theta^\vee$).

Теорема 2.1. *а) Модуль $L_{\lambda,k}$ является интегрируемым если и только $(\lambda, k) = \sum_{i=0}^r n_i\omega_i$, $n_i \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$.*

Эквивалентно это условие можно написать как $\lambda \in P^+$ и $(\lambda, \theta^\vee) \le k$. Множество λ удовлетворяющих таким условиям обозначается P_k^+.
б) В этом случае, если $(\lambda, k) = \sum n_i\omega_i$, то подмодуль I_λ порожден векторами вида $f_i^{n_i+1}v_\lambda$.

Пример 2.1. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$. Интегрируемых представлений на уровне k будет $k+1$, $\lambda = l\omega_1$, $0 \le l \le k$. Сингулярные векторы которые занулены в представлении $L_{l,k}$ имеют вид $f_1^{l+1}v_{l,k}$ и $f_0^{k-l+1}v_{l,k}$ (напомним, что в токовых обозначениях $f_1 = f[0]$ $f_0 = e[-1]$). Если взять меньшую степень, то вектора $f[0]^l v_{l,k}$ и $e[-1]^{k-l}v_{l,k}$ лежат в представлении $L_{l,k}$ и являются примерами так называемых экстремальных векторов, они являются собственными для других борелевских подалгебр (полученных их $\widehat{\mathfrak{b}}^+$ действием аффинной группы Вейля).

Задача 2.1. *Обозначим через a_n, $n \in \mathbb{Z}$, $\hat{Q}$ генераторы алгебры Гейзенберга, с нетривиальными коммутационными соотношениями $[a_n, a_{-n}] = n$, $[a_0, \hat{Q}] = 1$. Удобно их упаковать в одно (голоморфное) бозонное поле*

$$\varphi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus 0} \frac{1}{-n} a_n z^{-n} + a_0 \log z + \hat{Q}.$$

Докажите, что формулы

$$e(z) = {}^*_* \exp(\sqrt{2}\varphi(z)) {}^*_*, \quad h(z) = \sqrt{2}\partial\varphi(z), \quad f(z) = {}^*_* \exp(-\sqrt{2}\varphi(z)) {}^*_*$$

задают интегрируемое представление алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ на уровне 1. Сколько представлений получается такой конструкцией?

Задача 2.2. *Пусть ψ_r — генераторы алгебры Клиффорда с нетривиальными коммутационными соотношениями $\{\psi_r, \psi_{-r}\} = 1$. На самом деле две версии этой алгебры: с $r \in \mathbb{Z}$ и $r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$. Удобно упаковать эти генераторы в одно (голоморфное) фермионное поле $\psi(z) = \sum \psi_r z^{-r-1/2}$. Докажите, что формулы*

$$e(z) = \sqrt{2} {}^*_* \psi(z) \exp(\varphi(z)) {}^*_*, \quad h(z) = 2\partial\varphi(z), \quad f(z) = \sqrt{2} {}^*_* \psi(z) \exp(-\varphi(z)) {}^*_*$$

задают интегрируемое представление алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ на уровне 2. Перепишите эти формулы при помощи трех (вещественных) фермионов. Сколько представлений получается такой конструкцией?

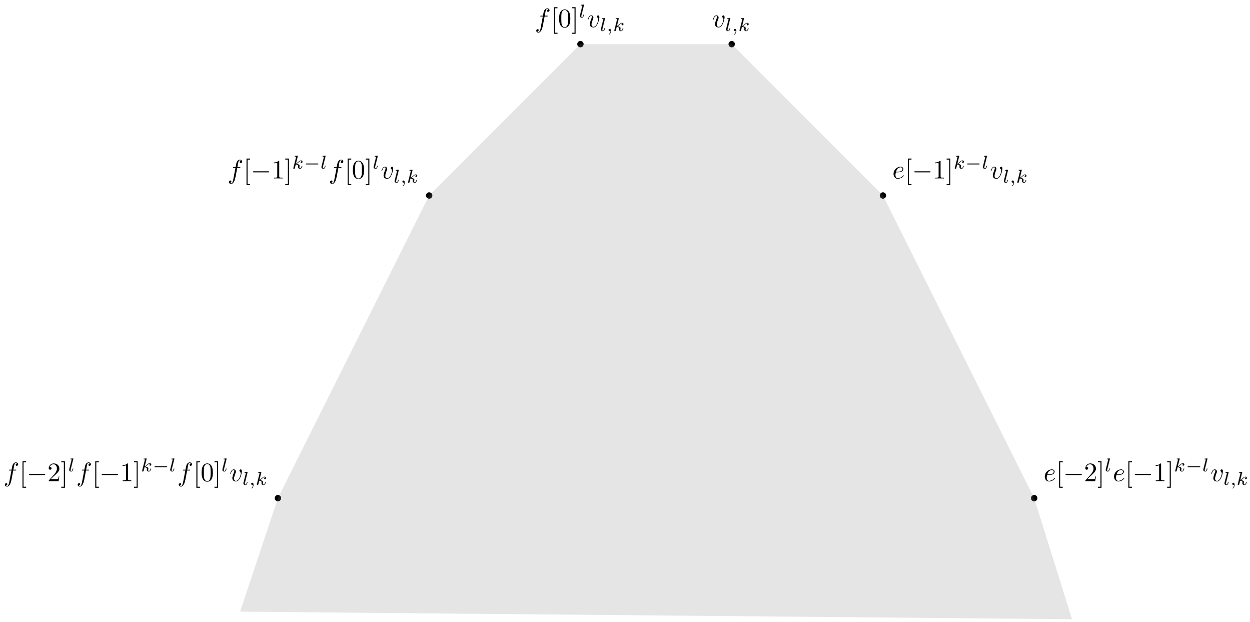

Рис. 1: экстремальные вектора в представлении $L_{l,k}$

Общий модуль Верма $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ имеет размеры как три бозона (свободно порожден тремя токами $e(z), h(z), f(z)$). Размеры интегрируемых представлений меньше, в случае уровня 1 представление построено при помощи 1 бозона, в случае уровня 2 из 1.5 бозонов. Вообще, интегрируемое представление $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ имеет размеры как $\frac{3k}{k+2}$ бозонов.

Другой класс примеров — это так называемые представления вычисления (устоявшегося русского термина нет, иногда еще говорят представления эвалюоации). Пусть V — представление $\mathfrak{g}$, выберем $a \in \mathbb{C}$. Тогда представление $V(a)$ алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ определено тем что элемент x_n действует как xa^n, K действует нулем. Отметим, что нельзя определить действие d на этом пространстве, т.е. это представление не является представлением $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Также это представление не является представлением старшего веса относительно $\widehat{\mathfrak{b}}^+$.

Можно поступить иначе и рассмотреть a как формальный параметр. Тогда пространство представления является множество полиномов Лорана со значениями в V: $V[a, a^{-1}]$. На этом представление d уже действует.

2.3 Токовая реализация

В физической литературе по конформной теории поля алгебру $\widehat{\mathfrak{g}}$ обычно описывают через токи. Сопоставим каждому элементу $J \in \mathfrak{g}$ ток $J(z) = \sum J_n z^{-n-1}$. Если коммутационные соотношения алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеют вид $[J^a, J^b] = \sum f_c^{a,b} J^c$, то в терминах токов мы имеем

$$J^a(z)J^b(w) = k\frac{(J^a, J^b)}{(z-w)^2} + \sum_c f_c^{a,b}\frac{J_c(w)}{z-w} + \text{reg.}\ .$$

Выберем ортонормированный относительно формы Киллинга базис J^a в $\mathfrak{g}$. Формула Сугавары имеет вид

$$T_{\text{Sug}}(z) = \sum L_n z^{-n-2} = \frac{1}{2(k+h^\vee)}\sum_{a\in B} :J^a(z)J^a(z):\ . \tag{2.1}$$

Можно написать формулу через два двойственных базиса как выше мы писали элемент Казимира. Операторы L_n образуют алгебру Вирасоро

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \delta_{n+m}\frac{n^3-n}{12}c,$$

где центральный заряд равен $c = \dfrac{k\dim\mathfrak{g}}{k+h^\vee}$.

Задача 2.3. *а) Найдите значение коммутатора $[L_n, J_k]$ для любого $J \in \mathfrak{g}$.*
б) Найдите значение L_0 на старшем векторе $v_{\lambda,k}$.

3 Пространства конформных блоков

3.1 Коинварианты

Пусть V — представление алгебры Ли $\mathfrak{a}$. Через $V/\mathfrak{a}$ мы будем обозначать пространство коинвариантов — фактор по подпространство состоящему из элементов вида av, $a \in \mathfrak{a}$, $v \in V$.

Пример 3.1. Пусть $\mathfrak{a}$ простая алгебра Ли, V ее неприводимое представление. Тогда $V/\mathfrak{a} = 0$ если V нетривиальное представление и $V/\mathfrak{a} = V$ в случае если V тривиальное.

Задача 3.1. *Докажите, что пространство коинвариантов $V/\mathfrak{a}$ двойственно пространству инвариантов в двойственном пространстве $(V^*)^{\mathfrak{a}}$.*

Предложение 3.1. *Пусть V_1 — какое-то представление алгебры $\mathfrak{a}$, $V_2 = U(\mathfrak{a})\otimes U$ индуцированное представление. Тогда $(V_1 \otimes V_2)/\mathfrak{a} \simeq V_1 \otimes U$*

Доказательство. Пусть $v_1, v_2, \ldots$ базис в V_1, $u_1, u_2, \ldots,$ базис в U, $y_1, y_2 \ldots$ базис в $\mathfrak{a}$. Докажем, что любой элемент $(V_1 \otimes V_2)$ может быть однозначно записан как линейная комбинация элементов вида $y_1^{a_1} \cdot \ldots y_m^{a_m}(v_i \otimes u_j)$.

Это достаточно доказать для базиса в $V_1 \otimes V_2$, т.е. для элементов вида $v_i \otimes y_1^{a_1} \cdot \ldots y_m^{a_m} u_j$. Это делается индукцией по $\sum a_j$. Для векторов вида $v_i \otimes u_j$ это очевидно. Для векторов вида $v_i \otimes y_k u_j$ можно написать:

$$v_i \otimes y_k u_j = y_k(v_i \otimes u_j) - y_k v_i \otimes u_j.$$

Далее
$$v_i \otimes y_l y_k u_j = y_l(v_i \otimes y_k u_j) - y_l v_i \otimes y_k u_j,$$
и далее оба слагаемых преобразуются к нужному виду по предыдущему шагу. И так далее.

В пространстве с базисом $y_1^{a_1} \cdot \ldots y_m^{a_m}(v_i \otimes u_j)$ пространство коинвариантов имеет базис состоящий из (классов) $v_i \otimes u_j$. $\square$

Аналогично доказывается некоторое обобщение этого предложения, которые мы и будем использовать.

Предложение 3.2. *Пусть $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{a}$ две подалгебры в алгебре Ли $\mathfrak{a}$, причем $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2$ как векторное пространство. Пусть V_1 — представление алгебры $\mathfrak{a}$, U — представление алгебры $\mathfrak{a}_1$ $V_2 = U(\mathfrak{a}_2) \otimes U$ индуцированное представление. Тогда $(V \otimes V_2)/\mathfrak{a} \simeq (V_1 \otimes U)/\mathfrak{a}_1$.*

3.2 Пространство конформных блоков через коинварианты

Пусть C риманова поверхность (или комплексная кривая), $p_1, \ldots, p_m$ различные точки на этой кривой.

Через $\mathcal{O}(C - \vec{p})$ мы обозначим алгебру мероморфных функций на C регулярных вне $p_1, \ldots, p_m$. Через $\mathfrak{g}(C - \vec{p}) = \mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}(C - \vec{p})$ мы будем обозначать алгебру Ли мероморфных функций на C регулярных вне $p_1, \ldots, p_m$ со значениями в $\mathfrak{g}$.

Для любого $1 \leq j \leq n$ есть отображение алгебр Ли $\gamma_j \colon \mathfrak{g}(C - \vec{p}) \to \mathfrak{g}[[t, t^{-1}]$ — разложение элемента $x \in \mathfrak{g}(C - \vec{p})$ в ряд в окрестности точки p_j. Отметим, что тут нет центрального расширения.

Центральное расширение можно восстановить учитывая все точки. Через $U(\widehat{\mathfrak{g}})_k$ мы обозначим фактор алгебры $U(\widehat{\mathfrak{g}})$ по идеалу порожденному $K - k$ (здесь K — элемент $\widehat{\mathfrak{g}}$, k — комплексное число). Тогда отображение $\vec{\gamma}$
$$\vec{\gamma} \colon \mathfrak{g}(C - \vec{p}) \to U(\mathfrak{g})_k \otimes \ldots \otimes U(\mathfrak{g})_k, \quad \gamma(x) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j(x).$$
является гомоморфизмом алгебр Ли. Для этого надо проверить, что
$$[\vec{\gamma}(x), \vec{\gamma}(y)] - \vec{\gamma}([x, y]) = 0.$$
Легко видеть, что разница между левой и правой часть равно $k \sum_j \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{p_j}} (x, dy)$, что равно нулю как сумма всех вычетов на кривой.

Теперь можно определить модулярный функтор (другой термин — пространство конформных блоков). Пусть каждой точке p_j сопоставлено представление V_j, обозначим через $V = V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$. Алгебра $\mathfrak{g}(C - \vec{p})$ действует на V посредством отображения $\vec{\gamma}$. Тогда модулярный функтор зависящий от $C, \vec{p}, \vec{V}$ является пространством двойственным к $V/(\mathfrak{g}(C - \vec{p}))$.

Пример 3.2. $\mathbb{CP}^1$, $p_1 = 0$, $V_1 = V_{\lambda,k}$. Тогда $\mathfrak{g}(C-\vec{p}) = \mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t^{-1}] = \mathfrak{g}\oplus\left(\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t^{-1}]t^{-1}\right)$. Так как модуль Вейля $V_{\lambda,k}$ свободно порожден $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t^{-1}]t^{-1}$ с L_λ, то по переложению выше имеем, что пространство конформных блоков двойственно $L_\lambda/\mathfrak{g}$. Согласно примеру выше это равно $\delta_{\lambda,0}$.

Это можно интерпретировать как то, что пространство одноточечных блоков на сфере не равно нулю только в случае единичного оператора, и в этом случае оно одномерно.

Пример 3.3. $\mathbb{CP}^1$, $p_1 = 0, p_2 = \infty$ $V_1 = V_{\lambda_1,k}$, $V_1 = V_{\lambda_2,k}$. В этом случае $\mathfrak{g}(C-\vec{p}) = \mathfrak{g}\otimes[t,t^{-1}]$. Аналогично показывается, что пространство конформных блоков двойственно к $(L_{\lambda_1}\otimes L_{\lambda_2})/\mathfrak{g}$, что опять же по примеру выше равно $\delta_{\lambda_1,\lambda_2^*}$, где звездочка переход к двойственному представлению: $L_{\lambda^*} = L_\lambda^*$.

Обобщением рассуждения из этого примера является следующая лемма.

Лемма 3.3. *Пусть $q\in C$ точка отличная от точек $\vec{p}$. Тогда*

$$(V\otimes V_{\lambda,k})/\mathfrak{g}(C-\vec{p}-q) \simeq (V\otimes L_\lambda)/\mathfrak{g}(C-\vec{p})$$

Доказательство. Воспользуемся следствием из теоремы Римана-Роха:

Теорема 3.4. *Пусть на кривой C рода g отмечены точки $p_1,\ldots,p_n$ и выбраны целые числа $a_1,a_2,\ldots a_n$ такие, что $\sum a_i > 2g-2$. Тогда пространство мероморфных функций имеющих регулярных на $C-\vec{p}$ и имеющих полюса в p_i степени не более a_i равно $\sum a_i - g + 1$.*

Из этого следует, что на кривой C существует мероморфная функция z^{-1} которая имеет полюс в точке q первого порядка и регулярная на $-\vec{p}-q$ (возьмем большие a_i в точках p_i, а потом добавим точку q с $a=1$, тогда размерность пространства функций увеличится ровно на 1, новая функция как раз будет иметь полюс первого порядка в точке q). Таким образом мы получаем, что

$$\mathfrak{g}(C-\vec{p}-q) = \mathfrak{g}(C-\vec{p})\oplus\left(\oplus_{j=1}^{\infty}\mathfrak{g}z^{-j}\right).$$

Применяя предложение выше мы получаем нужный изоморфизм. $\square$

Следствие 3.5. *Если $C=\mathbb{CP}^1$ и $V_i = V_{\lambda_i,k}$, то пространство конформных блоков равно $(L_{\lambda_1^*}\otimes\ldots\otimes L_{\lambda_n^*})^{\mathfrak{g}}$.*

Если какие-то представления еще меньше (скажем интегрируемые), то пространство конформных блоков не увеличится, в частности будет конечномерным.

Это следствие просто доказывается по индукции.

Задача 3.2. *Пусть $C=\mathcal{E}$ кривая рода 1, с одной точкой p_1. точка одна, представление V_1 является модулем Вейля $V_{0,k}$. Докажите, что пространство конформных блоков является бесконечномерным.*

В операторном формализме, (который мы еще вспомним ниже), 1-точка на торе это след оператора соответствующего V_1 в пространстве состояний. Канал конформного блока — это класс неприводимого представления в котором берется след. Бесконечномерность пространства конформных блоков связана с тем, что существует бесконечно много неприводимых представлений (промежуточных каналов) в которых берется след.

Задача 3.3. *Сколько существует интегрируемых представлений $\widehat{\mathfrak{so}}_{2n}$ уровня 1? Постройте их все явно при помощи фермионов. Что у этих представлений на "верхнем уровне"?*

4 Конформные блоки для интегрируемых представлений. Топологические теории

4.1 Конечномерность пространства конформных блоков

В прошлый раз мы обсуждали определение пространства конформных блоков для общего уровня k. В этой лекции если не оговорено обратное $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ и представления V_i интегрируемые.

Теорема 4.1. *Пусть $V_{n+1} = L_{\lambda_{n+1},k}$ интегрируемое представление, $V = \otimes_{j=1}^n V_{\lambda_j,k}$ произведение модулей Вейля, $L = \otimes_{j=1}^n L_{\lambda_j,k}$ произведение интегрируемых представлений. Тогда*

$$(V \otimes L_{\lambda_{n+1},k})/\mathfrak{g}(C - \vec{p} - q) = (L \otimes L_{\lambda_{n+1},k})/\mathfrak{g}(C - \vec{p} - q).$$

Мы не будем доказывать эту теорему. Смысл в том, что если одно интегрируемое, то остальные тоже можно считать интегрируемыми.

Теорема 4.2. *Пусть C, $\vec{p}$ как выше, $V_i = L_{\lambda_i,k}$ интегрируемые представления. Тогда пространства конформных блоков конечномерно.*

Эту размерность мы будем обозначать $N(C, k, \vec{p}, \vec{\lambda})$.

Доказательство. По предыдущей лемме, можно считать, что V_1 интегрируемо, а все остальные V_i есть модули Вейля. Тогда по лемме из прошлой лекции пространство конформных блоков совпадает с $\Big(L_{\lambda_1,k} \otimes L_{\lambda_2} \otimes \ldots \otimes L_{\lambda_n}\Big)/\mathfrak{g}(C - p_1)$. Поскольку тензорное произведение $L_{\lambda_2} \otimes \ldots \otimes L_{\lambda_n}$ конечномерное, то достаточно доказать конечномерность коинвариантов $L_{\lambda_1,k}/\mathfrak{g}(C - p_1)$, т.е. доказать конечномерность пространства одноточечных конформных блоков.

Теперь применим теорему Римана-Роха. Из нее (даже из следствия которое было на прошлой лекции) следует, что существует M, такое, что для любого $N >\geq M$ существует мероморфная функция на C регулярная вне p_1 и имеющая в точке p_1 полюс порядка N. Например можно взять $M = 2g - 1$. Значит алгебра $\mathfrak{g}(C - p_1)$ (точнее ее образ под действием γ_0) содержит подалгебру $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]t^{-M}$. Докажем, что коинварианты уже относительно этой подалгебры конечномерны. На этом пространстве $L^M_{\lambda_1,k} = L_{\lambda_1,k}/\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t^{-1}]t^{-M}$ действует фактор алгебра

$$\mathfrak{n}_M = \mathfrak{n}_- \oplus \left(\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t^{-1}]t^{-1}/(t^{-M})\right).$$

Алгебра $\mathfrak{n}_M$ конечномерная и порождена образующими Шевалле $f_0,\ldots,f_r$.

Теперь нам понадобятся понятия аннулятора модуля для универсальной обертывающей алгебре Ли. В большей общности про это можно почитать например в [4].

Пусть есть конечнопорожденный модуль V над какой-то алгеброй Ли $\mathfrak{a}$. Обозначим порождающие подпрострнаство (конечномерное подпространство содержащее все образующие) через V_0. Введем на пространстве V так называемую PBW фильтрацию: пусть $V_1 = V_0 + \mathfrak{a}V_0$, $V_2 = V_1 + \mathfrak{a}V_1$ и так далее. Другими словами V_i порождено векторами которые получаются из V_0 применением не более i элементов $\mathfrak{a}$.

Присоединенное градуированное пространство мы обозначим $\operatorname{gr} V = \oplus V_i/V_{i-1}$. На нем уже действует не универсальная обертывающая $U(\mathfrak{a})$, а симметрическая алгебра $S(\mathfrak{a})$. Действие определено так: пусть $v\in V_i$, тогда $v+V_{i-1}\in V_i/V_{i-1}$, тогда для любого $x\in\mathfrak{a}$ определим $x(v+V_{i-1}) = xv + V_i \in V_{i+1}/V_i$.

Обозначим через $I\subset S(\mathfrak{a})$ идеал который действует нулем на $\operatorname{gr} V$. Через $\sqrt{I}$ мы обозначим его радикал, множество $f\in S(\mathfrak{a})$ таких, что $f^m\in I$ для некоторого натурального m. Можно доказать, что хотя идеал I может зависеть от выбора начального пространства V_0, но $\sqrt{I}$ уже не зависит.

На алгебре $S(\mathfrak{a})$ есть скобка Пуассона, на образующих она определена как $\{x,y\} = [x,y]$, где $x,y\in\mathfrak{a}$. Если отождествить $S(\mathfrak{a})$ с функциями на $\mathfrak{a}^*$, то это скобка называется скобкой Костанта–Кириллова на $\mathfrak{a}^*$.

Теорема 4.3 (Габбер). *Для любых двух функций $f,g\in\sqrt{I}$ верно $\{f,g\}\in\sqrt{I}$.*

Это непростая теорема и доказывать ее мы не будем. Доказательство написано например в приложении к лекциям 4,5 курса Этингофа [5].

В нашем случае представление $L^M_{\lambda_1,k}$ алгебры $\mathfrak{n}_M$ порождено одним старшим вектором $v_{\lambda_1,k}$. Значит и присоединенное градуированное пространство будет порождено одним вектором, т.е. иметь виде $S(\mathfrak{n}_M)/I$, где идеал I является аннулятором. Из интегрируемости представления $L_{\lambda_1,k}$ следует, что образующие $f_0,\ldots,f_r$ алгебры $\mathfrak{n}_M$ действуют на $v_{\lambda_1,k}$ нильпотентно, поэтому все они будут лежать в $\sqrt{I}$. Тогда, по теореме Габбера получаем, что все алгебра $\mathfrak{n}_M\subset\sqrt{I}$. Обозначим $y_1,\ldots,y_D$ — базис в $\mathfrak{n}_M$, тогда для любого j существует натуральное m_j такое, что $y_j^{m_j}v_{\lambda_1,k} = 0$ в $\operatorname{gr} L^M_{\lambda_1,k}$. Значит вектора вида

$$y_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot y_D^{a_D}v_{\lambda_1,k},\ 0\le a_j < m_j$$

порождают все пространство $\operatorname{gr} L^M_{\lambda_1,k}$, значит, это пространство конечномерно. Отсюда следует, что $L^M_{\lambda_1,k}$ конечномерно. □

Задача 4.1. *Найдите $\sqrt{I}$ для случае простой алгебры $\mathfrak{g}$ и представлений L_λ и M_λ, где λ целочисленный доминантный.*

Задача 4.2. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Вирасоро, V — ее модуль старшего веса (модуль Верма или его фактор). Докажите, что для $\sqrt{I}$ возможны три варианта $(C, L_0, L_1, L_2, \ldots)$; $(L_{-1}.C, L_0, L_1, L_2, \ldots)$; $(\ldots, L_{-2}, L_{-1}, C, L_0, L_1, L_2, \ldots)$.*

Теорема 4.4. *В условиях предыдущей теоремы, размерность пространства конформных блоков не зависит от выбора кривой и точек p_i, то есть $N(C, k, \vec{p}, \vec{\lambda}) = N_{g,n}(k, \vec{\lambda})$.*

Задача 4.3. *а) Найдите по определению размерность пространства конформных блоков для случая $C = \mathcal{E}$ эллиптическая кривая с одной точкой p_1, алгебра $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, $k = 1$ и представление $V_1 = L_{0,1}$.*

б) Попробуйте обобщить результат предыдущего пункта на случай общего $k \in \mathbb{Z}_{>0}$.*

в) Попробуйте обобщить результат предыдущих пунктов на случай произвольной алгебры Ли.

4.2 Топологические теории

Напомним определение топологических теорий по Атье. Под многообразием мы будем понимать гладкое, ориентируемое, компактное многообразие с краем. Через ∂M мы будем обозначать границу многообразия M.

$d+1$-*мерной топологической квантовой теорией поля* называется набор следующий набор данных.

а) d-мерному многообразию N без края сопоставляется конечномерное векторное пространство $Z(N)$.

б) $d+1$-мерному многообразию M сопоставляется вектор $Z(M) \in Z(\partial M)$.

в) Для любого гомеоморфизма $f\colon N \to N'$ есть изоморфизм $f_*\colon Z(N) \to Z(N')$.

г) Функториальные изоморфизмы $Z(\bar{N}) \simeq Z(N)^*$, $Z(\varnothing) \simeq \mathbb{C}$, $Z(N_1 \sqcup N_2) \simeq Z(N_1) \otimes Z(N_2)$, где $\bar{N}$ обозначает многообразие с обращенной ориентацией, $\sqcup$ обозначает несвязное объединение.

Эти данные должны удовлетворять набору аксиом:

1. Для гомеоморфизма $d+1$ мерных многообразий $f\colon M \to M'$ мы имеем
$$Z(M') = (f\Big|_{\partial M})_* Z(M).$$

2. (Склейка) Пусть $\partial M = N_1 \sqcup N_2 \sqcup N_3$, и $f\colon N_3 \to \bar{N}_2$ гомеоморфизм, $M' = M/f$ многообразие полученное из M склейкой N_2 и N_3. Тогда $Z(M')$ равно образу $Z(M)$ под действием композиции
$$Z(N_1) \otimes Z(N_2) \otimes Z(N_3) \xrightarrow{id \otimes f} Z(N_1) \otimes Z(N_2) \otimes Z(N_2)^* \to Z(N_1).$$

3. Пусть $I = [0,1]$ отрезок, тогда $Z(N \times I) = id \in Z(N) \otimes Z(N)^*$.

Замечание 4.1. Из этих аксиом легко следует, что $Z(S^1 \times N) = \dim Z(N)$. Для этого в частности нужна конечномерность $Z(N)$.

Замечание 4.2. О $d+1$-мерном многообразии M можно думать как о эволюции d-мерного многообразия: есть какое-то многообразие N_0 при времени $t = 0$, потом что-то происходит, и в момент времени $t = 1$ у нас другое многообразие N_1. Тогда $\partial M = \bar{N}_0 \sqcup N_1$ и $Z(M)$ может рассматриваться как отображение из $Z(N_0)$ в $Z(N_1)$.

Таким образом, $Z(N)$ может рассматриваться как (гильбертово) пространство состояний системы. Причем, так как $Z(N \times I) = id$, то гамильтониан системы тривиален $H = 0$. Но сама теория может быть нетривиальной, то есть лагранжиан $L \neq 0$.

Задача 4.4. *Докажите, что если $f, g\colon N_1 \to N_2$ два изотопных гомеоморфизма, то отображения $f_*, g_*\colon Z(N_1) \to Z(N_2)$ совпадают.*

Эта задача в частности говорит, что пространство $Z(N)$ является представлением группы классов отображений.

Сейчас мы будем говорит о частном случае — $d = 1$, т.е. двумерной топологической теории поля. Тогда N одномерное, единственное связное компактное одномерное многообразие это окружность, обозначим $R = Z(S^1)$.

Теорема 4.5. *Двумерная топологическая теория поля задается структурой коммутативной, ассоциативной алгебры со скалярным произведением на пространстве R.*

Такие алгебры еще называют фробениусовыми алгебрами.

Схема доказательства. Так как $\bar{S}^1 \simeq S^1$, то мы получаем изоморфизм между R и R^* который и задает скалярное произведение. Умножение на R происходит из сферы с тремя дырками (штанов). Коммутативность следует из того, что есть гомеоморфизм сферы переставляющий дырки, ассоциативность следует из эквивалентности двух разрезаний сферы с четырьмя дырками на две пары штанов.

Обратно, любое двумерное многообразие с краем можно разрезать на диски, цилиндры и штаны. Дальше доказывается, что любые два таких разрезания переводятся друг в друга элементарными преобразованиями. □

Каждой поверхности рода g с n дырками соответствует отображение $N_g\colon R^{\otimes n} \to \mathbb{C}$. Если выбрать в R базис $v_1, \ldots, v_N$, то для любых $1 \leq j_1, \ldots, j_n \leq N$ мы получаем число $N_g(i_1, \ldots, i_n)$. Эти числа, конечно, содержат всю информацию о топологической теории поля.

Обычно считается, что в теории есть единичное поле $1 \in R$, обладающее свойством, что добавление одной дырки в которой расположена единица не меняет значение N_g. Обозначим через $\epsilon\colon R \to \mathbb{C}$ отображение соответствующее сфере с одной дыркой. Тогда скалярное произведение переписывается через умножение и ϵ, а именно $(x, y) = \epsilon(xy)$.

Следующая теорема является частным случаем утверждения: по двумерной конформной теории поля можно построить двумерную топологическую теорию поля. Так как мы работает для теорий с симметрией аффинная алгебра Ли, то для них мы и формулируем.

Теорема 4.6. *Числа $N_{g,n}(k,\vec{\lambda})$ определенные в Теореме 4.4 задают двумерную топологическую теорию поля.*

В качестве базиса в R (т.е. того, что нумерует индексы у N) в данном случае выступают $[\lambda]$, где $\lambda \in P_k^+$. Кольцо R в данном случае называется кольцом (или алгеброй) Верлинде.

Пример 4.3. Посмотрим, что будет в случае общего уровня k. Тогда в качестве R можно взять пространство с базисом $[\lambda]$, где $[\lambda] \in P^+$. На кривых большого рода топологическая теория определена не будет, но в роде ноль все хорошо.

Пространства конформных блоков на сфере мы вычисляли на прошлой лекции. Спаривание $N_0(\lambda,\mu) = \delta_{\lambda,\mu^*}$, где $L_{\mu^*} = L_\mu^*$ двойственное представление. Трехточка $N_0(\lambda,\mu,\nu^*)$ имеет такие же размерности как размерность $\mathfrak{g}$ инвариантов в $L_\lambda \otimes L_\mu \otimes L_{\nu^*}$, что равно кратности вхождения L_μ в $L_\lambda \otimes L_\mu$. Т.е. структурные константы R есть коэффициенты Клебша-Гордона из (1.4). Таким образом R есть кольцо характеров конечномерных представлений $\mathfrak{g}$.

Отображение ϵ имеет вид $\epsilon([\lambda]) = \delta_{\lambda,0}$.

5 Вычисление алгебры Верлинде

5.1 Сравнение с операторным подходом к конформным блокам

Подход к конформным блокам при помощи коинвариантов является одним из математических. Другой способ, хорошо работающий в роде 0 и 1 основан на сплетающих операторах и операторном разложении.

Пусть есть конечномерное представление L_λ, выберем в нем базис u_j, и пусть действие алгебры Ли в этом базисе задано формулой $J^a u_j = f_j^{a,j'} u_{j'}$. Каждому вектору u_j отвечает примарное поле $\Phi_{j,\lambda}$ с операторным произведением

$$J^a(z)\Phi_\lambda^j(w) = -\sum f_{j'}^{a,j} \frac{\Phi_\lambda^{j'}(w)}{z-w} + {:}J^a(z)\Phi_\lambda^j(w){:}. \tag{5.1}$$

Здесь использовано понятие нормального упорядочения токов (формальный рядов со значением в операторах). Для токов $A(z) = \sum A_{(-n-1)} z^n$, $B(w) = \sum B_{(-m-1)} w^m$ оно равно

$${:}A(z)B(w){:} = A(z)_+ B(w) + B(w)A(z)_-,$$

где $A(z)_+ = \sum_{n\geq 0} A_{(-n-1)} z^n$, $A(z)_- = \sum_{n<0} A_{(-n-1)} z^n$. Нормальное упорядочение является регулярным при $z = w$ (при условии гладкости токов $A(z)$ и $B(w)$).

Сингулярная часть в формуле (5.1) берется из соответствия между операторами и состояниями, поля Φ^j соответствуют векторам u^j рассматриваемым как старшие векторам в верху модуля Вейля $V_{\lambda*,k}$. Тогда $J^a(z)u^j = -\frac{1}{z}\sum f^{a,j}_{j'}u^{j'}$+регулярные члены, напомним, что $J^a(z) = \sum J^a[n]z^{-n-1}$ и $\lambda*$ — старший вес представления L^*_λ двойственного к L_λ.

Задача 5.1. *Рассмотрим сплетающий оператор $\Phi_\lambda(w)\colon V_1 \to V_2 \otimes L_\lambda(w)$, здесь $L_\lambda(w)$ — представление вычисления см. параграф 2.2. Используя базис в пространстве L_λ запишем оператор в виде*

$$\Phi_\lambda(w)v = \sum \Phi^j_\lambda(w)v \otimes u_j \quad \text{или } \Phi_\lambda v = \sum \Phi^j_\lambda[k]v \otimes u_j w^k,$$

вторая формула имеет смысл если w это формальный параметр представления. Докажите, что $\Phi^j_\lambda(w)$ удовлетворяют операторному разложению (5.1).

Задача 5.2. *Пусть $C = \mathbb{CP}^1$, $p_1 = 0$, $p_m = \infty$, $V_i = V_{\lambda_i,k}$ — модули Вейля $1 < i < m$ (на V_1 и V_m условий не налагается). Тогда пространство коинвариантов двойственно пространству сплетающих операторов*

$$V_1 \to L^*_{\lambda_2}(p_2) \otimes \ldots \otimes L^*_{\lambda_{m-1}}(p_{m-1}) \otimes (V'_m)^* \tag{5.2}$$

Здесь $L_\mu(z)$ это представления вычисления построенные по неприводимым представлениям L_μ

Здесь V^* обозначает двойственное представление, а V' обозначает представление в котором действие генераторов $x[n]$ заменено на $x[-n]$, K на $-K$. Отметим, что представление $(V')^*$ имеет тот же центральный заряд k, что и исходное V.

Указание. Используя Лемму 3.3 пространство коинвариантов сводится к

$$(V_1 \otimes L_{\lambda_2}(p_2) \otimes \ldots \otimes L_{\lambda_{m-1}}(p_{m-1}) \otimes V'_m)/(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]).$$

Это пространство двойственно пространству сплетающих отображений (в духе задачи 3.1).

5.2 Вычисление алгебры Верлинде для случая $\mathfrak{sl}_2$

Предложение 5.1. *Пусть $C = \mathbb{CP}^1$. Тогда пространство конформных блоков двойственно*

$$(L_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes L_{\lambda_m})/(\mathfrak{g} + T^{k+1}), \tag{5.3}$$

где T оператор действующий по формуле

$$T(v_1 \otimes \ldots \otimes v_j \otimes \ldots \otimes v_m) = \sum_{j=1}^m p_j^{-1} v_1 \otimes \ldots \otimes f_\theta v_j \otimes \ldots \otimes v_m.$$

Доказательство. Пусть все точки p_i отличны от нуля. Добавим в точку ноль единичное поле и перепишем пространство коинвариантов используя теорему 4.1 и лемму 3.3:

$$\Big(L_{\lambda_1,k}\otimes\ldots\otimes L_{\lambda_m,k}\Big)/(\mathfrak{g}(C-\vec{p}))=\Big(V_{0,k}\otimes L_{\lambda_1,k}\otimes\ldots\otimes L_{\lambda_m,k}\Big)/(\mathfrak{g}(C-\vec{p}-0))$$
$$=\Big(L_{0,k}\otimes L_{\lambda_1,k}\otimes\ldots\otimes L_{\lambda_m,k}\Big)/(\mathfrak{g}(C-\vec{p}-0))=\Big(L_{0,k}\otimes V_{\lambda_1,k}\otimes\ldots\otimes V_{\lambda_m,k}\Big)/(\mathfrak{g}(C-\vec{p}-0))$$
$$=\Big(L_{0,k}\otimes L_{\lambda_1}\otimes\ldots\otimes L_{\lambda_m}\Big)/(\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[z^{-1}]) \quad (5.4)$$

Теперь заметим, что как $(\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[z^{-1}])$ модуль $L_{0,k}$ есть $U((\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[z^{-1}]))/(\mathfrak{g},e_\theta[-1]^k)$ (напомним, что $e_\theta[-1]=f_0$ — генератор соответствующий дополнительному корню, здесь мы используем интегрируемость представления). Отсюда следует утверждение теоремы, оператор T как раз соответствует аффинному корню $e_\theta[-1]^k$). □

В терминах операторного формализма это можно переговорить следующим образом. Конформные блоки соответствуют матричным элементам вида $\langle\varnothing|\Phi_{\lambda_1}(p_1)\cdots\Phi_{\lambda_m}(p_m)|\varnothing\rangle$. Условие факторизациии по образу T^k происходит из того, что $e_\theta[-1]^k|\varnothing\rangle=0$ — зануление сингулярного вектора.

В принципе вычисление пространства (5.3) уже является задачей про обычные, конечномерные алгебры Ли. Для того, чтобы описать ответ как алгебру Верлинде, надо, прежде всего, найти трехточку $N_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}$.

Предложение 5.2. *Пусть $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$, $\lambda_i=l_i$. Тогда $N_{l_1,l_2,l_3}=1$ если $l_1+l_2+l_3=2l$ четно, $l_i\le l$ и $l\le k$, $N_{l_1,l_2,l_3}=0$ иначе.*

Доказательство. Нам нужно найти размерность пространства коинвариантов (5.3). Удобнее перейти к двойственному пространству, так представления $\mathfrak{sl}_2$ самодвойственны то, надо найти размерность пространства $\mathfrak{sl}_2$ инвариантов в $L_{l_1}\otimes L_{l_2}\otimes L_{l_3}$ которые зануляются оператором T^k.

Наличие $\mathfrak{sl}_2$ инварианта в тензорном произведении $L_{l_1}\otimes L_{l_2}\otimes L_{l_3}$ равносильно существованию вложения $L_{l_3}\subset L_{l_1}\otimes L_{l_2}$. Такое вложение существует, если выполнено условие Клебша-Гордана, а именно $l_1+l_2+l_3=2l$ четно, $l_i\le l$. При этих условиях вложение единственно с точностью до умножения на число.

Соответствующий инвариантный элемент в $L_{l_1}\otimes L_{l_2}\otimes L_{l_3}$ можно предъявить явно. А именно, отождествим пространство L_{l_1} с пространством однородных многочленов степени l_1 от переменных x_1,y_1. Генераторы e,h,f действуют на этом пространстве по стандартным формулам:

$$e=x_1\frac{\partial}{\partial y_1},\quad h=x_1\frac{\partial}{\partial x_1}-y_1\frac{\partial}{\partial y_1},\quad f=y_1\frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Аналогично пространства L_{l_2} и L_{l_3} отождествятся с пространствами однородных многочленов от переменных x_2,y_2 и x_3,y_3 степеней l_2 и l_3 соответственно. Тензорное произведение $L_{l_1}\otimes L_{l_2}\otimes L_{l_3}$ тогда отождествляется с пространством однородных многочленов от переменных x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3. При выполнении условия Клебша-Гордона инвариантный элемент единственен и с точностью до скаляра равен

$$P(x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3)=(x_1y_2-x_2y_1)^{l-l_3}(x_1y_3-x_3y_1)^{l-l_2}(x_2y_3-x_3y_2)^{l-l_1}.$$

Видно, что в конструкции P явно используется и целочисленность l и неравенства $l_i \le l$. Инвариантность следует из того, что каждый множитель вида $x_i y_j - x_j y_i$ является инвариантным относительно диагонального действия $\mathfrak{sl}_2$.

Теперь подействуем на многочлен P оператором $T^k = (\sum z_i x_i \frac{\partial}{\partial y_i})^k$. Если $k > l$ то так как каждое слагаемое в T заменяет одну букву y на букву x, а всего степень по y у многочлена P равна l, мы получаем, что $T^k P = 0$. Если же $k \le l$ то мы получаем ненулевой многочлен (здесь еще важно, что коэффициенты z_i различны). $\square$

Из этого предложения следует явное описание умножения в кольце Верлинде. Напомним (см. конец параграфа 4.2), что базис в кольце нумеруется интегрируемыми представлениям. В данном случае мы его обозначаем через $[l]$, $0 \le l \le k$, тогда умножение имеет вид

$$[l_1] \cdot [l_2] = \sum_{|l_1 - l_2| \le l_3 \le \min(l_1+l_2, 2k-l_1-l_2), \quad l_3 \equiv l_1 + l_2 \bmod 2)} [l_3] \tag{5.5}$$

В принципе это уже дает полное описание алгебры, но в следующем параграфе мы обсудим немного другой способ смотреть на нее.

Задача 5.3 (*). *Используя алгебру Верлинде найдите размерность пространства одноточечных $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ конформных блоков на торе с одной отмеченной точкой представление в которой равно $L_{l,k}$.*

5.3 Спектр алгебры Верлинде $\mathfrak{sl}_2$

Обозначим алгебру Верлинде для $\mathfrak{sl}_2$ на уровне k через $R_k(\mathfrak{sl}_2)$, через $R(\mathfrak{sl}_2)$ обозначим кольцо всех представлений алгебры $\mathfrak{sl}_2$ (см. пример 4.3).

Предложение 5.3. *Алгебра $R_k(\mathfrak{sl}_2)$ является фактором алгебры $R(\mathfrak{sl}_2)$ по соотношению $[k+1] = 0$.*

Доказательство. В алгебре $R(\mathfrak{sl}_2)$ верно $[1] \cdot [l] = [l-1] + [l+1]$ при любом $l \ge 1$, поэтому $R(\mathfrak{sl}_2)$ свободно порождено $[1]$.

С другой стороны это соотношение выполняется только при $l < k$. Из этого следует, что все $[l]$, $l \le k$ можно выразить через $[1]$. Из этого следует, что естественное отображение из $R(\mathfrak{sl}_2)$ в $R_k(\mathfrak{sl}_2)$ переводящее $[1]$ в $[1]$ является сюръекцией. Так как в образе $[1] \cdot [k] = [k-1]$ (по формуле (5.5)), то ядро порождено $[k+1]$. $\square$

Задача 5.4. *Найдите образ произвольного $[l] \in R(\mathfrak{sl}_2)$ при этом отображении.*

Мы хотим интерпретировать $R_k(\mathfrak{sl}_2)$ как алгебру функций на некотором конечном множестве. При этом алгебру $R(\mathfrak{sl}_2)$ можно отождествить с алгеброй характеров $\mathfrak{sl}_2$, напомним, что характеры можно вычислять на диагональных матрицах $\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$ и характер $l{+}1$-мерного представления равен $\chi_l(\varphi) = \dfrac{e^{i(l+1)\varphi} - e^{-i(l+1)\varphi}}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}$. Можно записать этот характер и через тригонометрию как $\chi_l(\varphi) = \dfrac{\sin(l+1)\varphi}{\sin\varphi}$.

Нам нужны точки φ такие, что выполнено условие $\chi_{k+1}(\varphi) = 0$, на таких точках алгебра $R(\mathfrak{sl}_2)$ факторизуется до $R_k(\mathfrak{sl}_2)$. Это условие верно при $\varphi = \pm\frac{(m+1)\pi}{(k+2)}$, где $0 \le m \le k$. Поскольку матрицы соответствующие φ и $-\varphi$ сопряжены, то значение характеров на таких точках всегда будет одинаково. Поэтому достаточно ограничится $\varphi = \frac{(m+1)\pi}{(k+2)}$, где $0 \le m \le k$.

Теорема 5.4. *Алгебра $R_k(\mathfrak{sl}_2)$ изоморфна алгебре функций на множестве точек $\{\frac{(m+1)\pi}{(k+2)} | 0 \le m \le k\}$. Элемент $[l] \in R_k(\mathfrak{sl}_2)$ при этом изоморфизме переходит в χ_l.*

Доказательство. Выше мы показали, что отображение $[l] \mapsto \chi_l$ задает гомоморфизм. Докажем, что он является сюръективным. В пространстве функций на множестве $\{\frac{(m+1)\pi}{2(k+2)} | 0 \le m \le k\}$ есть естественный базис дельта функций

$$\delta_m\left(\frac{(m'+1)\pi i}{(k+2)}\right) = \delta_{m,m'}, \quad 0 \le m, m' \le k.$$

Разложим характеры по этому базису:

$$\chi_l = \sum_{m=0}^{k} \left(\frac{e^{\frac{i(l+1)(m+1)\pi}{(k+2)}} - e^{\frac{i(l+1)(m+1)\pi}{(k+2)}}}{e^{\frac{i(m+1)\pi}{(k+2)}} - e^{\frac{i(m+1)\pi}{(k+2)}}} \right) \delta_m. \tag{5.6}$$

Нам достаточно показать, что матрица переход от χ_l к δ_m невырожденная. Знаменатели в формуле (5.6) не зависят от l, поэтому достаточно смотреть на невырожденность матрицы из числителей. Образуем из них матрицу S:

$$S_{l,m} = \sqrt{\frac{2}{k+2}} \sin(\frac{(l+1)(m+1)\pi}{k+2}). \tag{5.7}$$

Нормировка $\sqrt{\frac{2}{k+2}}$ перед матрицей (и еще $2i$ в знаменателе синуса) опять же не существенны для вопроса невырожденности, но удобны, как мы увидим ниже. Вообще, нам эта матрица S понадобится и за пределами данного доказательства.

Заметим, во первых, что матрица S является симметричной. Докажем теперь, что S является ортогональной, т.е. $S^2 = 1$. Из этого, конечно, будет следовать невырожденность S. Действительно

$$\sum_{m=0}^{k} S_{l,m} S_{l',m} = \frac{1}{2} \sum_{m=-k-2}^{k+1} S_{l,m} S_{l',m} =$$
$$= \frac{1}{4(k+2)} \sum_{m=-k-2}^{k+1} \left(e^{\frac{i(l-l')(m+1)\pi}{(k+2)}} + e^{\frac{i(l'-l)(m+1)\pi}{(k+2)}} - e^{\frac{i(l+l'+2)(m+1)\pi}{(k+2)}} - e^{\frac{i(-l'-l-2)(m+1)\pi}{(k+2)}} \right) =$$
$$= \frac{1}{4(k+2)} \left(2(k+2)\delta_{l,l'} + 2(k+2)\delta_{l,l'} \right) = \delta_{l,l'}.$$

Здесь мы сначала воспользовались тем, что $S_{l,m}$ можно считать определенным при любых m, но $S_{l,-m-2} = -S_{l,m}$ и $S_{l,k+1} = S_{l,-1} = 0$. Далее мы воспользовались тем, что сумма корней из единицы $\sum_{m=-k-2}^{k+1} e^{\frac{ia(m+1)\pi}{(k+2)}}$ равна $2(k+2)$ при a кратном $2(k+2)$ и нулю иначе. $\square$

Следствием последней теоремы является то, что в алгебре $R_k(\mathfrak{sl}_2)$ появляется новый базис состоящий из дельта функций δ_m.

Замечание 5.1. На самом деле можно доказать, что алгебра Верлинде для любой рациональной конформной теории изоморфна алгебре функций на конечном множестве точек.

Вспомним теперь, что на алгебре $R_k(\mathfrak{sl}_2)$ есть скалярное произведение, а именно $([l],[l'])=\delta_{l,l'}$ (так ка любое конечномерное представление $\mathfrak{sl}_2$ изоморфно двойственному). Это скалярное произведение можно переписать как в параграфе 4.2 через отображение $\epsilon\colon R_k(\mathfrak{sl}_2)\to\mathbb{C}$ по формуле

$$([l],[l'])=\epsilon([l]\cdot[l']),\ \text{где } \epsilon([l])=\delta_{l,0}.$$

Помимо базиса δ_m будем также рассматривать базис $\tilde{\delta}_m$ связанный с $[l]$ по формуле

$$[l]=\sum_{m=0}^{k} S_{l,m}\tilde{\delta}_m. \tag{5.8}$$

Тогда по формуле (5.6) имеем

$$\delta_m=\sqrt{\frac{2}{k+2}}\sin(\frac{(m+1)\pi}{k+2})\tilde{\delta}_m=S_{0,m}\tilde{\delta}_m. \tag{5.9}$$

Так как базис $[l]$ является ортонормированным и матрица S ортогональна, то базис $\tilde{\delta}_m$ также является ортонормированным. Так как $S^{-1}=S$, то

$$\tilde{\delta}_m=\sum_{l=0}^{k} S_{l,m}[l]. \tag{5.10}$$

В частности из этого следует, что $\epsilon(\tilde{\delta}_m)=S_{0,m}$. Базис δ_m, в свою очередь, удобен тем, что в нем легко умножать — разные дельта функции в произведении дают ноль и $\delta_m\cdot\delta_m=\delta_m$.

Найдем теперь явную формулу для структурных констант алгебры в базисе $[l]$. Точнее говоря новую формулу, отличную от доказанной в предложении 5.2. Имеем

$$N_{l_1,l_2,l_3}=([l_1]\cdot[l_2],[l_3])=\epsilon\Big([l_1]\cdot[l_2]\cdot[l_3]\Big)=\epsilon\Big(\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{k}\frac{S_{l_1,m_1}}{S_{0,m_1}}\delta_{m_1}\frac{S_{l_2,m_2}}{S_{0,m_2}}\delta_{m_2}\frac{S_{l_3,m_3}}{S_{0,m_3}}\delta_{m_3}\Big)=$$
$$=\epsilon\Big(\sum_{m=0}^{k}\frac{S_{l_1,m}S_{l_2,m}S_{l_3,m}}{S_{0,m}^3}\delta_m\Big)=\sum_{m=0}^{k}\frac{S_{l_1,m}S_{l_2,m}S_{l_3,m}}{S_{0,m}}. \tag{5.11}$$

Эта формула называется формулой Верлинде.

Другая формула Верлинде выражает размерность N_g — пространства конформных блоков на поверхности рода g без дырок. Это определено при $g \geq 2$ и вычисляется при помощи аксиом топологической теории. А именно, поверхность рода g может быть разрезана на $2g-2$ штанов (сфер с тремя дырками). Для этого нужно сделать $3g-3$ разрезов по окружностям. Для каждых штанов Σ_k обозначим через a_k, b_k, c_k соответствующие граничные окружности (может статься, что какие-то из этих окружностей совпадают — штаны склеены по штанинам). Так как мы знаем чему равно любое $N_0[l_1],[l_2],[l_3]] = N_{l_1,l_2,l_3} = \epsilon([l_1]\cdot[l_2]\cdot[l_3])$, то по аксиоме склейки N_g находится суммированием по всем возможным значениям l_i на окружностях разреза:

$$N_g = \sum_{l_1,\dots,l_{3g-3}=0}^{k} \prod_{k=1}^{2g-2} \epsilon\Big([l_{a_k}]\cdot[l_{b_k}]\cdot[l_{c_k}]\Big). \tag{5.12}$$

Но имея другой ортогональный базис $\tilde{\delta}_m$ гораздо удобнее расставлять эти элементы на граничных окружностях. Тогда

$$N_g = \sum_{m_1,\dots,m_{3g-3}=0}^{k} \prod_{k=1}^{2g-2} \epsilon\Big(\tilde{\delta}_{m_{a_k}}\cdot\tilde{\delta}_{m_{b_k}}\cdot\tilde{\delta}_{m_{c_k}}\Big) = \sum_{m=0}^{k} \epsilon\big(\tilde{\delta}_m\cdot\tilde{\delta}_m\cdot\tilde{\delta}_m\big)^{2g-2} =$$
$$= \sum_{m=0}^{k}\Big(S_{0,m}^{-3}\epsilon\big(\delta_m\cdot\delta_m\cdot\delta_m\big)\Big)^{2g-2} = \sum_{m=0}^{k} S_{0,m}^{2-2g}. \tag{5.13}$$

Заметим, что из этой формулы не очевидно что $N_g \in \mathbb{Z}$, что было ясно выше.

Задача 5.5 (*). *([7]) Докажите, что N_g является полиномом от k степени $3g-3$.*

Причина этого в том что N_g на самом деле является размерностью пространства сечений некоторого линейного расслоения $\mathcal{L}^k$ на некотором многообразии модулей, а эта размерность должна считаться по теореме Римана-Роха.

Задача 5.6 (*). *Матрица S связана с действием группы $SL(2,\mathbb{Z})$ на пространстве $R_k(\mathfrak{sl}_2)$. А именно, определим матрицу $(T_{l,m}) = \left(\exp\Big(2\pi i\big(\frac{l(l+2)}{4(k+2)} - \frac{3k}{24(k+2)}\big)\Big)\delta_{l,m}\right)$. Тогда $(ST)^3 = 1$, то есть матрицы S, T порождают представление $PSL(2,\mathbb{Z})$.*

Указание. Удобно проверять соотношение в виде $(ST)^2 = (ST)^{-1}$. При вычислении может пригодится формула для гауссовой суммы.

5.4 Обобщение на случай других алгебр Ли

Проговорим схематично как обобщаются результаты прошлых двух параграфов на случай произвольной $\mathfrak{g}$, прежде всего концентрируясь на случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$. Будем обозначать алгебру Верлинде на уровне k через $R_k(\mathfrak{g})$, через $R(\mathfrak{g})$ обозначим кольцо всех представлений алгебры $\mathfrak{g}$ (см. пример 4.3).

Элемент f_θ (который встречался в предложении 5.1) вкладывается в $\mathfrak{sl}_2$ тройку e_θ, h_θ, f_θ. Эта подалгебра называется *главной* $\mathfrak{sl}_2$ подалгеброй. Любое представление L_λ

разлагается в сумму $\oplus L^p_\lambda$, по неприводимым $p+1$ мерным представлениям главной $\mathfrak{sl}_2$ подалгебры, при этом встречаются только p удовлетворяющие неравенствам $0 \leq p \leq (\lambda, \theta^\vee)$, возможно с кратностями.

Удобно сразу формулировать ответ в терминах пространства двойственного к (5.3). Следующее предложение следует из предложений 5.1 и 5.2.

Предложение 5.5. *Пространство трехточечных конформых блоков на сфере изоморфно пространству $\mathfrak{g}$ инвариантных отображений из $L_{\lambda_1} \otimes L_{\lambda_2} \otimes L_{\lambda_3}$ которые зануляются на всех произведениях изотипических компонент $L^{(p_1)}_{\lambda_1} \otimes L^{(p_2)}_{\lambda_2} \otimes L^{(p_3)}_{\lambda_2}$ таких, что $p_1+p_2+p_3 > 2k$.*

Замечание 5.2. Отметим, что по условию Клебша-Гордона этот инвариант может не занулятся только в случае четного $p_1+p_2+p_3$, то есть условие в предложение на самом деле означает $p_1+p_2+p_3 \geq 2k+2$.

Перейдем теперь к случаю $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$. Напомним, что представления $\mathfrak{sl}_n$ нумеруются диаграммами Юнга из $n-1$ строк $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_{n-1})$.[1]. Скалярное произведение $(\lambda, \theta^\vee)$ равняется λ_1. Условие, что $\lambda \in P^+_k$ превращается в $\lambda_1 \leq k$.

Задача 5.7. *Сколько существует интегрируемых представлений $\mathfrak{sl}_n$ на уровне k?*

Как мы уже говорили в лекции 1 тензорное произведение произвольных представлений это довольно сложно, но все упрощается если ограничиться строками или столбцами. Фундаментальные веса ω_j соответствуют диаграммам $(1)^j$, то есть столбцам длины j . Умножение на $[\omega_j]$ в кольце $R(\mathfrak{g})$ задается формулами Пиери умножения на e_j (1.5), с одной разницей, что теперь мы хотим чтобы в правой части стояли только диаграммы из не более чем $n-1$ строки. Поэтому если при добавлении j клеточек получилась диаграмма получилась диаграмма из n строк, то мы вычитаем из всех длин строк λ_n (так как у нас $\mathfrak{sl}_n$, а не $\mathfrak{gl}_n$), а если получилась диаграмма из более чем n строк, то мы ее просто выкидываем. Например:

$$[(1)] \cdot [(1)^{n-1}] = [(2, 1^{n-2})] + [(1)^n] = [(2, 1^{n-2})] + [\varnothing].$$

Заметим, что согласно правилу Пиери при умножении на $[\omega_j]$ число λ_1 увеличивается не более чем на 1.

Теорема 5.6. *а) Умножение на $[\omega_j]$ в кольце $R_k(\mathfrak{g})$ задается той же формулой, что и умножение в кольце $R(\mathfrak{g})$ где выброшены все диаграммы с $\lambda_1 > k$.*
б) Алгебра $R_k(\mathfrak{g})$ порождена $[\omega_j]$.
в) Ядро отображения из $R(\mathfrak{sl}_n)$ в $R_k(\mathfrak{sl}_n)$ порождено $[\lambda]$ такими, что $\lambda_1 = k+1$.

Теорема 5.6 является аналогом предложения 5.3 выше.

[1]Здесь λ_i обозначает не старший вес, а число, длину строки в диаграмме Юнга, это не должно привести к недоразумению

Доказательство. Пункты б) и в) теоремы следуют из пункта а). Доказательство пункта а) следует из предложения 5.5. А именно, заметим, что условие на p_i в этом случае никак не играет, так как значение p_1 соответствующее представлению ω не превышают 1, а значение p_2, p_3 соответствующие двум другим весам из P_k^+ не превышают k, поэтому $p_1 + p_2 + p_3 < 2k + 2$. □

Следующая задача — это описать алгебру $R_k(\mathfrak{g})$ как алгебру функций на конечном множестве. Алгебру $R(\mathfrak{g})$ можно рассматривать как алгебру характеров, каждому $[\lambda]$ отвечает функция на множестве $\{(x_1, \ldots, x_n) | \prod x_j = 1\}$ равная полиному Шура $s_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$, см. формулу 1.3. По теореме 5.6 нам нужно найти точки $(x_1, \ldots, x_n)$ такие, что $s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = 0$ при $\lambda_1 = k + 1$.

Пример 5.3. Рассмотрим $\mathfrak{sl}_3$ на уровне 1. Тогда на (x_1, x_2, x_3) возникают такие условия:

$$\begin{cases} x_1x_2x_3 = 1 \\ s_{(2)}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 = 0 \\ s_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - x_1x_2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы уравнений (с точностью до перестановки) имеют вид

$$(e^{\frac{5}{12}i\pi}, e^{\frac{-1}{12}i\pi}, e^{\frac{-4}{12}i\pi}), \quad (e^{\frac{3}{12}i\pi}, e^{\frac{0}{12}i\pi}, e^{\frac{-3}{12}i\pi}), \quad (e^{\frac{4}{12}i\pi}, e^{\frac{1}{12}i\pi}, e^{\frac{-5}{12}i\pi}).$$

В общем случае легко понять, что при выполнении условий

$$x_1^{n+k} = x_2^{n+k} = \ldots = x_n^{n+k}, \quad \prod x_j = 1, \quad \prod_{j<j'} (x_j - x_{j'}) \neq 0. \tag{5.14}$$

верно $s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = 0$ при $\lambda_1 = k+1$. В самом деле, так как все x_j различны,то достаточно проверить зануление числителя в формуле (1.3). Все слагаемые в числителе разбиваются на пары $x_{j_1}^{\lambda_1+n-1} x_{j_2}^{\lambda_2+n-2} \cdots x_{j_n}^{\lambda_n}$ и $x_{j_n}^{\lambda_1+n-1} x_{j_2}^{\lambda_2+n-2} \cdots x_{j_1}^{\lambda_n}$ отличающиеся перестановкой x_{j_1} и x_{j_n}. Так как $\lambda_1 = k + 1$ и $\lambda_n = 0$ эти слагаемые будут равны, но стоять с разными знаками, поэтому числитель будет равен нулю.

Замечание 5.4. Получить условие (5.14) можно таким образом. Обозначим $x_i = \exp(2\pi i \theta_i)$, тогда условие зануления числителя в $s_\lambda(x)$ переписывается как

$$\sum_{w \in S_n} (-1)^{|w|} \exp\Big(2\pi i(\theta, w(\lambda + \rho))\Big) = 0, \qquad \text{где } (\lambda + \rho)_1 - (\lambda + \rho)_n = k + n. \tag{5.15}$$

Заметим, что точные значения $(\lambda+\rho)_1$ и $(\lambda+\rho)_n$ не важны, а важна только разность $\lambda_1 - \lambda_n$ так как мы находимся в случае $\mathfrak{sl}_n$ и можем прибавлять ко всем λ_i одно число. Условие $(\lambda+\rho)_1 - (\lambda+\rho)_n = k+n$ можно понимать как аффинную плоскость заданную скалярным произведением с корнем $\alpha_{1n} = \epsilon_1 - \epsilon_n$.

Условие (5.15) будет выполняться, если $(\theta, \alpha) \in \frac{1}{k+n}\mathbb{Z}$, для любого корня $\alpha \in R$. Действительно, из этого следует, что $(w(\theta), \alpha_{1n}) \in \frac{1}{k+n}\mathbb{Z}$ для любого $w \in S_n$, а, значит, все слагаемые в формуле (5.15) разобьются на пары взаимно обратных отличающихся на отражение $s_{\alpha_{1n}}$.

Множество θ удовлетворяющих условию $(\theta,\alpha)\in\frac{1}{k+n}\mathbb{Z}$, $\forall\alpha\in R$ есть просто сжатая решетка весов $\frac{1}{k+n}P$. Взятие экспоненты имеет ядром решетку корней, поэтому решения уравнения (5.15) можно отождествить с фактор группой $(\frac{1}{k+n}P)/Q$.

Лемма 5.7. *Все решения уравнений* (5.14) *(с точностью до перестановки) имеют вид*

$$x_j=\exp\left(\frac{2\pi i}{n+k}(\mu_j+n-j-\theta_\mu)\right) \tag{5.16}$$

где μ — диаграмма Юнга, такая что $k\geq\mu_1\geq\mu_2\geq\ldots\geq\mu_{n-1}\geq\mu_n=0$ и $\theta_\mu=\frac{1}{n}(\sum(\mu_j+n-j))$.

Доказательство. Пусть $x_i=\exp(2\pi i\theta_i)$. Будем считать, что θ_i упорядочены $\theta_1>\theta_2>\ldots>\theta_n$ и $\sum\theta_j=0$. Далее, сдвигая θ на целые числа (и перенумеруя если нужно) можно добиться того, что $\theta_1-\theta_n<1$. Заметим, что $(k+n)(\theta_j-\theta_{j'})\in\mathbb{Z}$, поэтому можно ввести диаграмму Юнга μ такую, что $\theta_j-\theta_{j+1}=\frac{1}{k+n}(\mu_j-\mu_{j+1}+1)$, $\mu_n=0$, $\mu_1\leq k$. Из этого следует утверждение леммы. □

Теорема 5.8. *Алгебра $R_k\mathfrak{sl}_n$ эквивалентна алгебре функций на множестве* (5.16). *Элемент $[\lambda]$ при этом изоморфизме переходит в s_λ*

Доказательство. Рассуждение полностью аналогично доказательству теоремы 5.4. Вводится базис дельта функция δ_μ, надо проверить невырожденность матрицы перехода которая сводится к невырожденности матрицы

$$S_{\lambda,\mu}=i\sqrt{\frac{1}{n(k+n)^{n-1}}}\det(q^{(\lambda_i-i+1-\theta_\lambda)(\mu_j-j+1-\theta_\mu)}), \tag{5.17}$$

где $q=\exp(\frac{2\pi i}{n+k})$.

Задача 5.8. *Докажите, что $\sum_\lambda S_{\lambda,\mu}S_{\lambda,\nu}=\delta_{\mu^*,\nu}$.*

Из этого следует, что S ортогональная, $S^2=\delta_{\lambda,\lambda^*}$, $S^4=1$. □

Замечание 5.5. Число $\frac{1}{n(k+n)^{n-1}}$ в нормировке S матрицы является порядком группы $(\frac{1}{k+n}P)/Q$.

Из этой теоремы аналогично случаю $\mathfrak{sl}_2$ выводятся формулы Верлинде (5.11) и (5.13).

Задача 5.9 (*). *([8]) а) Докажите, что ядро отображения из $R(\mathfrak{sl}_n)$ в $R_k(\mathfrak{sl}_n)$ порождено $[(k+1)],[k+2],\ldots,[k+n-1]$. Напомним, что точки зрения полиномов Шура $[(j)]$ соответствует $s_{(j)}=h_j$.*
б) Докажите, что $h_{n+k-j}=\frac{(-1)^{j+1}}{n+k}\frac{\partial p_{n+k}}{\partial e_j}$, где $p_l=\sum x_j^l$ симметрический полином Ньютона. Это означает, что алгебра $R_k(\mathfrak{sl}_n)$ является алгеброй Милнора, т.е.

идеал порожден производными одного многочлена p_{n+k} по координатам $e_1, \ldots, e_{n-1}$. Тогда носитель этой алгебры — особые точки функции p_{n+k}
в) Покажите, что особые точки функции p_{n+k} как функции от $x_1, \ldots, x_n$ при условии $\prod x_j = 1$ задаются уравнениями (5.14). Найдите, из этого особые точки p_{n+k} как функции от $x_1, \ldots, e_{n-1}$ при условии $e_n = 1$. Условие различности x_j возникает из матрицы переход от x_j к e_j: $\det(\frac{\partial e_j}{\partial x_{j'}}) = \prod_{j<j'}(x_j - x_{j'})$.

Задача 5.10 (*). *([9] и ссылки там) а) Часто S матрицу вычисляют не для $SL(n)$, а для $GL(n)$. Интегрируемые представления для $GL(n)$ на уровне k нумеруются диаграммами Юнга $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ такими, что $\lambda_1 \leq k$. Матрица S имеет вид*

$$S_{\lambda,\mu} = i\sqrt{\frac{1}{(k+n)^n}} \det\left(q^{(\lambda_j+n-j)(\mu_{j'}+n-j')}\right)_{j,j'=1}^{n}, \tag{5.18}$$

где $q = \exp(\frac{2\pi i}{n+k})$. Покажите, что $S^2 = \delta_{\lambda,\lambda^*}$, $S^4 = 1$.
б) Докажите аналогичное свойство для рафинированной матрицы:

$$S^{\mathrm{ref}}_{\lambda,\mu}/S^{\mathrm{ref}}_{\varnothing,\varnothing} = P_\lambda(t^\rho q^\mu) P_\mu(q^\rho), \tag{5.19}$$

где $t = q^\beta$, $q = \exp(\frac{2\pi i}{(k+n\beta)})$, P_λ это полиномы Макдональда. Разберитесь еще с чем-то про это рафинирование, например с симметричностью матрицы S или с наличием оператора T.

Задача 5.11 (*). *([10] и ссылки там) Другое обобщение — это эквивариантные формулы Верлинде, при этом полиномы Шура заменяется на полиномы Холла-Литтлвуда, есть описание через идеал (подобно теореме 5.6), а есть как множество функция на конечном числе точек (подобно теореме 5.8), при этом множество точек получается как решения уравнений Бете. Одной из задач могла быть эквивалентность этих описаний.*

6 Свободная реализация

6.1 Алгебра $\mathfrak{sl}_2$

Будем использовать β, γ систему (комплексный бозон). Это значит, что есть два тока $\beta(z) = \sum \beta_n z^{-n-1}$, $\gamma(z) = \sum \gamma_m z^{-m}$, генераторы β_n, γ_m удовлетворяют соотношениям:

$$[\beta_n, \beta_m] = [\gamma_n, \gamma_m] = 0, \quad [\beta_n, \gamma_m] = \delta_{m+n,0}. \tag{6.1}$$

В терминах операторных разложений это означает, что

$$\beta(z)\gamma(w) = \frac{1}{z-w} + {:}\beta(z)\gamma(w){:}\,.$$

Нормальное упорядочение здесь можно понимать как обычно для вертексных алгебр (см. пояснение после формулы (5.1)). Можно понимать и в терминах бозонного нормального упорядочения определенного

$$
{}^*_*\gamma_m\beta_n{}^*_* = {}^*_*\beta_n\gamma_m{}^*_* = \begin{cases}\beta_n\gamma_m, & \text{если } n<0,\\ \gamma_m\beta_n, & \text{если } n\geq 0.\end{cases} \tag{6.2}
$$

Алгебра с порожденная генераторами β_n, γ_n имеет Фоковское представление F^{bc} порожденное старшим вектором $|\varnothing\rangle^{bc}$ таким, что

$$
\beta_n|\varnothing\rangle^{\beta\gamma}=0, \text{ при } n\geq 0 \quad \gamma_m|\varnothing\rangle^{\beta\gamma}=0, \text{ при } m>0.
$$

Заметим, что нормально упорядочение (6.4) согласовано с таким определением старшего вектора, в смысле, что ${}^*_*\beta_n\gamma_m{}^*_*|\varnothing\rangle^{\beta\gamma}=0$, если $m+n\geq 0$

Нам также понадобится другая алгебра Гейзенберга (вещественный бозон) с образующим a_n, $n\in\mathbb{Z}$ и соотношением $[a_n,a_m]=n\delta_{m+n,0}$. Фоковское представление F^a_α этой алгебры порождается старшим вектором $|\alpha\rangle$ таким, что

$$
a_n|\alpha\rangle=0, \text{ при } n>0, \quad a_0|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle.
$$

Часто удобно еще добавлять оператор $\hat{Q}$ которые коммутирует с a_n по формуле $[a_n,\hat{Q}]=\delta_{n,0}$. Оператор $\hat{Q}$ не действует на представлении F^a_α, но есть оператор $e^{\beta\hat{Q}}\colon F^a_\alpha\to F^a_{\alpha+\beta}$ который коммутирует с генераторами a_n, $n\neq 0$. В частности, старший вектор должен переходить в старший вектор: $|\alpha+\beta\rangle=e^{\beta\hat{Q}}|\alpha\rangle$. Часто удобно упаковать генераторы в одно поле

$$
\varphi(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus 0}\frac{1}{-n}a_nz^{-n}+a_0\log z+\hat{Q}. \tag{6.3}
$$

Нормально упорядочение для генераторов алгебры Гейзенберга определено как

$$
{}^*_*a_na_m{}^*_* = \begin{cases}a_na_m, & \text{если } n<0,\\ a_ma_n, & \text{если } n\geq 0.\end{cases} \tag{6.4}
$$

Нужно также соглашение об упорядочении a_0 и $\hat{Q}$, будем сначала действовать a_0, а потом $\hat{Q}$. На практике надо упорядочивать только экспоненты от них (групповые элементы), т.е. ${}^*_*e^{\alpha a_0}e^{\beta\hat{Q}}{}^*_* = {}^*_*e^{\beta\hat{Q}}e^{\alpha a_0}{}^*_* = e^{\beta\hat{Q}}e^{\alpha a_0}$.

Представления построенные в следующей теореме часто называются представлениями Вакимото, но наверное мы будем их просто называть фоковскими представлениями алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$.

Теорема 6.1. *Тензорное произведение $F_\alpha=F^{\beta\gamma}\otimes F^a_\alpha$ имеет структуру представления $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ заданную по формулам*

$$
\begin{aligned}
e(z)=\beta(z), \quad h(z)&=-2{}^*_*\gamma(z)\beta(z){}^*_*+\sqrt{2\kappa}\partial\varphi(z)\\
f(z)&=-{}^*_*\gamma^2(z)\beta(z){}^*_*+\sqrt{2\kappa}\partial\varphi(z)\gamma(z)+k\partial\gamma(z).
\end{aligned} \tag{6.5}
$$

Здесь $\kappa=k+2$, k — уровень представления.

Замечание 6.1. В формуле (6.5) использовано бозонное нормальное упорядочение $^*_* \cdots ^*_*$, но легко видеть, что ничего не изменится, если взять нормальное упорядочение $:\cdots:$ введенное в параграфе 5.1.

Замечание 6.2. Формулы (6.5) должны напоминать известную реализацию алгебры $\mathfrak{sl}_2$ при помощи дифференциальных операторов на прямой: $e = \partial_x$, $h = -2x\partial_x$, $f = -x^2\partial_x$. Есть поправка вида $e = \partial_x$, $\quad h = -2x\partial_x + \lambda$, $\quad f = -x^2\partial_x + \lambda x$. Это можно воспринимать как действие действие дифференциальных операторов на формах вида $f(x)dx^{-\lambda/2}$ или псевдодифференциальных операторах вида $f(x)\partial_x^{\lambda/2}$.

Замечание 6.3. Заметим, что в специальном случае $k = -2$ в формулах (6.5) пропадает зависимость от поля φ, Получается, что представление строится при помощи только генераторов β_n, γ_n то есть два поля вместо трех.

Замечание 6.4. Тензор энергии импульса (2.1) при реализации (6.5) принимает вид

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{Sug}}(z) = \frac{1}{2(k+2)}\Big(:e(z)f(z): + :f(z)e(z): + \frac{1}{2}:h(z)h(z):\Big) \\ = \frac{1}{2}:\partial\varphi(z)\partial\varphi(z): - \frac{1}{\sqrt{2\kappa}}\partial^2\varphi(z) + :\beta(z)\partial\gamma(z):. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Можно вычислять по определению из параграфа 5.1, например член с $\partial^2\varphi(z)$ возникает из того, что

$$:\big(\partial\varphi(z)\gamma(z)\big)\beta(z): = \partial\varphi(z):\gamma(z)\beta(z): + \partial^2\varphi(z).$$

Может быть удобнее использовать «физическое» определение нормального произведение $:A(z)B(w):= \frac{1}{2\pi i}\oint A(z)B(w)\frac{dz}{z-w}$.

Ответ (6.6) есть сумма двух слагаемых — обычного, удлиненного тензора энергии импульса для свободного поля и тензора энергии импульса β, γ системы в котором $\beta(z)$ имеет размерность 1, а $\gamma(z)$ имеет размерность 0. Суммарный центральный заряд равен $2 + (1 - 12\frac{1}{2\kappa}) = \frac{3k}{k+2}$.

Теорема 6.2. *В случае общего значения параметров k, α модуль F_α изоморфен модулю Верма $M_{\lambda,k}$, где $\lambda = \sqrt{2\kappa}\alpha$*

Доказательство. Легко видеть, что вектор $|\varnothing\rangle\otimes|\alpha\rangle$ является старшим относительно $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$. Старший вес представления F_α находится вычислением

$$h_0\Big(|\varnothing\rangle \otimes |\alpha\rangle\Big) = \sqrt{2\kappa}\alpha\Big(|\varnothing\rangle \otimes |\alpha\rangle\Big).$$

Из наличия старшего вектора в модуле F_α следует существование сплетающего оператора $M_{\lambda,k} \to F_\alpha$. При общих значениях λ, k модуль Верма $M_{\lambda,k}$, поэтому требуемый изоморфизм следует из равенства размеров представлений $M_{\lambda,k}$ и F_α. Под словом «размер» здесь имеется ввиду характер представления $\operatorname{Tr} q^{L_0} z^{h_0}$.

По формуле (6.5) оператор $h_0 = -2\sum {}^*_*\beta_n\gamma_{-n}{}^*_* + \sqrt{2\kappa}a_0$, по формуле (6.6) оператор $L_0 = \sum {}^*_* n\beta_n\gamma_{-n}{}^*_* + \frac{1}{2}\sum {}^*_* a_n a_{-n}{}^*_* + \frac{1}{\sqrt{2\kappa}}a_0$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} &[h_0, \beta_n] = 2\beta_n, && [h_0, a_n] = 0, && [h_0, \gamma_n] = -2\gamma_n, \\ &[L_0, \beta_n] = -n\beta_n, && [L_0, a_n] = -na_n, && [L_0, \gamma_n] = -n\gamma_n. \end{aligned}$$

Из этого (используя теорему Пуанкаре-Биркгофа-Витта) следует, что характер F_α равен

$$\frac{z^\lambda q^{\lambda(\lambda+2)/4\kappa}}{\prod_{n=1}^\infty (1 - z^{-2}q^{n-1})(1 - q^n)(1 - z^2 q^n)}.$$

Общий множитель $z^{\cdots}q^{\cdots}$ возник из действия на старшем векторе $|\varnothing\rangle \otimes |\alpha\rangle$. Так как генераторы $e_, h_n, f_n$ удовлетворяют соотношениям аналогичным соотношениям с L_0 и h_0 мы получаем равенство характеров $M_{\lambda,k}$ и F_α, что и требовалось доказать. $\square$

Как обычно, сплетающие операторы между фоковскими модулями строятся при помощи скринингов. Определим скрининговский ток по формуле

$$S(t) = e^{-\sqrt{2/\kappa}\varphi(t)}\beta(t). \tag{6.7}$$

Теорема 6.3. *а)* $[e(z), S(t)] = 0$, *б)* $[h(z), S(t)] = 0$, *в)* $[f(z), S(t)] = \frac{d}{dt}(\ldots)$

Из этой теоремы следует, что скрининговский оператор $S = \oint S(t)dt \colon F_\alpha \to F_{\alpha - \sqrt{2/\kappa}}$ коммутирует с действием $\widehat{\mathfrak{g}}$

Задача 6.1. *Проверьте формулу* (6.5) *или теорему про скрининг.*

Пример 6.5. Покажем, что вообще говоря фоковские модули F_α отличаются от модулей Верма $M_{\lambda,k}$.

Рассмотрим пример $k = 1, \lambda = 0$. Тогда в модуле $M_{\lambda,k}$ есть два сингулярных вектора $f_0 v_{0,1}$ и $e_{-1}^2 v_{0,1}$. Найдем их в фоковском модуле F_0 используя формулы 6.5

$$\begin{aligned} f_0\Big(|\varnothing\rangle \otimes |\alpha\rangle\Big) &= \sqrt{2\kappa}a_0\gamma_0\Big(|\varnothing\rangle \otimes |\alpha\rangle\Big) = 0, \\ e_{-1}^2\Big(|\varnothing\rangle \otimes |\alpha\rangle\Big) &= \beta_{-1}^2\Big(|\varnothing\rangle \otimes |\alpha\rangle\Big) \neq 0. \end{aligned}$$

Таким образом мы видим, что один сингулярный вектор занулился, а второй нет. Но, вместо занулившегося сингулярного вектора есть вектор «на его месте» $\gamma_0\Big(|\varnothing\rangle \otimes |\alpha\rangle\Big)$, этот вектор не является потомком старшего, но, наоборот старший получается из него действием e_0.

По другому можно увидеть разницу между модулем Верма $M_{\lambda,k}$ и фоковским модулем F_α если переходить от них к неприводимому модулю $L_{\lambda,k}$. По теореме 2.1 неприводимое представление $L_{0,1}$ получается из модуля Верма $M_{0,1}$ факторизацией по двум сингулярным векторам. Это является началом, так называемой, БГГ резольвенты:

$$\ldots \to M_{-2,1} \oplus M_{4,1} \to M_{0,1} \to L_{0,1} \to 0.$$

Резольвента бесконечная влево, каждый член начиная со второго есть сумма двух модулей Верма, вообще члены нумеруются элементами аффинной группы Вейля. Гомологии этого комплекса нулевые, если убрать $L_{0,1}$, то получится, что гомологии нетривиальны только в одном месте и равны $L_{0,1}$.

Для фоковских модулей БГГ ситуация становится другой и БГГ резольвента какбы разворачивается и становится бесконечной в обе стороны:

$$\ldots \to F_{2\sqrt{2/3}} \xrightarrow{S^2} F_0 \xrightarrow{S} F_{-\sqrt{2/3}} \to \ldots .$$

Сплетающие операторы в этой резольвенте задаются скринингами. Число $\sqrt{2/3}$ есть просто $2/\sqrt{2\kappa}$ в данном случае.

Иногда удобно дополнительно бозонизировать β,γ систему. Для этого введем еще две алгебры Гейзенберга с образующим $b_{1,n}, b_{2,n}$, $n \in \mathbb{Z}$и соотношениями

$$[b_{1,n}, b_{1,m}] = n\delta n + m, 0, \quad [b_{2,n}, b_{2,m}] = -n\delta n + m, 0, \quad [b_{1,n}, b_{2,m}] = 0.$$

Как и выше удобно добавить операторы сдвигающие нулевую моду $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2$, которые удовлетворяют соотношениям $[b_{i,n}, \hat{Q}_j] = (-1)^{i+1}\delta_{i,j}\delta_{n,0}$. Обозначим через $F^b_{\beta_1,\beta_2}$ фоковский модуль порожденный вектором $|\beta_1, \beta_2\rangle$ удовлетворяющим соотношениям

$$b_{1,n}|\beta_1, \beta_2\rangle = \delta_{n,0}\beta_1|\beta_1, \beta_2\rangle, \quad b_{2,n}|\beta_1, \beta_2\rangle = -\delta_{n,0}\beta_2|\beta_1, \beta_2\rangle.$$

Как обычно, экспонента $\exp(\mu_1\hat{Q}_1 + \mu_1\hat{Q}_2)$ действует из одного фоковского представления в другое $\exp(\mu_1\hat{Q}_1 + \mu_1\hat{Q}_2)\colon F^b_{\beta_1,\beta_2} \to F^b_{\beta_1+\mu_1,\beta_2+\mu_2}$. Мы будем упаковывать моды введенных алгебр Гейзенберга в поля

$$\phi_i(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus 0} \frac{1}{-n} b_{i,n} z^{-n} + b_{i,0}\log z + \hat{Q}_i.$$

Соответственно мы будем использовать вертексные операторы которые являются экспонентами ${}^*_*\exp(\mu_1\phi_1 + \mu_2\phi_2){}^*_*$, нормальное упорядочение определено как в формуле (6.4).

Теорема 6.4. *а) Для $\gamma \in \mathbb{C}$, пусть $\Pi_\gamma = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} F_{\gamma+n,\gamma+n}$. Тогда формулы*

$$\beta(z) = {}^*_* e^{\phi_1(z)+\phi_2(z)}{}^*_*, \quad \gamma(z) = {}^*_*\partial\phi_1(z) e^{-\phi_1(z)-\phi_2(z)} \tag{6.8}$$

задают представление β,γ системы на Π_γ. б) В этом представлении токи β,γ коммутируют со скрининигом

$$S^{\beta\gamma} = \oint S^{\beta\gamma}(t)dt, \quad S^{\beta\gamma}(t) = e^{\phi_1(z)}. \tag{6.9}$$

Это называется бозонизацией Фридана-Мартинеса-Шенкера. Отметим также, что ток $S^{\beta\gamma}(t)$ является фермионом, двойственный к нему фермион задается формулой $\exp(-\phi_1(z))$.

Замечание 6.6. Пункт б) можно усилить сказавши, что вертексная алгебра β, γ — является ядром скрининга $S^{\beta,\gamma}$.

Замечание 6.7. Тензор энергии импульса β, γ системы при этой бозонизации имеет вид

$$:\beta(z)\partial\gamma(z): \mapsto \frac{1}{2}\left(\partial\phi_1(z)^2 - \partial^2\phi_1 - \partial\phi_2(z)^2 + \partial^2\phi_2\right).$$

Скомбинировавши теорему 6.4 и теорему 6.1 мы можем ввести структуру $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ модуля на тензорном произведении $F^a_\alpha \otimes \Pi_\gamma$. Благодаря новой бозонизации мы теперь можем ввести еще один скрининг.

$$\tilde{S} = \oint \tilde{S}(t)dt, \quad \tilde{S}(t) = {}^*_* \exp\left(\sqrt{2\kappa}\varphi(t) - \kappa(\phi_1(t) + \phi_2(t)\right) {}^*_*$$

Отметим, что формально, мы имеем соотношение $\log \tilde{S}(t) = -\kappa \log S(t)$, где $S(t)$ определен в формуле (6.7). Верен аналог теоремы 6.3

Теорема 6.5. *а)* $[e(z), S(t)] = 0$, *б)* $[h(z), S(t)] = 0$, *в)* $[f(z), S(t)] = \frac{d}{dt}(\ldots)$

Пункты а) и б) тут по сути очевидны, а именно для пункта а) можно заметить, что $\tilde{S}$ не зависит от $\gamma(z)$, а пункт б) следует из пункта б) теоремы 6.3 и замечания выше, что это экспонента от того же самого Гейзенберга.

6.2 Общий случай в терминах функций на клетке

Как уже говорилось в замечании 6.2 свободная реализация $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ происходит из (аффинизации) действия на функциях на открытой клетке $\mathbb{C} \subset \mathbb{CP}^1$. Естественно спросить — какое обобщение этой конструкции на случаи более общей алгебры $\mathfrak{g}$? В случае $\mathfrak{sl}_n$ можно взять действие на $\mathbb{C}^{n-1} \subset \mathbb{CP}^{n-1}$, но это дает маленькое представление, как многочлены от $n-1$ переменной в то время как модуль Верма для $\mathfrak{sl}_n$ имеет размеры как многочлены от $n(n-1)/2 = \dim \mathfrak{n}_-$ переменных. Чтобы строить общие представления нужно рассматривать действие на открытой клетке внутри многообразия флагов. Основные источники в этом параграфе это статья [11] и курс лекций [13].

Будем работать в более общей ситуации. Пусть алгебра Ли разложена в сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+$. Мы будем предполагать, что такое разложение построено по полупростому элементу $h \in \mathfrak{h}$, при этом

$$\mathfrak{g}_+ = \bigoplus_{\alpha, \alpha(h)>0} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{g}_- = \bigoplus_{\alpha, \alpha(h)<0} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha, \alpha(h)=0} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Пример 6.8. Если h — общий элемент картановской подалгебры, то $\mathfrak{g}_\pm = \mathfrak{n}_\pm$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$.

Пример 6.9. Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$, $n = n_1 + \ldots + n_k$, $h = \mathrm{diag}(a_1, \ldots a_1, a_2 \ldots a_2, \ldots)$, где каждое a_i встречается n_i раз. Тогда $\mathfrak{g}_0$ состоит из блочно диагональных матриц с блоками размера $n_1, \ldots, n_k$, $\mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-$ состоят из верхне и нижне треугольных блочных матриц.

Из разложения алгебр Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+$ следует, что в группе G есть открытое множество заданное разложением $G_- \cdot G_0 \cdot G_+ \subset G$.

Пример 6.10. Примером такого разложения для случая матриц $n \times n$ является разложение Гаусса

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ x_{i,j} & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 & & \\ & \ddots & \\ & & y_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & z_{i,j} \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.10}$$

Более того, для элементов $x_{i,j}, y_i, z_{i,j}$ есть явная формула. Через $\begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_k \end{bmatrix}$ обозначим определитель минора матрицы g составленного из строк $i_1, \dots, i_k$ и столбцов $j_1, \dots, j_k$. Обозначим через Δ_k главный минор $\Delta_k = \begin{bmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{bmatrix}$. Тогда

$$x_{i,j} = \frac{1}{\Delta_j} \begin{bmatrix} 1 & \dots & j-1 & i \\ 1 & \dots & j-1 & j \end{bmatrix}, \quad y_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}, \quad z_{i,j} = \frac{1}{\Delta_i} \begin{bmatrix} 1 & \dots & i-1 & i \\ 1 & \dots & i-1 & j \end{bmatrix}. \tag{6.11}$$

В частности из этих формул следует, при каком условии матрица g представима в виде (6.10): для этого необходимо и достаточно того, что $\Delta_k \neq 0$, $\forall 1 \leq k \leq n$.

Обозначим через P подгруппу $G_0 \cdot G_-$. Группа G действует справа на однородном пространстве $P \backslash G$. Поэтому алгебра Ли $\mathfrak{g}$ вкладывается в векторные поля на $P \backslash G$. Векторные поля можно ограничить на «большую клетку» — на классы элементов представимых в виде $g_- g_0 g_+$. Это называется клеткой потому, что как многообразие это просто G_+, это также называют клеткой Брюа.

Теперь алгебра Ли $\mathfrak{g}$ действует на пространстве функций на клетке на $P \backslash G$. Как в предыдущем параграфе это пространство функций можно «подкрутить» сделав пространством сечения расслоения. Удобно это сделать еще на самой группе G, пусть $\lambda\colon G_0 \to \mathbb{C}^\times$ характер, тогда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ действует на пространстве функций на $G_- \cdot G_0 \cdot G_+$ со свойством $f(g_- g_0 g_+) = \lambda(g_0) f(g_+)$. Будем обозначать пространство таких функций как F_λ. Более явно действие имеет вид

$$x f(g_+) = \frac{d}{dt} f(g_+ e^{tx}) \Big|_{t=0}. \tag{6.12}$$

То есть вычислительно надо умножить справа на экспоненту e^{tx}, а потом разложить $g_+ e^{tx} = g_-^\circ g_0^\circ g_+^\circ$. При этом формула на самом деле зависит не от λ а от его дифференциала, который является характером $\mathfrak{g}_0 \to \mathbb{C}$.

В конкретных примерах это конечно можно довести до явных формул.

Предложение 6.6. *Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, $\mathfrak{g}_\pm = \mathfrak{n}_\pm$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. Характер определен по формуле $\lambda(g_0) = \prod y_i^{\lambda_i}$, где $g_0 = \mathrm{diag}(y_1, \dots y_n)$. Тогда действие простых генераторов $\mathfrak{sl}_n$ в пространстве многочленов от координат $z_{i,j}$, $i < j$ введенных в формуле* (6.10) *имеет вид:*

$$\begin{aligned}
e_i \mapsto &\frac{\partial}{\partial z_{i,i+1}} + \sum_{j\le i-1} z_{j,i}\frac{\partial}{\partial z_{j,i+1}}\\
h_i \mapsto &(\lambda_i-\lambda_{i+1}) - 2z_{i,i+1}\frac{\partial}{\partial z_{i,i+1}} + \sum_{j\le i-1}\left(z_{j,i}\frac{\partial}{\partial z_{j,i}} - z_{j,i+1}\frac{\partial}{\partial z_{j,i+1}}\right)+\\
&+\sum_{j\ge i+2}\left(z_{i+1,j}\frac{\partial}{\partial z_{i+1,j}} - z_{i,j}\frac{\partial}{\partial z_{i,j}}\right)\\
f_i \mapsto &(\lambda_i-\lambda_{i+1})z_{i,i+1} + \sum_{j\le i-1} z_{j,i+1}\frac{\partial}{\partial z_{j,i}} - \sum_{j\ge i+2} z_{i,j}\frac{\partial}{\partial z_{i+1,j}} -\\
&- z_{i,i+1}\left(\sum_{j\ge i+1} z_{i,j}\frac{\partial}{\partial z_{i,j}} - \sum_{j\ge i+2} z_{i+1,j}\frac{\partial}{\partial z_{i+1,j}}\right)
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Замечание 6.11. Можно взять алгебру $\mathfrak{gl}_n$, тогда формула для $h_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1}$ разобьется в сумму двух слагаемых

$$E_{i,i} \mapsto \lambda_i + \sum_{j\le i-1} z_{j,i}\frac{\partial}{\partial z_{j,i}} - \sum_{j\ge i+1} z_{i,j}\frac{\partial}{\partial z_{i,j}}. \tag{6.14}$$

Можно написать формулы вроде (6.13) не только для простых корней, но и для произвольных генераторов $E_{i,j}$. Например при $i<j$ мы получим

$$E_{ij} \mapsto \frac{\partial}{\partial z_{i,j}} + \sum_{l\le i-1} z_{l,i}\frac{\partial}{\partial z_{l,j}} \tag{6.15}$$

Старший вектор в этом представлении F_λ это 1, старший вес это $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. Как представление это модуль контраградиентно двойственный к модулю Верма, при общих λ_i модуль F_λ изоморфен модулю Верма M_λ.

Задача 6.2. *Докажите формулы* (6.13)

Указание. Можно действовать по определению, а можно использовать формулы для миноров (6.11).

Рассмотрим другой пример, частный случай примера 6.9 для разложения $n = (n-1)+1$. Общая матрица $n\times n$ имеет разложение

$$g = \begin{pmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y & 0\\ 0 & w\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & z\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{6.16}$$

где w — число, y — матрица размера $(n-1)\times(n-1)$, z —вектор столбец размера $n-1$, x — вектор строка размера $n-1$. Пространство $P\backslash G$ в этом случае есть проективное пространство $\mathbb{CP}^{n-1}$. Общий характер группы G_0 имеет вид $\lambda(g_0) = (\det y)^{\lambda_1}(\det g_0)^{\lambda}$.

Предложение 6.7. *Действие генераторов $\mathfrak{gl}_n$ в пространстве многочленов от координат $z_1, \ldots, z_{n-1}$ имеет вид*

$$
\begin{aligned}
E_{i,j} \mapsto& - z_j \frac{\partial}{\partial z_i} \text{ при } 1 \leq i \neq j < n, \quad E_{i,n} \mapsto \frac{\partial}{\partial z_i} \text{ при } 1 \leq i < n, \\
E_{i,i} \mapsto& \lambda + \lambda_1 - z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \text{ при } 1 \leq i < n, \quad E_{n,n} \mapsto \lambda + \sum_{i=1}^{n-1} z_i \frac{\partial}{\partial z_i}, \\
E_{n,i} \mapsto& \lambda_1 z_i - z_i \sum_{j=1}^{n-1} z_j \frac{\partial}{\partial z_j} \text{ при } 1 \leq i < n.
\end{aligned} \tag{6.17}
$$

Задача 6.3. *Докажите формулы* (6.17)*. Найдите старший вес получившегося представления.*

До сих пор в этом параграфе мы говорили только о представлениях неаффинных алгебр Ли. В работах Фейгина и Френкеля доказывается, что аффинизация существует (см. курс лекций [13] и ссылки там).

Для того чтобы писать формулы для аффинизации (а после и для скринингов) удобно чуть сменить обозначения. Вместо оператора умножения на z будем писать γ, вместо оператор дифференцирования по z будет писать β. Тогда $[\beta, \gamma] = 1$. Координат z у нас может быть несколько поэтому операторы β, γ будут иметь индексы. Для каждого параметра λ введем оператор $\hat{p}$ который действует на представлении числом λ и оператор $\hat{q}$ который коммутирует с ним как $[\hat{p}, \hat{q}] = 1$. Как обычно, на практике будет использоваться только экспонента от оператор $\hat{q}$, которая сдвигает собственное значение оператора $\hat{p}$, точнее $e^{\mu\hat{q}}\colon F_\lambda \to F_{\lambda+\mu}$.

При аффинизации операторы β, γ заменяются на токи $\beta(z)$ и $\gamma(z)$ удовлетворяющие соотношениям (6.1), можно смотреть на β и γ как на нулевые моды соответствующих токов. Операторы $\hat{p}, \hat{q}$ заменяются бозонным полем $\varphi(z)$, при этом $\hat{p}, \hat{q}$ являются аналогами $a_0, \hat{Q}$, см (6.3). Токи $\beta(z), \gamma(z), \varphi(z)$ будут иметь индексы, так как у нас было несколько координат z и параметров характера λ_i.

Теорема 6.8. *Рассмотрим алгебру Гейзенберга с образующими $\beta_{i,j}[k], \gamma_{i,j}[k]$, $1 \leq i < j \leq n$, $k \in \mathbb{Z}$ и $a_i[k]$, $1 \leq i \leq n$, $k \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим фоковское представление $F_{\vec{\lambda}}$ этой алгебры порожденное вакуумом*

$$\beta_{i,j}[k-1]|\vec{\lambda}\rangle = \gamma_{i,j}[k]|\vec{\lambda}\rangle = a_i[k]|\vec{\lambda}\rangle = 0, \text{ при } k > 0, \quad a_i[0]|\vec{\lambda}\rangle = \lambda_i|\vec{\lambda}\rangle$$

Тогда следующие формулы задаются действие $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ на $F_{\vec{\lambda}}$:

$$
\begin{aligned}
e_i(z) \mapsto &\beta_{i,i+1} + \sum_{j\le i-1} \gamma_{j,i}\beta_{j,i+1} \\
h_i(z) \mapsto &\sqrt{\kappa}(\partial\varphi_i - \partial\varphi_{i+1}) + \sum_{j\le i-1} {}^*_*\,(\gamma_{j,i}\beta_{j,i} - \gamma_{j,i+1}\beta_{j,i+1})\,{}^*_* - \\
&- 2\,{}^*_*\gamma_{i,i+1}\beta_{i,i+1}\,{}^*_* + \sum_{j\ge i+2}(\gamma_{i+1,j}\beta_{i+1,j} - \gamma_{i,j}\beta_{i,j}) \\
f_i(z) \mapsto &\sqrt{\kappa}(\partial\varphi_i - \partial\varphi_{i+1})\gamma_{i,i+1} + (k+i-1)\partial\gamma_{i,i+1} + \sum_{j\le i-1}\gamma_{j,i+1}\beta_{j,i} - \\
&- \sum_{j\ge i+2}\gamma_{i,j}\beta_{i+1,j} - \gamma_{i,i+1}\,{}^*_*\left(\sum_{j\ge i+1}\gamma_{i,j}\beta_{i,j} - \sum_{j\ge i+2}\gamma_{i+1,j}\beta_{i+1,j}\right){}^*_*,
\end{aligned}
\tag{6.18}
$$

где $\kappa = k+n$ и, для краткости, мы не пишем зависимости от z у токов $\beta_{i,j}(z), \gamma_{i,j}(z), \varphi_i(z)$.

Замечание 6.12. Эти формулы легко списываются из (6.13), за исключением члена с $\partial\gamma_{i,i+1}$, коэффициент при этом члене фиксируется из требования того, что $e_i(z)f_i(w) = \frac{k}{(z-w)^2}$ + менее сингулярные члены. Собственно из аналогичного условия на h_i фиксируется нормировка $\sqrt{\kappa}$ перед $\partial\varphi$. Сложная часть этой теоремы это проверка соотношений Серра, проще вместо этого написать явные формулы для всех токов, не только для соответствующих простым корням.

Замечание 6.13. Можно написать аналог формулы (6.14), но тут потребуется некоторая сдвижка:

$$
E_{i,i}(z) \mapsto \sqrt{\kappa}\partial\varphi_i + \sum_{j\le i-1} {}^*_*\gamma_{j,i}\beta_{j,i}{}^*_* - \sum_{j\ge i+1} {}^*_*\gamma_{i,j}\beta_{i,j}{}^*_* + \mu\partial\varphi,
$$

где $\varphi = \sum\varphi_i$ и μ — решение квадратного уравнения $n\mu^2 + 2\sqrt{\kappa}\mu + 1 = 0$.

Естественно теперь спросить об аффинизации формулы (6.17). Наивной аффинизации (при помощи токов β_i, γ_i, $1 \le i \le n{-}1$, φ, φ_1) нет. Но есть некоторая версия ([14, Пример 5.3])

Задача 6.4. *Пусть токи $\tilde{E}_{i,j}(z)$, $1 \le i,j \le n{-}1$ удовлетворяют соотношениям алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_{n-1}$ на уровне $k{+}1$ (в частности $\sum \tilde{E}_{i,i} = 0$)). Пусть токи $\beta_i(z), \gamma_i(z)$, $1 \le i \le n{-}1$ и $\varphi(z)$ коммутируют с $\tilde{E}_{i,j}(z)$ и удовлетворяют соотношениям алгебры Гейзенберга, причем φ нормирован так, что $\partial\varphi(z)\partial\varphi(w) = \frac{(n-1)\kappa}{n}\frac{1}{(z-w)^2} + \mathrm{reg}$. Тогда следующие формулы*

$$
\begin{aligned}
E_{i,j} \mapsto &\tilde{E}_{i,j} - \gamma_j\beta_i,\ \text{при } 1 \le i \ne j \le n{-}1; \quad E_{i,n} \mapsto \beta_i,\ \text{при } 1 \le i \le n{-}1; \\
E_{i,i} \mapsto &\tilde{E}_{i,i} - {}^*_*\gamma_i\beta_i{}^*_* - \frac{1}{n-1}\partial\varphi,\ \text{при } 1 \le i \le n{-}1; \quad E_{n,n} \mapsto \partial\varphi + \sum {}^*_*\gamma_i\beta_i{}^*_*; \\
E_{n,j} \mapsto &- {}^*_*\gamma_j\gamma_j\beta_j{}^*_* + k\partial\gamma_j - \frac{n}{n-1}\partial\varphi\gamma_j + \sum \tilde{E}_{i,j}\gamma_i,\ \text{при } 1 \le j \le n{-}1
\end{aligned}
\tag{6.19}
$$

задают представление алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ на уровне k

Эта задача дает способ получать явные формулы для реализации $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ по индукции, по сути это те же формулы, что и (6.18). То, что речь идет об алгебре $\mathfrak{sl}_n$, а не $\mathfrak{gl}_n$ это немного существенно, см. замечание 6.13.

6.3 Скрининги

В предыдущем параграфе представления алгебры Ли были написаны при помощи правого действия на открытой клетке в $P\backslash G$. В этом параграфе будем обозначать соответствующие операторы как $r(x)$, $x \in \mathfrak{g}$, они определяются по формуле (6.12).

С другой стороны, открытая клетка отождествляется с G_+ на котором группа G_+ действует умножениями слева. Формула аналогична (6.12) и имеет вид:

$$l(x)f(g_+) = \frac{d}{dt} f(e^{-tx}g_+)\Big|_{t=0}. \tag{6.20}$$

Ясно, что левое действие G_+ на G_+ коммутирует с правым действием G_+.

Предложение 6.9. *Для любого $x \in \mathfrak{n}_+$, $h \in \mathfrak{h}$ имеем $[r(h), l(x)] = l([x,h])$.*

Доказательство. Разница в вычислении $l(x)r(h)$ и $r(h)l(x)$ в том, что во во втором операторе мы проносим $e^{t_2 h}$ через $e^{t_1 x}$, а в первом нет. Можно это записать формулами. Пусть $g_+e^{t_2h} = e^{t_2h}\tilde{g}_+(t_2)$. Тогда

$$\begin{aligned} l(x)r(h)f(g_+) &= \frac{d}{dt_1}\frac{d}{dt_2}\lambda(e^{t_2h})f(e^{t_1x}\tilde{g}_+(t_2))\Big|_{t_1=t_2=0} \\ r(h)l(x)f(g_+) &= \frac{d}{dt_1}\frac{d}{dt_2}\lambda(e^{t_2h})f(e^{-t_2h}e^{t_1x}e^{t_2h}\tilde{g}_+(t_2))\Big|_{t_1=t_2=0} \end{aligned}$$

При дифференцировании из второго члена получается лишний коммутатор $e^{[x,h]}$ действующий слева, что и равно действию оператора $l([x,h])$. □

Ограничимся теперь случаем $\mathfrak{g}_\pm = \mathfrak{n}\pm$. Выберем в $\mathfrak{n}_+$ корневой базис $e_\alpha : [h, e_\alpha] = \alpha(h)e_\alpha$. Предложение 6.9 может быть переписано как

$$\Big(r(h) - \alpha_i(h)\Big)l(e_i) = l(e_i)r(h) \tag{6.21}$$

На группе G_+ есть координаты $g_+ = \exp(\sum z_\alpha e_\alpha)$. Эти координаты являются однородными, при сопряжении $g_+ \mapsto e^{tx}g_+e^{-tx}$, при $x \in \mathfrak{h}$ они преобразуются $z_\alpha \mapsto t^{\alpha(x)}z_\alpha$. Будем обозначать γ_α оператор умножения на z_α и β_α оператор дифференцирования по z_α. Характер λ можно рассматривать как элемент $\mathfrak{h}^*$, можно разложить его по фундаментальным весам $d\lambda = \lambda_i\omega_i$. Как и в прошлом параграфе введем операторы $\hat{p}_i$ которые действуют на F_λ числом λ_i. Для любого $h \in \mathfrak{h}$ будем писать $(\hat{p}, h) = \sum \hat{p}_i\omega_i(h)$.

Легко видеть, что в этих координатах мы имеем

$$r(h) = (\hat{p}, h) + \sum_\alpha \alpha(h)\gamma_\alpha\beta_\alpha \tag{6.22}$$

Аналогичная формула будет и для любого другого выбора однородных координат. Для любого $\mu \in \mathfrak{h}^*$ оператор $e^{(\mu,\hat{q})}$ действует $e^{(\mu,\hat{q})}\colon F_\lambda \to F_{\lambda-\mu}$ коммутируя с β_α, γ_α. Для каждого простого корня e_i определим оператор

$$s_i = l(e_i)e^{(-\alpha_i,\hat{q})}\colon F_\lambda \to F_{\lambda-\alpha_i} \tag{6.23}$$

Очевидно, что s_i коммутирует с $r(x)$, $x \in \mathfrak{n}_+$, из формул (6.21),(6.22) следует, что s_i коммутирует с $r(h)$, $h \in \mathfrak{h}$. Осталось разобраться с $\mathfrak{n}_-$. Аналогично предложению 6.9 доказывается, что

$$[r(f_j), s_i] = \delta_{i,j}e^{(-\alpha_i,\hat{q})}(\hat{p}, h_i). \tag{6.24}$$

Предложение 6.10. *Пусть $\lambda(h_i) = m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Тогда оператор $s_i^{m+1}\colon F_\lambda \to F_{\lambda-(m+1)\alpha_i}$ коммутирует с действием алгебры $\mathfrak{g}$.*

Это предложение легко выводится из формулы (6.24). Оно является по сути переформулировкой утверждения про сингулярные вектора в задаче 1.2.

Как обычно, в случае $\mathfrak{gl}_n$ все можно посчитать явно. В тех же координатах, что и формулы (6.13) мы имеем

$$s_i = -e^{\hat{q}_{i+1}-\hat{q}_i}\Big(\frac{\partial}{\partial z_{i,i+1}} + \sum_{j\geq i+2} z_{i+1,j}\frac{\partial}{\partial z_{i,j}}\Big) \tag{6.25}$$

Задача 6.5. *Докажите формулу* (6.24) *или напрямую или при помощи явных формул* (6.13), (6.25).

Выше в этом параграфе мы говорили только про конечномерное алгебру $\mathfrak{g}$. Перейдем теперь к аффинной алгебре. В принципе можно аффинизировать все рассуждение с левым действием на клетке, но можно просто аффинизировать явные формулы (6.25). В обозначениях формул (6.18) имеем:

$$S_i(t) = -\left(\beta_{i+1,i}(t) - \sum_{j\geq i+2}\gamma_{j,i+1}(t)\beta_{j,i}(t)\right)e^{(\alpha_i,\varphi(t))/\sqrt{\kappa}} \tag{6.26}$$

Интегралы $S_i = \oint S_i(t)dt$ являются скринигами, они коммутируют с действием алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$.

Посмотрим какие перестановочные соотношения на скрининги. Заметим, что токи $\beta(z)$ и $\gamma(w)$ формально коммутируют. Поэтому вся монодромия при перестановке $S_i(z)$ и $S_j(w)$ возникает из-за экспонент от φ. Эта монодромия такая же как и для скринингов W алгебры, поэтому аналогично тому как доказывалось в прошлом году [12] (или см. [11]) доказывается, что S_i формально удовлетворяют соотношениям нильпотентной алгебры для квантовой $U_q\mathfrak{sl}_n$, при $q = \exp(i\pi/\kappa)$.

6.4 В терминах гамильтоновой редукции

Напомним, что в параграфе 6.2 представления алгебры $\mathfrak{g}$ строились через реализацию этой алгебры как векторных полей на открытой клетке $G_+ \subset P\backslash G$. Как следствие, универсальная обертывающая $U(\mathfrak{g})$ вкладывается в алгебру дифференциальных операторов на G_+. Можно спросить себя о классическом пределе этой конструкции, вложении пуассоновой алгебры $S(\mathfrak{g})$ в алгебру функций на кокасательном расслоении T^*G_+. Основной источник в этом параграфе это статья [14].

Основным инструментом конструкции будет гамильтонова редукция. Напомним необходимые определения в достаточной для нас общности. Пусть связная группа A действует на многообразии X. Это действие индуцирует действие группы A на кокасательном расслоении T^*X.

Можно это сказать в координатах. Пусть $q^1, \dots q^n$ локальные координаты на X, через $p_1, \dots, p_n$ обозначим координаты в слое T^*X соответствующие $dq^1, \dots, dq^n$. Тогда, для любого преобразования $\tilde{q} = g(q)$ координаты p преобразуются по формуле $\tilde{p} = \left(\frac{d\tilde{q}}{dq}\right)^{-1} p$. Из этого следует, что симплектическая форма $\omega = \sum dp_i \wedge dq^i$ сохраняется при заменах координат и при действии группы A. Из первого следует, что многообразие T^*X является симплектическим, из второго следует, что действие является симплектическим. Почему-то мы взяли нестандартный знак симплектический формы, в терминах скобки Пуассона $\{p_i, q^j\} = \delta_{i,j}$.

Любому $J \in \mathfrak{a}$ соответствует векторное поле v_J на X. Тогда определим функция H_J на X по формуле $H_J(q,p) = -(v_J, p)$, где справа стоит спаривание между вектором и ковектором. В координатах

$$v_J = \sum v_J^i \frac{\partial}{\partial q^i}, \quad H_v = -\sum v_J^i p_i. \tag{6.27}$$

Функция H_J является гамильтонианом для векторного поля v_J как видно из формулы

$$\{q^i, H_J\} = v_J^i(q), \quad \{p_i, H_v\} = -\left(\frac{\partial v_J}{\partial q^i}\right) p.$$

Более того, легко видеть, что $\{H_{J_1}, H_{J_2}\} = H_{[J_1, J_2]}$, $\forall J_1, J_2 \in \mathfrak{a}$. Если проинтегрировать элемент алгебры Ли J_1 до элемента группы $g \in A$, то условие будет означать $g_* H_J = H_{\mathrm{Ad}_g J}$. Это условие означает, что действие группы A на X является не просто симплектическим, а гамильтоновым.

При помощи гамильтонианов H_J строится отображение моментов $\mu\colon T^*X \to \mathfrak{a}^*$, такое, что $(J, \mu(q,p)) = H_J(q,p)$. Это отображение является эквивариантным, действие группы A на T^*X соответствует коприсоединенному действию группы A на $\mathfrak{a}^*$.

Для любого элемента $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ можно рассмотреть его прообраз относительно отображения моментов $\mu^{-1}(\alpha)$. Пусть A_α — стабилизатор α в группе A при коприсоединенном действии A на $\mathfrak{a}^*$. Гамильтоновой редукцией называется фактор $\mu^{-1}(\alpha)/A_\alpha$. Можно брать прообраз всей коприсоединенной орбиты α по действию группы A.

Перейдем теперь к нужному нам примеру. Будем работать в обозначениях параграфа 6.2, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+$, и т. д.. В качестве многообразия X возьмем саму группу G. В качестве группы действующей на T^*G возьмем группу P, действующую слева. Тогда, гамильтонова редукция приводит (приблизительно) к $T^*G_+ \subset T^*(P\backslash G)$, на котором группа G действует справа. Отображение моментов для этого правого действия дает формулы для вложения алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в функции на T^*G, то есть классическую свободную реализацию. По формуле (6.27) легко перейти и к явному виду векторных полей на G_+, то есть к формуле для квантовой свободной реализации.

Напишем теперь это более явно. Обозначим через $\mu_L\colon T^*G \to \mathfrak{g}^*$ отображение моментов для левого действия G на T^*G. Левое действие группы G на себе не имеет стабилизатора в каждой точке, поэтому матрица $(v^i_{J_a})$ из формулы (6.27) является невырожденной. Поэтому функции μ_L могут быть рассмотрены как координаты на T^*G, вместо координат p_i. То есть точку в T^*G можно задавать как (g, μ_L). В этих обозначениях левое и правое действие элемента $x \in G$ имеет вид:

$$L_x(g, \mu_L) = (xg, \mathrm{Ad}^*x(\mu_L)), \quad R_x(g, \mu_L) = (gx, \mu_L). \tag{6.28}$$

В первой формуле использована эквивариантность отображения моментов. Во второй формуле использовано, то что левое и правое действия коммутируют, поэтому гамильтонианы левого действия инвариантны относительно умножения справа. Из условия отображения моментов следуют формулы для скобок этих координат

$$\{(J_1, \mu_L), (J_2, \mu_L)\} = ([J_1, J_2], \mu_L), \quad \{(J, \mu_L), g\} = \mathrm{L}_{v_{L(J)}} g, \tag{6.29}$$

здесь L_v — производная Ли относительно векторного поля v.

Аналогично можно ввести отображение моментов $\mu_R\colon T^*G \to \mathfrak{g}^*$ для правого действия группы G. Оно удовлетворяет аналогичным свойствам.

$$L_x(g, \mu_R) = (xg, \mu_R), \quad R_x(g, \mu_R) = (gx^{-1}, \mathrm{Ad}^*x(\mu_R)).$$

Используя эти свойства и формулу $\mu_R(e, \mu_L) = -\mu_L$ легко вывести формулу связи $\mu_R(g, \mu_L) = -\mathrm{Ad}^*(g^{-1})(\mu_L)$.

Зафиксируем элемент $\lambda \in \mathfrak{g}_0^*$ и рассмотрим гамильтонову редукцию для левого действия группы P на T^*G. Представим μ_L в виде суммы $\mu_L = \mu_{L,-} + \mu_{L,0} + \mu_{L,+}$ элементов из $\mathfrak{g}_-^*, \mathfrak{g}_0^*, \mathfrak{g}_+^*$. Тогда прообраз λ внутри большой клетки имеет вид $(g_- g_0 g_+, \lambda + \mu_{L,+})$. Теперь надо отфакторизовать по группе P. Ее действием мы можем привести элемент к виду $(g_+, \alpha_0 + \alpha_+)$, где

$$\alpha_0 = g_0^{-1}\lambda g_0, \;\; \alpha_+ = g_0^{-1}g_-^{-1}\Big(\lambda + \mu_{L,+}\Big)g_- g_0 - g_0^{-1}\lambda g_0.$$

Элемент $\alpha_0 \in \mathfrak{g}_0^*$ — элемент коприсоединенной орбиты λ и $\alpha_+ \in \mathfrak{g}_+^*$. В случае если λ является характером алгебр $\mathfrak{g}_0$ (случай который обсуждался в прошлых параграфах) имеем $\alpha_0 = \lambda$.

Можно сказать, что g_+, α_+, α_0 — это P-инвариантные функции на прообразе коприсоединенной орбиты $\mu_L^{-1}(\mathrm{Ad}(G_0)\lambda)$. Поэтому g_+, α_+ будут коммутировать с α_0. Между собой (g, α_+) будут удовлетворять соотношениям (6.29), то есть они являются координатами на $T * G_+$ и α_+ есть отображение моментов для левого действия G_+. Скобка на координатах α_0 совпадает со скобкой на коприсоединенной орбите.

В ограничении на это множество отображение моментов для правого действия задается формулой

$$\mu_R = -g_+^{-1}(\alpha_+ + \alpha_0)g_+. \tag{6.30}$$

Для того чтобы писать формулы в координатах q, p (или потом формулы для в терминах дифференциальных операторов $(q, \frac{\partial}{\partial q})$) надо выразить α_+ в этих терминах. Удобно при этом отождествить $\mathfrak{g}^*$ и $\mathfrak{g}$, то есть рассматривать α_+ и α_0 как элементы $\mathfrak{g}_-$ и $\mathfrak{g}_0$ соответственно.

Пример 6.14. Рассмотрим пример группы $G = GL(2)$. Запишем $g_+ = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Векторное поле касательное к левому действию G_+ на себе имеет вид $\frac{\partial}{\partial z}$. Гамильтониан равен $H = -p$, отождествляя $\mathfrak{g}_+^*$ с $\mathfrak{g}_-$ имеем $\alpha_+ = \begin{pmatrix} 0 & -p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. В качестве α_0 возьмем общий элемент, отождествляя $\mathfrak{g}_0^*$ с $\mathfrak{g}_0$ имеем $\alpha_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1, & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} E_{1,1} & E_{2,1} \\ E_{1,2} & E_{2,2} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ -p & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.31}$$

Перемножая матрицы получаем $e = p$, $h = -2zp - (\lambda_1 - \lambda_2)$, $f = -z^2 p - (\lambda - \lambda_2)z$. Если взять квантовый аналог формулы:

$$\begin{pmatrix} E_{1,1} & E_{2,1} \\ E_{1,2} & E_{2,2} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial z} & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.32}$$

то получаем $e = \frac{\partial}{\partial z}$, $h = -2z\frac{\partial}{\partial z} - (\lambda_1 - \lambda_2 + 1)$, $f = -z^2\frac{\partial}{\partial z} - (\lambda_1 - \lambda_2 + 1)z$.

Пример 6.15. Аналогично можно посмотреть на случай $G = GL(n)$. Единственное нетривиальное место это формула для α_+. Для этого надо явно задать действие G_+ на себе, для простых корней формулы на самом деле написаны в формулах для скринингов (6.25) выше. Например для $GL(3)$ имеем

$$\begin{pmatrix} E_{1,1} & E_{2,1} & E_{3,1} \\ E_{1,2} & E_{2,2} & E_{3,2} \\ E_{1,3} & E_{2.3} & E_{3,3} \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} 1 & z_{1,2} & z_{1,3} \\ 0 & 1 & z_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} - z_{2,3}p_{1,3} & \lambda_2 & 0 \\ -p_{1,3} & -p_{2,3} & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z_{1,2} & z_{1,3} \\ 0 & 1 & z_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.33}$$

Аналогично можно написать и квантовую формулу, см например [15, Утв. 7].

Пример 6.16. Пусть $G = GL(n)$, $G_0 = GL(n-1) \times GL(1)$ — группа блочно диагональных матриц, G_+, G_- группы соответствующих блочно верхетреугольных и нижнетреугольных матриц, см. пример 6.9 выше. Группа G_+ является абелевой изоморфной C^{n-1}, обозначим координаты на ней через $\vec{z} = (z_{1,2}, \ldots, z_{1,n})$. Левоинвариантные векторные поля являются просто $\partial/\partial z_{1,i}$. Тогда формула (6.30) принимает вид

$$\mu_R = -\begin{pmatrix} 1 & (\vec{z})^t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \vec{p} & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (\vec{z})^t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.34}$$

Здесь α — матрица состоящая из генераторов $\mathfrak{gl}_{n-1}$. При $\alpha = 0$ формула (6.34) есть классический аналог формулы (6.17).

Задача 6.6 (*). *[14] В аффинном случае формула для классической свободной реализации* (6.30) *превращается в*

$$-g_+^{-1}(\alpha_0 + \alpha_+)g_+ + Kg_+^{-1}\partial g_+. \tag{6.35}$$

Есть аналогичные квантовые формулы. Например для алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ имеет место такое разложение

$$\begin{pmatrix} E_{1,1}(z) & E_{2,1}(z) \\ E_{1,2}(z) & E_{2,2}(z) \end{pmatrix} = -{}^*_* \begin{pmatrix} 1 & \gamma(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \partial\varphi_1(z) & 0 \\ -\beta(z) & \partial\varphi_2(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} {}^*_* + \\ + k \begin{pmatrix} 1 & \gamma(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \partial \left(\begin{pmatrix} 1 & \gamma(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right). \tag{6.36}$$

Для того чтобы результат удовлетворял соотношениям $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ надо еще правильно отнормировать φ_1 и φ_2.

Квантовый аффинный аналог формул (6.34) есть индуктивные формулы (6.19).

7 Уравнения Книжника-Замолодчикова

7.1 Конформные блоки

Пространство конформных блоков было определено как двойственное пространство к пространству коинвариатов $V/(\mathfrak{g}(C - \vec{p}))$. Было сказано, что размерность этого пространства не зависит от комплексной структуры на кривой C и положения точек p_i. Получается расслоение на пространстве модулей $\mathcal{M}_{g,m}$ кривых с m отмеченными точками.

На самом деле в этом расслоении есть (проективно) плоская связность. *Конформные блоки* — это плоские сечения этой связности. Поскольку связность плоская, то, как минимум локально, сечения определяются по значению в одной точке, это объясняет термин «пространство конформных блоков» который мы использовали выше.

Для того, чтобы определить эту связность мы должны определить дифференцирования относительно векторов касательного пространства $T_{C,\vec{p}}\mathcal{M}_{g,m}$. Эти вектора соответствуют замене комплексной структуры и сдвигам точек. Начнем со сдвигов точек, сдвигу точки p_i сопоставляется оператор $\frac{\partial}{\partial t_i} = (L_{-1})_i$ действующий на векторном пространстве соответствующем i-й точке.

Эти общие слова верны для любой конформной теории, но для теории Весса-Зумино многое можно явно посчитать. Пусть $C = \mathbb{CP}^1$, положения точек это z_i, пусть пространства V_i являются модулями Вейля $V_{\lambda_i,k}$. Пространство конформных блоков отождествим с $\mathfrak{g}(C - \vec{p})$ инвариантными функционалами на $V_{\lambda_1,k} \otimes \ldots \otimes V_{\lambda_m,k}$, по следствию 3.5 это пространство отождествляется с пространством $\mathfrak{g}$-инвариантных функционалов на $L_{\lambda_1}\otimes\ldots\otimes L_{\lambda_m}$. Выберем вектора $v_i\in L_{\lambda_i}\subset V_{\lambda_i,k}$, тогда для любого инвариантного функционала $\langle\cdots\rangle$ имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_i}\Big\langle v_1\otimes\ldots\otimes v_m\Big\rangle=\Big\langle v_1\otimes\ldots\otimes(L_{-1}v_i)\ldots\otimes v_m\Big\rangle=\\ =\frac{1}{2(k+h^\vee)}\Big\langle v_1\otimes\ldots\otimes(\sum_{a,l}J^a_{-l}J^a_{1-l}v_i)\otimes\ldots\otimes v_m\Big\rangle=\\ =\frac{1}{k+h^\vee}\Big\langle v_1\otimes(\sum_a J^a_{-1}J^a_0 v_i)\otimes\ldots\otimes v_m\Big\rangle=\\ =\frac{-1}{k+h^\vee}\sum_{a,j\ j\neq i}\Big\langle v_1\otimes\ldots\otimes(\frac{J^a_0}{z_j-z_i}v_j)\otimes\ldots\otimes(J^a_0v_i)\otimes\ldots\otimes v_m\Big\rangle\end{aligned}\tag{7.1}$$

Второй переход основан на том, что $J^a_l v_i=0$, $l>0$. Третий переход основан на том, что функционал является инвариантным относительно элемента $\frac{1}{z-z_i}J_a$, который около i-й точки равен J^a_{-1}, около других точек z_j равен $\frac{1}{z_j-z_i}J^a_0$.

Получился ответ записанный просто в терминах $\mathfrak{g}$-инвариантных функционалов на $L_{\lambda_1}\otimes\ldots\otimes L_{\lambda_m}$. Обозначим через

$$H_i=\sum_{j,j\neq i}\frac{(J_a)_i(J_a)_j}{z_i-z_j}\tag{7.2}$$

оператор действующий на векторном пространстве $L^*_{\lambda_1}\otimes\ldots\otimes L^*_{\lambda_m}$. Тогда уравнение (7.1) (уравнение на плоское сечение) принимает вид

$$\kappa\frac{\partial}{\partial z_i}\Psi(z_1,\ldots,z_m)=H_i\Psi(z_1,\ldots,z_m),\tag{7.3}$$

где функция Ψ принимает значения в $\Big(L^*_{\lambda_1}\otimes\ldots\otimes L^*_{\lambda_m}\Big)^{\mathfrak{g}}$. Это уравнение называется уравнением Книжника-Замолодчикова.

Если модули V_i являются какими-то факторами модулей Вейля (например интегрируемыми модулями), то формула для связности будет такой-же, но только пространство будет меньше чем $\Big(L^*_{\lambda_1}\otimes\ldots\otimes L^*_{\lambda_m}\Big)^{\mathfrak{g}}$

Задача 7.1. *Докажите, что система Книжника-Замолодчикова является $\mathfrak{g}$ инвариантной, т.е. $[J,H_i]=0$, $\forall J\in\mathfrak{g}$.*

Замечание 7.1. Выше мы не обсуждали корректность определения, надо проверить что действие $(L_{-1})_i$ сохраняет пространство инвариантов. Корректность фактически следует из предыдущей задачи, так из нее следует, что оператор H_i действует на $\Big(L^*_{\lambda_1}\otimes\ldots\otimes L^*_{\lambda_m}\Big)^{\mathfrak{g}}$.

На самом деле корректность можно проверять без вычислений, надо проверить, что $(L_{-1})_i$ нормализует $\mathfrak{g}(C-\vec{p})$. Это следует из того, что $(L_{-1})_i$ есть просто $\frac{\partial}{\partial t_i}$.

Задача 7.2. *а) Пусть* $r_{ij}(z_i - z_j) = \frac{1}{z_i - z_j}\sum_a (J^a)_i(J^a)_j$. *Докажите, что*

$$[r_{ij}(z_i-z_j), r_{jk}(z_j-z_k)] + [r_{ik}(z_i-z_k), r_{jk}(z_j-z_k)] + [r_{ij}(z_i-z_j), r_{ik}(z_i-z_k)] = 0. \quad (7.4)$$

Это уравнение называется классическим уравнением Янга-Бакстера.

б)Докажите, что связность Книжника-Замолодчикова является плоской. То есть докажите, что $[\kappa\partial_i - H_i, \kappa\partial_j - H_j] = 0$.

Замечание 7.2. При определении действия $\mathfrak{g}(C - \vec{p})$ на векторном пространстве $V_1 \otimes \ldots \otimes V_m$ на векторном пространстве мы использовали локальные координаты t_i около каждой точки p_i. Далее, определяя действие алгебры Вирасоро мы тоже используем локальную координату. Поэтому формально мы получили расслоение не на $\mathcal{M}_{g,m}$ а на пространстве $\mathcal{M}_{g,m}^{\infty}$, где каждой в каждой точке выбрана локальная координата.

Посмотрим на зависимость от выбора этой координаты, т.е. относительно действия группы преобразований $t_i \mapsto c_{1,i}t + c_{2,i}t^2 + \ldots$, где $c_{1,i} \neq 0$. Эти $c_{l,i}$ можно воспринимать как дополнительные локальные координаты на $\mathcal{M}_{g,m}^{\infty}$ по сравнению с $\mathcal{M}_{g,m}$. Дифференцирование вдоль соответствующих направлений осуществляется при помощи действие генераторов Вирасоро $\frac{\partial}{\partial c_{l,i}} = (L_{l-1})_i$. Заметим, теперь, что аналогично вычислению (7.1) $\frac{\partial}{\partial c_{l,i}}\langle \cdots \rangle = 0$ при $l \geq 2$. Поэтому от координат $c_{l,i}$, $l \geq 2$ на самом деле ничего не зависит. Поэтому можно считать, что расслоение и связность определены на $\mathcal{M}_{g,m}^1$ — многообразии кривых рода g с m отмеченными точками, таких, что в каждой отмеченной точке выбран ненулевой касательный вектор (это эквивалентно заданию значения $c_{1,i}$). Можно еще этот переход к $\mathcal{M}_{g,m}^1$ объяснить без вычислений: многообразием $\mathcal{M}_{g,m}^{\infty}$ стягивается на $\mathcal{M}_{g,m}^1$

Дифференцирование по $c_{1,i}$ задается действием $(L_0)_i$. Вычисление (7.1) опять же показывает, что

$$\frac{\partial}{\partial c_{1,i}}\Big\langle v_1 \otimes \ldots \otimes v_m \Big\rangle = \frac{(\lambda, \lambda + 2\rho)}{2(k + h^{\vee})}\Big\langle v_1 \otimes \ldots \otimes v_m \Big\rangle.$$

Таким образом действие вдоль $c_{1,i}$ тоже по сути тривиально, после тензорного умножения на линейное расслоения связность вдоль этих направлений тоже становится тривиальной. Поэтому все сводится к расслоению на $\mathcal{M}_{g,m}$.

В общем случае касательное пространство к точке $(C, \vec{p}) \in \mathcal{M}_{g,m}$ равно $H^1(C, T(C) - \vec{p})$. Здесь уже учтены не только сдвиги точек, но и деформации комплексной структуры. Обычно эти деформации реализуются при помощи дифференциалов Бельтрами $\bar{\partial} \mapsto \bar{\partial} + \mu(z, \bar{z})d\bar{z}\partial$, деформация комплексной структуры $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \mapsto \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \mu(z, \bar{z})\frac{\partial}{\partial z}$.

Считать эти когомологии можно при помощи комплекса Чеха. У кривой берется открытое покрытие $U_1 = C - \vec{p}$, U_2 — объединение малых окрестностей точек p_i:

$$0 \to \left(T(C - \vec{p}) \oplus \bigoplus_i \mathbb{C}[[t_i]]t\frac{\partial}{\partial t_i} \right) \to \bigoplus_i \mathbb{C}[[t_i, t_i^{-1}]\frac{\partial}{\partial t_i} \to 0 \quad (7.5)$$

Элементам $\mathbb{C}[[t_i, t_i^{-1}]\frac{\partial}{\partial t_i}$ опять сопоставляем генератор алгебры Вирасоро действующий в i-м пространстве.

Замечание 7.3. Сопоставление элементам $\mathbb{C}[[t_i, t_i^{-1}]\frac{\partial}{\partial t_i}$ генераторов алгебры Вирасоры не учитывает центрального расширения. Это приводит к тому, что связность Книжника-Замолодчикова является не плоской, а *проективно плоской.*

Отметим, что операторы отвечающие сдвигам точек и замене локальной координаты лежат в подалгебре $\mathrm{Vir}_{\geq -1}$, в которой центральное расширение зануляется. Поэтому в роде 0 связность является плоской.

Задача 7.3 (*). *Посчитайте связность Книжника-Замолодчикова для какого-то примера рода больше 0.*

7.2 Интегральные формулы для решений

Уравнения (7.3) достаточно конкретны чтобы можно было изучать их и их решения забыв об их происхождении из конформной теории поля. Можно искать решения в $\Psi(z)$ принимающие значения в $L_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes L_{\lambda_m}$, здесь мы перестали переходить к двойственным пространствам и убрали условие $\mathfrak{g}$ инвариантности. Последнее условие можно понимать, как то, что мы положили в бесконечность прямую сумму всех представлений $\oplus_\lambda V_\lambda$, это никак не повлияет на операторы H_i, но изменит квантовое пространство.

В силу $\mathfrak{g}$ инвариантности, достаточно искать решения системы (7.3) которые являются старшими векторами относительно $\mathfrak{g}$. Остальные решения получаются из этих действием генераторов $\mathfrak{n}_-$.

Рассмотрим случай алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, тогда мы будем искать $\Psi(z) \in L_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes L_{\lambda_m}$ такие, что $e\Psi(z) = 0$ и $\Psi(z)$ решает систему (7.3). Также можно потребовать, чтобы Ψ был собственным относительно h_0: $h_0\Psi(z) = (\sum \lambda_i - 2N)\Psi(z)$.

Начнем со случая $N = 0$. Соответствующее весовое подпространство в $L_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes L_{\lambda_m}$ натянуто на старший вектор $v = v_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes v_{\lambda_m}$. Заметим, что действие оператора $\sum (J^a)_i \otimes (J^a)_j$ на старшем векторе $v_{\lambda_i} \otimes v_{\lambda_j}$ равен $\frac{1}{2}\lambda_i\lambda_j$. Тогда решение имеет вид $\Psi_0(z)v$, где

$$\Psi_0(z) = \prod_{i<j} (z_i - z_j)^{\frac{\lambda_i \lambda_j}{2\kappa}} \tag{7.6}$$

Теперь напишем решения для случая $N = 1$, это должна быть линейная комбинация векторов вида $v_{\lambda_1} \otimes \ldots f v_{\lambda_i} \otimes \ldots \otimes v_{\lambda_m}$. Обозначим

$$\Psi_1(z; t) = \Psi_0(z) \prod (t - z_j)^{-\lambda_j/\kappa}, \quad F(t) = \sum_j \frac{(f)_j}{t - z_j}. \tag{7.7}$$

Задача 7.4. *Докажите, что вектор*

$$\Psi_1(z) = \oint_C \psi_1(t) F(t) v dt \tag{7.8}$$

зануляется оператором e *и решает систему* (7.3).

Контур в этой формуле предполагается любым таким, что функция $\Psi_1(z)$ на нем однозначен, т.е. чтобы при обходе все монодромия (ветвление) сократилось. Для этого годятся петли вроде петли Похгаммера. Обобщение на случай произвольно N дается в следующей теореме.

Теорема 7.1. *Пусть*

$$\Psi_N(z,t) = \prod (z_i - z_j)^{\frac{\lambda_i \lambda_j}{2\kappa}} \prod_{p,j} (t_p - z_j)^{-\lambda_j/\kappa} \prod (t_p - t_q)^{2/\kappa} \tag{7.9}$$

Тогда вектора вида

$$\Psi_c(z) = \oint_C \Psi_N(z,t) F(t_1) \cdot \ldots F(t_N) v \, dt_1 \ldots dt_N. \tag{7.10}$$

зануляются оператором e и решает систему (7.3).

Замечание 7.4. Можно рассмотреть квазиклассический предел уравнений Книжника-Замолодчикова, когда $\kappa \to 0$. В терминах уровня k это означает, что $k \to -h^\vee$. Тогда асимптотика интегральной формулы (7.10) находится по методу перевала, интеграл высаживается на критические по t_i точки функции $Y(z,t) = \kappa \log \Psi_N(z,t)$, т.е. точки решающие уравнения вида

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\mu_i}{t_p - z_j} - \sum_{i,\, j \neq k} \frac{2}{t_p - t_q} = 0 \tag{7.11}$$

Эти уравнения называются уравнениями Бете для модели Годена. Теперь сами вектора имеют вид

$$e^{\frac{1}{\kappa} Y(z,t)} \det \left(\frac{\partial^2 Y(z;t)}{\partial z_i \partial z_j} \right)^{-1/2} F(t_1) \cdot \ldots \cdot F(t_N) v, \tag{7.12}$$

где $\vec{t}$ удовлетворяет уравнениям Бете. Обозначим, $B(\vec{t}) = F(t_1) \cdot \ldots \cdot F(t_N) v$, тогда из уравнений Книжника-Замолодчикова следует, что собственное значение H_i на векторе $B(\vec{t})$ равно $\partial Y / \partial z_i$. Кроме того, формула (7.12) говорит, что норма $B(\vec{t})$ связана с $\det \left(\frac{\partial^2 Y(z;t)}{\partial z_i \partial z_j} \right)$, доказательство возможно написано в [16], можно разобрать в качестве задачи.

7.3 Вывод из свободной реализации

Напомним, что в случае сферы мы выше, в параграфе 5.1, обсуждали другой подход к конформным блокам, основанный на операторном формализме. Пространство конформных блоков при этом отождествляется с пространством матричных элементов вида

$${}_0\langle \varnothing | \Phi_{\lambda_1}(z_1) \ldots \Phi_{\lambda_m}(z_m) | \varnothing \rangle_{\lambda_\infty} \tag{7.13}$$

Здесь, для простоты в точку 0 мы положили тривиальное представление, а в точку ∞ мы положили сумму всех модулей Вейля чтобы не ограничиваться $\mathfrak{g}$ инвариантами. Оператор Φ_{λ_i} действует

$$\Phi_{\lambda_i}(z)\colon V_{\mu_{i-1},k} \to V_{\mu_i,k} \otimes L_{\lambda_i'}(z) \tag{7.14}$$

Здесь мы считаем, что $\mu_0 = 0$, $\mu_m = \lambda_\infty$ — произвольное. Остальные числа μ_i могут быть любыми, с точки общей формулы для конформного блока (7.13) они определяют «промежуточный канал», с точки зрения сплетающего оператора (5.2) они задают его факторизацию. На μ_i есть ограничения — правила отбора, из задачи 5.2 следует, что пространство таких операторов изоморфно пространству инвариантов в $L^*_{\mu_{i-1}} \otimes L_{\mu_i} \otimes L_{\lambda_i}$. Можно тут не ссылаться на задачу, а доказать это непосредственно. В любом случае, μ_i при данных μ_{i-1} и λ_i принимает дискретное число значений, если λ_i доминантный вес, то просто, конечное, число значений.

Теперь нам нужно научиться дифференцировать по положениям точек z_i, для этого коммутировать с алгеброй Вирасоро.

Предложение 7.2. *Оператор $\Phi_\lambda\colon V_{\mu_0,k} \to V_{\mu_1,k} \otimes L_\lambda(z)$ удовлетворяет соотношениям*

$$[L_n, \Phi^j_\lambda(z)] = -\frac{z^n}{k+h^\vee} \sum_{a,j'} f^{a,j'}_j :J^a(z)\Phi^{j'}_\lambda(z): + (n+1)\Delta_\lambda z^n \Phi^j_\lambda(z), \tag{7.15}$$

где $\Delta_\lambda = \frac{(\lambda,\lambda+2\rho)}{2(k+h^{vee)})}$

Это предложение вытекает из формулы (5.1). Мы хотим воспринимать это соотношение как соотношение на примарные операторы относительно алгебры Вирасоро.

Предложение 7.3. *Пусть $\tilde\Phi_\lambda(z) = \Phi_\lambda(z) z^\Delta$, где $\Delta = \Delta_{\mu_1} - \Delta_\lambda - \Delta_{\mu_0}$. Тогда оператор $\tilde\Phi_\lambda$ удовлетворяется соотношению*

$$[L_n, \tilde\Phi^j_\lambda(z)] = z^{n+1}(\tilde\Phi^j_\lambda)'(z) + (n+1)\Delta_\lambda z^n \tilde\Phi^j_\lambda(z) \tag{7.16}$$

Доказательство. В силу соотношения (7.15) достаточно доказать равенство только для одного L_n, например для L_0. Если $v \in L_{\mu_0} \subset V_{\mu_0,k}$ вектор на «верхнем этаже» модуля Вейля, то $\tilde\Phi^j_\lambda v = v_1 \otimes u_j z^\Delta + \ldots$, где v_1 лежит на «верхнем этаже» модуля $V_{\lambda_1,k}$, а многоточие означает следующие этажи.

Тогда L_0 действует на v числом Δ_{μ_0}, а на v_1 числом Δ_{μ_1}, поэтому левая часть соотношения (7.16) равна

$$\Delta_{\mu_1} - \Delta_{\mu_0}(v_1 \otimes u_j z^\Delta + \ldots) = (\Delta + \Delta_\lambda)(v_1 \otimes u_j z^\Delta + \ldots) = (z\frac{\partial}{\partial z} + \Delta_\lambda)(v_1 \otimes u_j z^\Delta + \ldots).$$

Тем самым мы проверили соотношение (7.16) на «верхнем этаже», в силу градуированности всех представлений, легко видеть, что этого достаточно. $\square$

Рассмотрим теперь матричные элементы

$$_0\langle\varnothing|\tilde{\Phi}_{\lambda_1}(z_1)\dots\tilde{\Phi}_{\lambda_m}(z_m)|\varnothing\rangle_{\lambda_\infty}. \tag{7.17}$$

Для построение связности Книжника-Замолодчикова, нам нужно дифференцировать по z_i, но это можно сделать благодаря предыдущим предложением.

Задача 7.5. *Докажите, что матричные элементы* (7.17) *удовлетворяют уравнения Книжника Замолодчикова.*

Теперь для нахождения явных формул для решения уравнений Книжника-Замолодчикова нужно использовать явные формулы для вертексных операторов Φ_λ. Чтобы написать их можно использовать свободную реализацию обсуждавшуюся выше, см. формулу (6.5). Простейший пример оператора $\tilde{\Phi}$ задается следующей теоремой.

Теорема 7.4. *Сплетающий оператор*

$$\tilde{\Phi}\colon V_{\mu,k}\to V_{\lambda+\mu,k}\otimes L_\lambda(z) \tag{7.18}$$

задается формулой (здесь $v_{-\lambda}$ обозначает вектор младшего веса в L_λ)

$$\tilde{\Phi}^{(0)}(z)v = e^{\lambda/\sqrt{2\kappa}\varphi(z)}e^{-\gamma(z)\otimes e}(v\otimes v_{-\lambda}). \tag{7.19}$$

Доказательство. Мы используем букву f и для обозначения генераторов в алгебре Ли $\mathfrak{sl}_2$ и для обозначения матричных элементом в представлении. Чтобы обозначения не путались внутри одного доказательства сменим обозначения для генераторов следующим образом: $J^+=e$, $J^-=f$, $J^0=h$.

Выберем базис $u_j=\frac{1}{j!}(J^+)^j v_{-\lambda}$ в модуле L_λ. В этом базисе матричные элементы $f_j^{a,j'}$ генераторов J^+, J^0, J^- равны:

$$f_j^{+,j+1}=j+1,\quad f_j^{0,j}=-\lambda+2j,\quad f_j^{-,j-1}=\lambda-j+1. \tag{7.20}$$

Формула (7.19) означает, что $\tilde{\Phi}^j(z)=(-1)^j\gamma(z)^j e^{\lambda/\sqrt{2\kappa}\varphi(z)}$.

Достаточно проверить соотношение (5.1) для токов $J^-(z)$ и $J^+(z)$. Проверка устроена следующим образом:

$$\begin{aligned}
J^+(w)\tilde{\Phi}^j(z) &= (-1)^j j\frac{\gamma(z)^{j-1}e^{\lambda/\sqrt{2\kappa}\varphi(z)}}{w-z}+\text{reg.} = -f_{j-1}^{+,j}\frac{\tilde{\Phi}^{j-1}(z)}{w-z}+\text{reg.}\\
J^-(w)\tilde{\Phi}^j(z) &= (-1)^j(\lambda-j)\frac{\gamma(z)^{j+1}e^{\lambda/\sqrt{2\kappa}}}{w-z}+\text{reg.} = -f_{j+1}^{-,j}\frac{\tilde{\Phi}^{j+1}(z)}{w-z}+\text{reg.}.
\end{aligned}$$

□

При помощи таких операторов можно построить матричный элемент (7.17) только в случае $\lambda_\infty = \sum_{i=1}^m \lambda_i$. В более общей ситуации $\lambda_\infty = \sum_{i=1}^m \lambda_i - 2N$ операторы строятся при помощи скринингов введенных в формуле (6.7):

$$\tilde{\Phi}(z)\colon V_{\mu,k} \to M_{\mu+\lambda-2N,k} \otimes L_\lambda(z), \quad \tilde{\Phi}(z) = \oint_C \tilde{\Phi}^{(0)}(z) S(t_1) \cdots S(t_N) dt_1 \ldots dt_N. \tag{7.21}$$

Можно смотреть на эту формулу как композицию операторов $\tilde{\Phi}^{(0)}(z)$ и $(\oint S(t)dt)^N$, так как и тот и другой были сплетающими, то композиция будет сплетающим оператором. Более аккуратно, конечно, нужно еще определять контур C на котором интегральная функция становится однозначной.

Задача 7.6. *Докажите, что матричные элементы операторов* (7.21) *приводят к интегральным формулам вида* (7.10).

Список литературы

[1] B Bakalov, AA Kirillov *Lectures on tensor categories and modular functors*

[2] PI Etingof, I Frenkel, AA Kirillov *Lectures on representation theory and Knizhnik-Zamolodchikov equations*

[3] Ph. Di Francesco, P. Mathieu, D. Senechal *Conformal Field Theory* (1997)

[4] Ginzburg *Lectures on D -modules*

[5] Etingof *Algebraic D-modules* [`материалы курса в MIT`]

[6] Beauville *Conformal blocks, fusion rules and the Verlinde formula*

[7] A. Szenes, *The combinatorics of the Verlinde formula*

[8] D. Gepner *Fusion rings and geometry*

[9] M. Aganagic, S. Shakirov *Knot Homology from Refined Chern-Simons Theory*

[10] H. Kanno, K. Sugiyama, Y. Yoshida *Equivariant $U(N)$ Verlinde algebra from Bethe/Gauge correspondence*

[11] Bouwknegt, McCarthy, Pilch, *Quantum group structure in Fock space resolutions of $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ representations*

[12] [`Лекции 2017 года`]

[13] E. Frenkel *Lectures on Wakimoto modules, opers and the center at the critical level*

[14] de Boer, Feher *Wakimoto Realizations of Current Algebras: An Explicit Construction*

[15] Деркачёв, Манашов *Общее решение уравнения Янга–Бакстера с группой симметрии $SL(n,C)$*

[16] N. Reshetikhin, A. Varchenko *Quasiclassical asymptotics of solutions to the KZ equations*

Список задач

1.1 Задача . . . 3
1.2 Задача . . . 4
1.3 Задача . . . 4
1.4 Задача . . . 5
2.1 Задача . . . 7
2.2 Задача . . . 7
2.3 Задача . . . 9
3.1 Задача . . . 9
3.2 Задача . . . 11
3.3 Задача . . . 12
4.1 Задача . . . 13
4.2 Задача . . . 14
4.3 Задача . . . 14
4.4 Задача . . . 15
5.1 Задача . . . 17
5.2 Задача . . . 17
5.3 Задача (*) . . . 19
5.4 Задача . . . 19
5.5 Задача (*) . . . 22
5.6 Задача (*) . . . 22
5.7 Задача . . . 23
5.8 Задача . . . 25
5.9 Задача (*) . . . 25
5.10 Задача (*) . . . 26
5.11 Задача (*) . . . 26
6.1 Задача . . . 29
6.2 Задача . . . 33
6.3 Задача . . . 34
6.4 Задача . . . 35
6.5 Задача . . . 37
6.6 Задача (*) . . . 41
7.1 Задача . . . 42
7.2 Задача . . . 43
7.3 Задача (*) . . . 44
7.4 Задача . . . 44
7.5 Задача . . . 47
7.6 Задача . . . 48