# Конформная теории поля и связанные математические сюжеты

10 мая 2020 г.

Лекции в Сколтехе, осень 2017. Содержат опечатки, о найденных сообщайте по адресу mbersht@gmail.com

## Содержание

# 1. Вычисления в конформной теории при помощи свободных полей

## 1.1. Фоковские модули

Рассмотрим голоморфное бозонное поле $\varphi(z)$, с нормировкой $\varphi(z)\varphi(w) \sim -\log(z-w)$. Разложение этого поля имеет вид

$$\varphi(z) = -i\left(\sum_{n\neq 0}\frac{a_n}{nz^n} + \widehat{Q} + a_0\log z\right)$$

Тогда соотношения имеют вид $[a_n, a_m] = n\delta_{n+m,0}$, $[a_0, \widehat{Q}] = 1$. Тензор энергии импульса определен по формуле

$$T(z) = -\frac{1}{2} :(\partial\varphi(z))^2: + \lambda\partial^2\varphi(z). \tag{1.1}$$

Центральный заряд равен $c = 1+12\lambda^2$. В терминах Лиувиллевской параметризации $\lambda = (b^{-1}+b)/\sqrt{2}$. Можно написать явную формулу для генераторов $L_n$

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_{r+s=n} :a_r a_s: +i\lambda(n+1)a_n \tag{1.2}$$

Вертексные операторы $\mathcal{V}_\alpha =:e^{i\alpha\varphi}:$ являются примарными относительно этого $T(z)$ с конформной размерностью $\Delta_\alpha = \frac{1}{2}\alpha(\alpha+2i\lambda)$. Можно написать это в терминах состояний: рассмотрим старший вектор $|\alpha\rangle$ определенный условиями

$$a_k|\alpha\rangle = 0 \;\; k>0, \quad a_0|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle.$$

Тогда $L_0|\alpha\rangle = \Delta_\alpha|\alpha\rangle$. Отметим еще симметрию $\Delta_\alpha = \Delta_{-2i\lambda-\alpha}$. Эта симметрия нам еще будет нужна.

Действие генераторов $a_k$, $k<0$ на вектор $|\alpha\rangle$ порождает модуль. Этот модуль имеет базис состоящий из векторов вида $a_{-\mu}|\alpha\rangle$, $\mu = (\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_k > 0)$. Обычно этот модуль называют фоковским и обозначают $\mathrm{F}_\alpha$. Формулы (1.2) определяют действие алгебры Вирасоро на модуле $\mathrm{F}_\alpha$. При общем $\alpha$ конформная размерность $\Delta_\alpha \neq \Delta_{m,n}$, значит модуль $\mathrm{F}_\alpha$ неприводим как модуль над алгеброй Вирасоро. При специальных $\alpha$ конечно ситуация интереснее.

На модуле $\mathrm{F}_\alpha$ тоже есть форма Шаповалова построенная по правилу сопряжения операторов $a_n^\dagger = -a_{-n}$. Однако при этом сопряжении $L_n$ вообще говоря переходит не в себя

$$L_n^\dagger = \frac{1}{2}\sum_{r+s=-n} :a_r a_s: -i\lambda(n+1)a_{-n} = \frac{1}{2}\sum_{r+s=-n} :a_r a_s: +i\lambda(-n+1)a_{-n} - 2i\lambda a_{-n}.$$

В этом вычислении мы считали, что форма Шаповалова является комплексно симметричной. Можно считать форму эрмитовой, но тогда надо считать $i\lambda$ вещественным, т.е. $c<1$.

Если ввести другую алгебру Гейзенберга $\tilde{a}_n = -a_n + \delta_{n,0}2i\lambda$, то

$$L_n(a)^\dagger = \frac{1}{2}\sum_{r+s=-n} :\tilde{a}_r\tilde{a}_s: +i\lambda(-n+1)\tilde{a}_{-n} = L_{-n}(\tilde{a}).$$

Таким образом получаем, что относительно Вирасоровоской формы Шаповалова двойствеными модулями являются $\mathrm{F}_\alpha$ и $\mathrm{F}_{-2i\lambda-\alpha}$.

Для полноты картины сопоставим еще параметр $\alpha$ с (Лиувиллевской) параметризацией через параметр $P$. Имеем

$$\frac{1}{2}\alpha(\alpha+2i\lambda) = (\frac{b^{-1}+b}{2})^2 - P^2, \quad \lambda = (b^{-1}+b)/\sqrt{2}.$$

Откуда

$$P = \frac{-i}{\sqrt{2}}\alpha - \frac{b^{-1}+b}{2}, \qquad \alpha = i\sqrt{2}P - \frac{i}{\sqrt{2}}(b^{-1}+b). \tag{1.3}$$

В частности специальным значениям $P = P_{m,n}$ соответствуют

$$\alpha_{m,n} = \frac{i}{\sqrt{2}}((m-1)b^{-1} + (n-1)b). \tag{1.4}$$

**Задача 1.1.** *Найдите матрицу перехода от базиса $a_{-\mu}|\alpha\rangle$ к базису $L_{-\mu}|\alpha\rangle$ на втором уровне Фоковского модуля. Найдите ее определитель, при каких $\alpha$ он зануляется? Выведите из этого определитель формы Шаповалова на втором уровне в модуле Верма $V_{\Delta_\alpha}$.*

## 1.2. Конформные блоки: случай свободных полей

*Вертексный оператор* размерности $\Delta$ для алгебры Вирасоро — это оператор $\Phi_\Delta(z)$ который удовлетворяет коммутационным соотношениям

$$[L_n, \Phi(z)] = (z^{n+1}\partial_z + \Delta(n+1)z^n)\Phi_\Delta(z) \tag{1.5}$$

Напомним, что эта формула получается из формулы со слиянием

$$T(z)\Phi_\Delta(w) = \frac{\Delta\Phi_\Delta(w)}{(z-w)^2} + \frac{\Phi'_\Delta(w)}{(z-w)} + \mathrm{reg}$$

перестановкой контуров (если это непонятно, то полезно вспомнить!).

Поля $\mathcal{V}_\alpha$ являются примарными. Формально алгебраически это означает, что оператор $\mathcal{V}_\alpha$ действующий из Фоковского модуля $\mathrm{F}_\beta$ в модуль $\mathrm{F}_{\beta+\alpha}$ удовлетворяет соотношению (1.5).

Естественно хотеть написать формулу для конформных блоков используя бозонизацию. Например четырехточку полей $\mathcal{V}_{\alpha_1}, \mathcal{V}_{\alpha_2}, \mathcal{V}_{\alpha_3}, \mathcal{V}_{\alpha_4}$ Вертексный оператор $\mathcal{V}_{\alpha_2}(z)$ бьет из модуля $\mathrm{F}_{\alpha_1}$ в модуль $\mathrm{F}_{\alpha_1+\alpha_2}$, следующий оператор $\mathcal{V}_{\alpha_3}(z)$ бьет в модуль $\mathrm{F}_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}$. Чтобы посчитать затем спаривание со старшим вектором модуля $\mathrm{F}_{\alpha_4}$ необходимо, чтобы $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = -\alpha_4 - 2i\lambda$. Таким образом при помощи свободных полей легко вычислить четырехточечный конформный блок

$$\mathcal{F}(\vec{\Delta}, \Delta, c|z) = \langle \mathcal{V}_{\alpha_1}(0)\mathcal{V}_{\alpha_2}(z)\mathcal{V}_{\alpha_3}(1)\mathcal{V}_{\alpha_4}(\infty)\rangle = z^{\alpha_1\alpha_2}(1-z)^{\alpha_2\alpha_3},$$

где $\Delta_i = \Delta_{\alpha_i}$, $\Delta = \Delta_\alpha$ и выполнено два дополнительных соотношения на параметры конформного блока: $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = -2i\lambda$ $\alpha = \alpha_1+\alpha_2$ — два условия сохранения заряда. Отметим, что здесь мы используем нормировку конформного блока в которой ряд начинается не с 1, а с $z^{\Delta-\Delta_1-\Delta_2}$, это более естественно если смотреть на конформный блок как на матричный элемент. В литературе используются обе нормировки.

Скажем еще по другому о том, что произошло. Конформный блок — объект универсальный (во всяком случае для симметрии Вирасоро), его можно вычислять в любой теории. Мы взяли теорию свободного поля (на самом деле не совсем из-за удлинения на $\lambda$ в формуле (1.2)) и вычислили конформный блок в случае выполнения условия сохранения заряда. Но другие конформные блоки в этой теории вычислить нельзя, они автоматически зануляются из-за нулевой моды $a_0$. Можно сказать, что зануляется структурная константа. Поэтому о самих блоках мы ничего не знаем.

### 1.3. Вертексные операторы одетые скринингом

Хочется конечно избавится от условий сохранения заряда и научиться вычислять конформные блоки в более общих ситуациях, за рамками условия сохранения заряда. Это можно сделать при помощи следующего приема принадлежащего Доценко и Фатееву (следуя идее из работы Фейгина и Фукса). А именно, баланс заряда можно достичь вставляя в конформный блок операторы вида $S = \oint :e^{i\alpha\varphi(z)}: dz$. Для того чтобы такая вставка была согласована с определением конформного блока надо чтобы оператор $S$ коммутировал с алгебрай Вирасоро. Этого можно достичь:

$$[L_n, \oint :e^{i\alpha\varphi(z)}: dz] = \oint \left( z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z} + \Delta_\alpha(n+1)z^n \right) :e^{i\alpha\varphi(z)}: dz = \\ = \oint \frac{\partial}{\partial z}\left( z^{n+1} :e^{i\alpha\varphi(z)}: \right) dz = 0, \quad (1.6)$$

где предпоследний переход верен только если

$$1 = \Delta_\alpha = \frac{1}{2}\alpha(2i\lambda + \alpha).$$

Получается квадратное уравнение на $\alpha$ которое имеет два решения:

$$\alpha_+ = -i\sqrt{2}b, \quad \alpha_- = -i\sqrt{2}b^{-1}. \quad (1.7)$$

Соответствующие операторы обозначаются $S_+$ и $S_-$ и называются *экранирующими операторами* или *скринингами*. Вертексные операторы $S_+(x) = e^{i\alpha_+\varphi(z)}$ и $S_-(x) = e^{i\alpha_-\varphi(z)}$ называются *скрининговскими токами*.

Теперь можно взять

$$\Phi_\Delta(z) = \oint \mathcal{V}_\alpha(z)S_+(x)dx \colon \mathrm{F}_\beta \to \mathrm{F}_{\beta+\alpha+\alpha_+}. \quad (1.8)$$

В коммутаторе $[L_n, \Phi_\Delta]$ мы получим сумму двух слагамых — из коммутации с $\mathcal{V}_\alpha(z)$ и из коммутатции с $S_+(x)$. Однако второе слагаемое будет полной производной и даст ноль после интегрирования. Таким образом мы проверили соотношения (1.5) для той же размерности $\Delta = \Delta_\alpha$.

В этом рассуждении контур в формуле (1.8) мог быть любым замкнутым контуром. Но смысл слова замкнутый на самом деле нетривиален. Пусть этот оператор $\Phi_\Delta$ действует на модуль $\mathrm{F}_\beta$, тогда после нормального упорядочения получается интеграл $\oint x^{\beta\alpha_+}(x-z)^{\alpha\alpha_+}z^{\alpha\beta}A(x,z)dx$, где $A(x,z)$ это ряд Лорана. При общих значениях $\alpha, \beta, \alpha_+$ подинтегральное выражение имеет нетривиальные монодромии при обходе вокруг точки 0 и точки $z$. Чтобы контур считался замкнутым надо чтобы эта монодромия при обходе по контуру равнялась 1, иначе интеграл от полной производной — разность значений первообразной на концах — не будет равен нулю. Можно еще это так объяснить: из-за монодромии интеграл ведется не по $\mathbb{C} - \{0, z\}$, а некоторому накрытию, которое является более сложной римановой поверхностью, и интеграл должен быть замкнут на ней. Более удобно говорить не про накрытие, а про гомологии с коэффициентым в локальной системе, это мы обсудим через какое-то время.

Есть стандартный способ выбрать контур в формуле (1.8), и даже два. Первый способо — это взять петлю Похгаммера охватывающую точки $0, z$. Второй способ это взять отрезок $[0, z]$, этот контур не замкнутый, но так как значения первообразной подинтегрального выражения на концах равны нулю, то интеграл от полной производной занулится. Эти два контура на самом деле надо воспрнимать как представителей гомологий дополнения $\mathbb{C} - \{0, z\}$ и относительных гомологий $(\mathbb{C}, \{0, z\})$.

Мы не обсуждали вопрос сходимости интеграла, можно это все понимать так, что мы вычисляем интеграл при тех параметрах $(\alpha, \beta, \alpha_+)$ при которых он сходится и далее аналитически продолжаем по ним.

Вернемся к формуле (1.8). Ясно что можно аналогично вставлять много скрининговских операторов, тогда мы получим формулу

$$\Phi_\Delta = \oint \mathcal{V}_\alpha(z) S_+(x_1) \cdots S_+(x_r) S_-(y_1) \cdots S_-(y_s) dx_1 \cdots dy_s \tag{1.9}$$

Коммутационные соотношения с алгеброй Вирасоро будут правильным опять же при условии, что не будет проблем с контуром. Немного сленгово это называется одеванием оператора $\mathcal{V}_\alpha(z)$ при помощи скринингов.

## 1.4. Конформные блоки со вставленным скринингами

Вернемся к задаче вычисления конформного блока $\mathcal{F}(\vec{\Delta}, \Delta, c|z)$. Определим теперь $\Phi_{\Delta_2}$ как оператор $\mathcal{V}_{\alpha_2}$ одетый $r_2$ скринингами $S_+$ и $s_2$ скринингами $S_-$. Аналогично, пусть $\Phi_{\Delta_3}$ — это оператор $\mathcal{V}_{\alpha_3}$ одетый $r_3$ скринингами $S_+$ и $s_3$ скринингами $S_-$.

Тогда $\Phi_{\Delta_2} \colon \mathrm{F}_{\alpha_1} \to \mathrm{F}_{\alpha_1+\alpha_2+r_2\alpha_++s_2\alpha_-}$,$\Phi_{\Delta_3} \colon \mathrm{F}_{\alpha} \to \mathrm{F}_{\alpha+\alpha_3+r_3\alpha_++s_3\alpha_-}$. Тогда условие сохранение заряда имеет вид

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + r_2\alpha_+ + s_2\alpha_-, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -2i\lambda - r\alpha_+ - s\alpha_-,$$

где $r = r_2 + r_3$, $s = s_2 + s_3$ суммарное числа вставленных плюсовых и минусовых скринингов соответственно. Конформный блок имеет вид $r + s$ кратного интеграла.

Разберем простейший пример. Пусть выполнено условие суммы зарядов $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -2i\lambda - \alpha_+$, то есть конформный блок задается интегралом

$$\mathcal{F}(\vec{\Delta}, \Delta, c|z) = \oint \langle \mathcal{V}_{\alpha_1}(0) \mathcal{V}_{\alpha_2}(z) \mathcal{V}_{\alpha_3}(1) \mathcal{V}_{\alpha_4}(\infty) \mathcal{V}_{\alpha_+}(x) \rangle dx =$$
$$= z^{\alpha_1\alpha_2}(1-z)^{\alpha_2\alpha_3} \oint x^{\alpha_1\alpha_+}(z-x)^{\alpha_2\alpha_+}(1-x)^{\alpha_3\alpha_+} dx \tag{1.10}$$

Известно, что полученный интеграл является решением гипергеометрического уравнения. В качестве замкнутого контура обычно берется петля Похгаммера охватывающая две особые точки из 4 $(0, z, 1, \infty)$. И эту петлю можно продеформировать в отрезок соединяющий две особые точки. Обозначим через $C_1$ отрезок соединяющий

$0, z$ и через $C_2$ отрезок соединяющий $1, \infty$. Тогда

$$\oint_{C_1} x^A (x-z)^B (1-x)^C dx =$$
$$= z^{1+A+B} \frac{\Gamma(A+1)\Gamma(B+1)}{\Gamma(A+B+2)} {}_2F_1(-C, 1+A, 2+A+B|z) \quad (1.11)$$

$$\oint_{C_2} x^A (x-z)^B (1-x)^C dx =$$
$$= \frac{\Gamma(-A-B-C-1)\Gamma(C+1)}{\Gamma(-A-B)} {}_2F_1(-B, -A-B-C-1, -A-B|z) \quad (1.12)$$

В случае обоих контуров ответ имеет вид ряда по $z$, т.е. как и должено быть для конформного блока. Более того, понятно, что первый контур происходит из петли вокруг точек $0, z$, т.е. из одевания скринингом вертексного оператора $\mathcal{V}_{\alpha_2}$. А второй контур происходит из одевания скринингом вертексного оператора $\mathcal{V}_{\alpha_3}$.

Это можно еще проверить сравнив лидирующие степени $z$. В нашей нормировке она равна $\Delta_\alpha - \Delta_{\alpha_1} - \Delta_{\alpha_2}$. Для контура $C_2$ получается

$$\Delta_\alpha - \Delta_{\alpha_1} - \Delta_{\alpha_2} = \alpha_1 \alpha_2 \quad (1.13)$$

откуда следует, что $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Для контура $C_1$ уравнение имеет вид

$$\Delta_\alpha - \Delta_{\alpha_1} - \Delta_{\alpha_2} = \alpha_1 \alpha_2 + 1 + \alpha_1 \alpha_+ + \alpha_2 \alpha_+ \quad (1.14)$$

откуда следует, что $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_+$.

При помощи интегралов подобного рода, в принципе можно вычислять все конформные блоки для вырожденных полей $\alpha_{m,n}$. Другими словами, в этом случае какое-то условие резонанса всегда выполнено, так как соответствующие параметры равны

$$\alpha_{m,n} = \frac{(1-m)\alpha_- + (1-n)\alpha_+}{2}. \quad (1.15)$$

и $\alpha_+ + \alpha_- = -2i\lambda$. Этот способ вычисления конформных блоков принадлежит Доценко-Фатееву [12].

**Задача 1.2.** *Расмотрим случай центрального заряда равного $c = \frac{1}{2}$. Рассмотрим конформную теорию с тремя примарными полями $I$ размерности $0$, $\sigma$ размерности $\frac{1}{16}$ и $\psi$ размерности $\frac{1}{2}$, представляения порожденные этими полями мы возьмем неприводимыми (отфакторизованным по сингулярным векторам). Эта теория называется (киральной) конформной теорией Изинга. Разберитесь какие сингулярные вектора есть у полей $I, \psi, \sigma$. Найдите 4-точечный коррелятор четырех полей $\sigma$ в этой теории. Сравните с имеющимися в литературе ответами для корреляторов в киральной конформной теории Изинга.*

# 2. Скрининги

## 2.1. Примеры

**Пример 2.1** ($\lambda = 0$)**.** В этом случае центральный заряд равен $c = 1$. Решая квадратное уравнение, получаем $\alpha_+ = \sqrt{2}$, $\alpha_- = -\sqrt{2}$. Тогда имеем для токов

$$S_+(z) = \exp(i\sqrt{2}\varphi(z)), \quad S_-(z) = \exp(-i\sqrt{2}\varphi(z)). \tag{2.1}$$

Если мы обозначим $e(z) = S_+(z)$, $f(z) = S_-(z)$, $h(z) = i\sqrt{2}\partial\varphi(z)$, то эти токи образуют алгебру $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ на уровне 1.

**Задача 2.1.** *Рассмотрим четырехточечтный конформный блок при $c = 1$ в котором $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + n\alpha_+$, $\sum \alpha_i + n\alpha_+ = 0$. Напишите для него интегральное представление (в качестве области интегрирования можно взять например куб $0 \le x_1, \ldots, x_n \le z$). Сравните с интегралами возникающими в матричных моделях, представьте этот интеграл в виде Ганкелевского детерминанта размера $n \times n$.*

**Пример 2.2** ($\lambda = i/2$)**.** В этом случае $c = -2$. Решая квадратное уравнение получаем $\alpha_+ = 2$, $\alpha_- = -1$. Тогда имеем для токов

$$S_+(z) = \exp(2i\varphi(z)), \quad S_-(z) = \exp(-i\varphi(z)).$$

Обозначим $\psi^*(z) = \exp(-i\varphi(z))$, $\psi(z) = \exp(i\varphi(z))$. Мы получили представление стандартной фермионной алгебры (или $b - c$ системы), в терминах компонент соотношения можно записать как:

$$\psi(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \psi_r z^{-r-\frac{1}{2}},\ \psi(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \psi_r z^{-r-\frac{1}{2}},$$
$$\{\psi_r, \psi_s\} = \{\psi_r^*, \psi_s^*\} = 0,\ \{\psi_r, \psi_s^*\} = \delta_{r+s}.$$

В терминах фермионов скринговские токи имеют вид $S_-(z) = \psi^*(z)$, $S_+(z) = \psi(z)\partial\psi(z)$.

**Задача 2.2.** *Если вы этого никогда не делали, то докажите приведенные выше утверждения про реализацию алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ и фермионы в терминах вертексных операторов.*

## 2.2. Скрининги и сингулярные вектора

Другое (а исторически более раннее), применение скринингов — это построение сингулярных векторов. Действительно, если оператор

$$S_+ = \oint :e^{i\alpha_+\varphi(x)}: dx \tag{2.2}$$

действует из одного Фоковского модуля $\mathrm{F}_\alpha$ в другой $\mathrm{F}_{\alpha+\alpha_+}$, то тогда вектор $S_+|\alpha\rangle \in \mathrm{F}_{\alpha+\alpha_+}$ будет сингулярным вектором (так как $S_+$ коммутирует с алгеброй Вирасоро).

Для этого нужно чтобы контур в интеграле (2.2) замыкался и чтобы образ $|\alpha\rangle$ был не равен нулю. Это приводит к таким ограниченям:

$$\alpha\alpha_+ \in \mathbb{Z}, \qquad \Delta_{\alpha+\alpha_+} < \Delta_\alpha. \tag{2.3}$$

Из первого условия вытекает, что $\alpha = \frac{m}{2}\alpha_-$, $m \in \mathbb{Z}$, тогда из второго условия следует, что $m > 1$. Итого

$$\alpha + \alpha_+ = \frac{m}{2}\alpha_- + \alpha_+ = \alpha_{1-m,-1} \tag{2.4}$$

где мы использовали формулу (1.15). Значит, модуль со старшим весом $\Delta_{\alpha+\alpha_+} = \Delta_{m-1,1}$ имеет сингулярный вектор. Мы доказали некую часть теоремы Каца-Фейгина-Фукса.

Ясно, что если бы использовали скриннг $S_-$, то доказали существование сингулярного вектора в модуле со старшим весом $\Delta_{1,n-1}$, $n \in \mathbb{Z}_{>1}$.

**Задача 2.3.** *Пусть $\lambda = 0$ то есть центральных заряд равен 1. Рассмотрим сумму фоковских модулей $\oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{F}_{n\sqrt{2}}$. В предыдущем пункте мы уже говорили, что на этом пространстве действует алгебра $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ и нулевые компоненты $e_0, f_0$ являются скринингами. т.е. коммутируют с алгеброй Вирасоро. Найдите сингулярные вектора в модулях $\mathrm{F}_{n\sqrt{2}}$ (в каждом их них бесконечное число сингулярных векторов), каким $\alpha_{m,n}$ они соответствуют?*

Мы могли наложить другое неравенство т.е. положить

$$\alpha\alpha_+ \in \mathbb{Z}, \qquad \Delta_{\alpha+\alpha_+} > \Delta_\alpha. \tag{2.5}$$

Тогда скрининг $S_+$ будет действовать, но вектор $S_+|\alpha\rangle$ будет равен нулю. Однако, так как $S_+ \neq 0$ (а это легко понять), то будут вектора которые переходят не в ноль, а в случае общего положения модуль $\mathrm{F}_{\alpha+\alpha_+}$ будет неприводимым и найдется вектор в $\mathrm{F}_\alpha$ который переходит в $|\alpha + \alpha_+\rangle$. Этот вектор называется косингулярным[1], он не получается из старшего вектора $|\alpha\rangle$ действием генераторов алгебры Вирасоро, хотя получается действием генерататов алгебры Гейнзеберга.

В любом случае, наличие такого вектор означает, что Фоковский модулю не изоморфен модулю Верма, откуда следует, что модуль Верма приводим. Решая соотношения (2.5) получаем

$$\alpha = \frac{1-m}{2}\alpha_- = \alpha_{1,m}, \quad m \in \mathbb{Z}_{>0}. \tag{2.6}$$

Отметим, что при $\alpha = \alpha_{1,m}$ и $\alpha = \alpha_{-1,-m}$ размерности $\Delta_\alpha$ равны, но Фоковские модули различны — один содержит сингулярный вектор (и на самом деле изоморфен модулю Верма, если $\lambda$ общий), другой содержит косингулярный вектор (и изоморфен контраградиентному модулю).

[1]этот вектор определен не однозначно, аккуратнее говорить, что есть сингулярный вектор в двойственном пространстве

## 2.3. Степень скрининга

Для того, чтобы построить сингулярные вектора в модулях Верма $V_{\Delta_{m,n},c}$ можно использовать операторы

$$S_+^{(n)} = \int_{\Gamma_n} \prod_{j=1}^{n} :e^{i\alpha_+\varphi(x_j)}: dx_j = \int_{\Gamma_n} :e^{\sum_j i\alpha_+\varphi(x_j)}: \prod_{j=1}^{n}\prod_{j<j'} (x_j - x_{j'})^{\alpha_+^2} x_j^{\alpha\alpha_+} dx_j. \tag{2.7}$$

Цикл $\Gamma_n$ должен быть подбран так чтобы интеграл имел смысл и не равнялся нулю. Если бы $\Gamma_n$ было бы просто произведением $n$ окружностей из формулы (2.2) то $S_+^{(n)}$ бы просто равнялось $S_+^n$, но в общем случае это не так. Получается любопытная ситуация: оператор $S_+$ по формуле (2.2) не определен, но его «степень» (2.7) определена. И сингулярный вектор в модуле $V_{\Delta_{m,n},c}$ будет равен $S_+^{(n)}|\alpha\rangle$.

Рассмотрим случай $n = 2$, мы хотим определить $S_+^{(2)}$. Т.е. мы хотим вычислить гомологии локальной системы с весовой функцией $f(x_1, x_2) = x_1^\beta x_2^\beta (x_1 - x_2)^\gamma$, где $\beta = \alpha\alpha_+, \gamma = \alpha_+^2$. Интеграл имеет вид

$$\int_{\Gamma_2} :e^{i\alpha_+\varphi(x_1)+i\alpha_+\varphi(x_2)}: f(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \tag{2.8}$$

Для случая $n = 2$ можно указать (на самом деле единственно возможный) контур явно. Запишем экспоненту в виде $e^{i\alpha_+\varphi(x_1)+i\alpha_+\varphi(x_2)} = \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} A_{k_1,k_2} x_1^{k_1} x_2^{k_2}$, где $A_{k_1,k_2}$ операторы. Ясно, что $A_{k_1,k_2} = A_{k_2,k_1}$. Пусть $x = x_1$, $y = x_2/x_1$, тогда интеграл может быть приведен к виду

$$\int \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} A_{k_1,k_2} y^{k_2+\beta}(1-y)^\gamma x^{2\beta+\gamma+k_1+k_2+1} dx dy. \tag{2.9}$$

Интеграл распался в произведение двух, контур по $y$ это петля Похгаммера вокруг 0 и 1, контур по $x$ это окружность вокруг нуля. Для того, чтобы интеграл по $x$ сходился необходимо и достаточно, чтобы $2\beta + \gamma + k_1 + k_2 + 1 = -1$, т.е. число $2\beta+\gamma$ было целым и меньшим $-1$. Последнее неравенство мы на самом деле равносильно нашему предположению $0 > \Delta_{\alpha+2\alpha_+} - \Delta_\alpha = 2\alpha\alpha_+ + \alpha_+^2 + 1$. Значит, условием того, что контур замыкается является условие $2\beta + \gamma \in \mathbb{Z}$.

Однако нам нужно, что бы наш интеграл не равнялся нулю, так как интеграл симметричен по $x_1, x_2$ то надо чтобы группа $S_2$ тривиально действовала на вторых гомологиях локальной системы. Вычисляем вклад $A_{k_1,k_2}$ в интеграл:

$$\int A_{k_1,k_2} y^\beta (1-y)^\gamma (y^{k_1}+y^{k_2}) dy = A_{k_1,k_2} \left( \frac{\Gamma(\beta+k_1+1)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\beta+\gamma+k_1+2)} + \frac{\Gamma(\beta+k_2+1)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\beta+\gamma+k_2+2)} \right) =$$
$$= A_{k_1,k_2}\Gamma(\gamma+1) \frac{\pi/\sin(\pi(\beta+k_2+1)) + \pi/\sin(\pi(\beta+k_1+1))}{\Gamma(\beta+\gamma+k_2+2)\Gamma(\beta+\gamma+k_1+2)}. \tag{2.10}$$

Если $k_1 - k_2$ нечетное, то эта сумма равна нулю. Поэтому скрининг есть только если $2\alpha\alpha_+ + \alpha_+^2 = -2m$. Тогда $\alpha = \frac{m}{2}\alpha_- - \frac{1}{2}\alpha_+$, $\alpha + 2\alpha_+ = \frac{m}{2}\alpha_- + \frac{3}{2}\alpha_+ = \alpha_{1-m,-2}$.

## 3. Классические $W$ алгебры [9],[2]

### 3.1. Интегрируемые иерархии Гельфанда-Дикого

Мы будет считать, что все функции в этом параграфе — это комплекснозначные гладкие периодические функции, интеграл $\int \ldots dx$ всегда понимается как интеграл по периоду.

Рассмотрим скалярное уравнение Лакса

$$\frac{dL}{dt} = [A, L].$$

Здесь $L = D^n + u_1 D^{n-1} + \ldots + u_n$, $A = \sum_{i=0}^{m} v_i D^i$ два дифференциальных оператора, $D = \partial/\partial x$. Левая часть уравнения Лакса является оператором степени $n-1$, правая часть является оператором степени $m+n-1$. Таким образом при данном $L$ мы получаем $m$ уравнений на функции $u_i$. Красивый способ описывать все решения использует псевдодифференциальные операторы.

*Псевдодифференциальным оператором* мы будем называть выражение вида $X = \sum_{i=m}^{-\infty} x_i D^i$. Такие операторы образуют алгебру, ясно что их можно складывать, но на самом деле их можно умножать по формуле

$$D^k f = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{k}{i} f^{(i)} D^{k-i}.$$

При $k < 0$ справа стоит бесконечная сумма, но все равно это корректно определенный псевдодифференциальный оператор.

Для псеводифференциального оператора $X$ мы будем обозначать

$$X_+ = \sum_{i=m}^{0} x_i D^i, \quad X_- = \sum_{i=-1}^{-\infty} x_i D^i, \quad \operatorname{res} X = x_{-1}.$$

**Лемма 3.1.** *Пусть $X = \sum_{i=m}^{-\infty} x_i D^i$, и $x_m = 1$. Тогда существует единственный псевдодифференциальный оператор $X^{-1}$ и единственный псевдодифференциальный оператор $X^{1/m}$ начинающийся с $D$.*

**Лемма 3.2.** *Псевдодифференциальный оператор $X$ порядка $m$ удовлетворяет $[X, L] = 0$, тогда и только тогда, когда существуют числа $c_i \in \mathbb{C}$ такие, что*

$$X = \sum_{i=m}^{-\infty} c_i L^{i/n}.$$

**Лемма 3.3.** *а) Если $[X, L] = 0$, то $[X_+, L]$ является дифференциальным оператором порядка меньше $n$.*
*б) Если $X$ это функция (дифференциальный оператор нулевого порядка), то $[X_+, L]$ является дифференциальным оператором порядка меньше $n$.*
*в) Дифференциальный оператор $A$ порядка $m$ таков, что $[A, L]$ имеет порядок меньше $n$ тогда и только тогда, когда существуют числа $a_k \in \mathbb{C}$ и функция $f$ такие, что $A = \sum_{i=m}^{-\infty} L^{i/n} + f$.*

Обозначим через $A_m = L_+^{m/n}$, через $t_m$ обозначим соответствующее время

$$\frac{dL}{dt_m} = [A_m, L]. \tag{3.1}$$

Самое первое время $t_1 = x$. Ясно, что нужно рассматривать только $m$ не кратные $n$.

**Задача 3.1.** *(Если вы раньше этого не считали) Пусть $L = D^2 + u$, напишите уравнение* (3.1) *для времени $t = t_3$. Должно получится уравнение КдФ.*

**Замечание 3.1.** Легко видеть, что из уравнений (3.1) следует, что $\frac{d}{dt_m}u_1 = 0$ для любого $m$. Поэтому $u_1$ является константой и обычно ее полагают равной нулю.

**Предложение 3.1.** *а) Из уравнения* (3.1) *следует, что* $\frac{d}{dt_m}L^{r/k} = [A_m, L^{r/k}]$.
*б) Потоки $t_m$ и $t_l$ коммутируют, то есть* $\frac{\partial^2 L}{\partial t_m \partial t_k} = \frac{\partial^2 L}{\partial t_k \partial t_m}$.

Система (иерархия) уравнений (3.1) называется системой Гельфанда-Дикого (другой термин — система $n$-KdV).

Определим функционал Адлера $\mathrm{Tr}(A) = \int (\operatorname{res} A) dx$.

**Лемма 3.4.** *Функционал Адлера удовлетворяет свойству* $\mathrm{Tr}[X, Y] = 0$.

По другому эта лемма значит, что $\operatorname{res}[X, Y]$ это полная производная. Из этой леммы и прошлого предложения следует

**Предложение 3.2.** *Пусть $h_m = \operatorname{res} L^{m/n}$. Тогда $\bar{h}_m = \int h_m dx$ является интегралом движения, т.е.* $\frac{d}{dt_m}h_k = 0$.

**Задача 3.2.** *Выберете из утверждений выше то, что вам кажется наиболее непонятным и докажите (разберите по литературе) его.*

## 3.2. Гамильтоновы структуры

Теперь будем рассматривать коэффициент $u_i$ дифференциального оператора $L$ как координаты на некотором, бесконечномерном многообразии. В качестве функций на этом многообразии мы будем рассматривать интегралы от локальных плотностей

$$\bar{f} = \int f(x, u_i, u_i', \ldots) dx, \tag{3.2}$$

где $f$ — это многочлен от $x$, $u_1, \ldots, u_n$ и их производных. Найдем вариацию этого функционала, при сдвиге $u_i \mapsto u + \varepsilon a_i$

$$\partial_a \bar{f} = \int \sum_{i,r} a_i^{(r)} \frac{\partial f}{\partial u_i^{(r)}} dx = \int \sum_{i,r} a_i (-D)^r \frac{\partial f}{\partial u_i^{(r)}} dx = \int \sum_i \frac{\delta f}{\delta u_i} a_i dx = \mathrm{Tr}\left(\frac{\delta \bar{f}}{\delta L} a\right), \tag{3.3}$$

где $a=\sum_{i=1}^n a_i D^{n-i}$, $\delta\bar f/\delta L=\sum_{i=1}^n D^{i-n-1}\delta f/\delta u_i$.

Скобка Пуассона двух функций зависит только от их дифференциалов. Для двух функций $\bar f$ и $\bar g$ (интегралов от локальных плотностей) пусть $X=\delta\bar f/\delta L$, $Y=\delta\bar g/\delta L$ их дифференциалы. Тогда введем две скобки по формуле

$$\{\bar f,\bar g\}_1=\operatorname{Tr}\big([X,Y]L\big) \tag{3.4}$$

$$\{\bar f,\bar g\}_2=\operatorname{Tr}\Big(\big(X(LY)_+-(YL)_+X\big)L\Big) \tag{3.5}$$

Эти скобки часто так и называются первая и вторая гамильтоновы структуры. Иногда они называются по именам: первая Гарднера-Захарова-Фаддеева, вторая Адлера-Гельфанда-Дикого (в случае $n=2$ Магри).

**Задача 3.3.** *Проверьте кососимметричность скобки* (3.5).

**Замечание 3.2.** Смысл первой скобки очень понятен. Пусть $\mathfrak{g}=\{\sum_{i=-1}^{\infty} v_i D^i\}$ алгебра Ли псевдодифференциальных операторов с только отрицательными степенями $D$ (такие операторы иногда называются Вольтерровскими). Пространство $\mathfrak{g}$ является двойственным к пространству $\mathfrak{g}^*=\{\sum_{i=0}^{m} v_i D^i\}$ дифференциальных операторов. На пространстве $\mathfrak{g}^*$ есть скобка Костанта–Кириллова

$$\{f,g\}(L)=L([df,dg]).$$

Здесь $L\in\mathfrak{g}^*$, $f,g$ функции на $\mathfrak{g}^*$, $df,dg\in\mathfrak{g}$ их дифференциалы. Эта скобка Костанта-Кириллова буквально и есть первая скобка (3.4), в частности мы доказали, что первая скобка удовлетворят тождеству Якоби.

Смысл (или скорее контекст) для второй скобки мы обсудим на следующей лекции.

**Замечание 3.3.** Сдвинем $L$ на константу $L\mapsto L+c$. Тогда

$$\begin{aligned}\{X,Y\}_{2,L+c}=\operatorname{Tr}\Big(\big(X((L+c)Y)_+-(Y(L+c))_+X\big)(L+c)\Big)=\\ =\operatorname{Tr}\big(X(LY)_+-(YL)_+X)L\big)-c\operatorname{Tr}\big([X,Y]L\big).\end{aligned}$$

Здесь мы использовали, что $X,Y$ это интегральные (вольтеровские) операторы, поэтому $(cY)_+=(cX)_+=0$ и $\operatorname{Tr}(X(LY)_+)=\operatorname{Tr}(XLY)$. Из этого вычисления следует, что первая и вторая скобка коммутируют, любая их линейная комбинация является скобкой Пуассона.

**Пример 3.1.** Пусть $n=1$. Тогда первая и вторая скобки имеют вид:

$$\{\bar f,\bar g\}_1=0,\qquad \{\bar f,\bar g\}_2=\int\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta\bar f}{\delta u}\right)\frac{\delta\bar g}{\delta u}dx. \tag{3.6}$$

Часто скобки пишут в виде

$$\{\bar f,\bar g\}=\int\int\sum_{i,j}\frac{\delta\bar f}{\delta u_i(x)}\frac{\delta\bar g}{\delta u_j(y)}\Omega_{i,j}dxdy,\qquad \{u_i(x),u_j(y)\}=\Omega_{i,j}. \tag{3.7}$$

В частности в примере выше вторая скобка имеет вид

$$\{u(x), u(y)\}_2 = \delta'(x-y). \tag{3.8}$$

**Задача 3.4.** *Найдите первую и вторую скобку на пространстве операторов вида* $D^2 + u$.

Алгебра функций на пространстве операторов $\{D^n + u_1 D^{n-1} + \ldots + u_n\}$ со второй гамильтоновой структурой называется *классической $W$-алгеброй*, построенной по (аффинной) алгебре $\mathfrak{gl}(n)$.

**Задача 3.5.** *Докажите, что скобка Пуассона в $W$ алгебре является (не более чем) квадратичной по $u_i$.*

Уравнения (3.1) являются Гамильтоновыми, причем относительно обеих скобок 3.4, 3.5. Перед тем как это доказывать докажем

**Лемма 3.5.** *Пусть $\bar{h}_m = \operatorname{Tr} L^{m/n}$ (как выше). Тогда*

$$\frac{\delta}{\delta L}\bar{h}_m = \frac{m}{n}\big(L^{(m-n)/n}\big)_-. \tag{3.9}$$

Здесь правая часть (3.9) есть чисто интегральный оператор, можно выбросить в нем все степени $D^{-n}$ и ниже чтобы было согласовано с формулой $\delta \bar{f}/\delta L$ выше.

*Доказательство.* Так как $L^{m/n} = (L^{1/n})^m$, то $\delta L^{m/n} = \sum_{i=0}^{m-1} (L^{1/n})^i \delta L^{1/n} (L^{1/n})^{m-i-1}$, в частности аналогичная формула верна при $m = n$. Тогда

$$\delta \bar{h}_m = \delta \operatorname{Tr}\Big(\sum_{i=0}^{m-1} (L^{1/n})^i \delta L^{1/n} (L^{1/n})^{m-i-1}\Big) = m \operatorname{Tr}\Big(L^{(m-1)/n} \delta L^{1/n}\Big) =$$

$$= \frac{m}{n} \operatorname{Tr}\Big(L^{(m-n)/n} \sum_{i=0}^{n-1} (L^{1/n})^i \delta L^{1/n} (L^{1/n})^{n-i-1}\Big) = \frac{m}{n} \operatorname{Tr}\Big(L^{(m-n)/n} \delta L\Big),$$

что и требовалось доказать. ☐

**Теорема 3.1.** *а) Уравнения* (3.1) *являются Гамильтоновыми относительно скобки* (3.4) *и гамильтониана* $\frac{n}{m+n}\bar{h}_{m+n}$.

*б) Уравнения* (3.1) *являются Гамильтоновыми относительно скобки* (3.5) *и гамильтониана* $-\frac{n}{m}\bar{h}_m$.

*Доказательство.* В формуле (3.1) слева стоят производные $u_i(y)$ (мы специально взяли другую букву, не $x$, а $y$). Дифференциал этого функционала равен $\delta u_i(y)/\delta L = D^{i-n-1}\delta(x-y) = Y$.

Для Гамильтониана как в пункте а) имеем

$$\Big\{\frac{n}{m+n}\bar{h}_{m+n}, u_i(y)\Big\}_1 = \operatorname{Tr}\left(\Big[\big(L_{m/n}\big)_-, Y\Big] L\right) =$$

$$= -\operatorname{Tr}\left(\Big[\big(L_{m/n}\big)_-, L\Big] Y\right) = \operatorname{Tr}\left(\Big[\big(L_{m/n}\big)_+, L\Big] Y\right),$$

что эквивалентно уравнению (3.1).

Для Гамильтониана как в пункте б) имеем

$$\Big\{-\frac{n}{m}\bar h_m, u_i(y)\Big\}_2 = -\operatorname{Tr}\Big(\Big(L\big(\big(L^{(m-n)/n}\big)_-L\big)_+ - \big(L\big(L^{(m-n)/n}\big)_-\big)_+L\Big)Y\Big) =$$

$$= -\operatorname{Tr}\Big(\Big(\big(L\big(L^{(m-n)/n}\big)_-\big)_-L - L\big(\big(L^{(m-n)/n}\big)_-L\big)_-\Big)Y\Big) =$$

$$= -\operatorname{Tr}\Big(\Big[\big(L^{m/n}\big)_-, L\Big]Y\Big) = \operatorname{Tr}\Big([\big(L_{m/n}\big)_+, L]Y\Big)$$

что опять же эквивалентно уравнению (3.1). □

**Теорема 3.2** (Вильсон-Купершмидт)**.** *Умножение дифференциальных операторов является Пуассоновым отображением относительно второй скобки Пуассона.*

Более явно эта теорема означает следующее. Пусть дифференциальный оператор $L$ порядка $n$ представлен в виде произведения $L = L_1L_2$ порядков $n_1$ и $n_2$. Тогда вторая Пуассонова скобка для $L$ является суммой скобок для $L_1$ и $L_2$

$$\{\bar f, \bar g\}_2 = \int \operatorname{res}\left(L\left(\frac{\delta \bar f}{\delta L}L\right)_+ - \left(L\frac{\delta \bar f}{\delta L}\right)_+ L\right)\frac{\delta \bar g}{\delta L}dx$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\int \operatorname{res}\left(L_i\left(\frac{\delta \bar f}{\delta L_i}L_i\right)_+ - \left(L_i\frac{\delta \bar f}{\delta L_i}\right)_+ L_i\right)\frac{\delta \bar g}{\delta L_i}dx \qquad (3.10)$$

*Доказательство.* Мы следуем [9, Prop. 4.1.5]. Имеем

$$\delta \bar f = \operatorname{Tr}\left(\frac{\delta \bar f}{\delta L}L\right) = \operatorname{Tr}\left(L_2\frac{\delta \bar f}{\delta L}\delta L_1 + \frac{\delta \bar f}{\delta L}L_1\delta L_2\right),$$

откуда $\frac{\delta \bar f}{\delta L_1} = \left(L_2\frac{\delta \bar f}{\delta L}\right)_-$, $\frac{\delta \bar f}{\delta L_2} = \left(\frac{\delta \bar f}{\delta L}L_1\right)_-$.

Запишем правую часть (3.10) заменив $(\cdots)_+$ на $(\cdots) - (\cdots)_-$ и приведя подобные

$$\operatorname{Tr}\left((L_1\frac{\delta \bar f}{\delta L_1})_-L_1\frac{\delta \bar g}{\delta L_1} - (\frac{\delta \bar f}{\delta L_1}L_1)_-\frac{\delta \bar g}{\delta L_1}L_1 + (L_2\frac{\delta \bar f}{\delta L_2})_-L_2\frac{\delta \bar g}{\delta L_2} - (\frac{\delta \bar f}{\delta L_2}L_2)_-\frac{\delta \bar g}{\delta L_2}L_2\right)$$

Теперь подставим формулы для $\delta\bar f/\delta L_1$ найденные выше и воспользуемся тем что в выражениях вида $\left(\left(\frac{\delta \bar f}{\delta L}L_1\right)_- L_2\right)_-$ внутренний минус может быть опущен. Тогда получаем

$$\operatorname{Tr}\Big((L_1L_2\frac{\delta \bar f}{\delta L})_-L_1(L_2\frac{\delta \bar g}{\delta L})_- - (L_2\frac{\delta \bar f}{\delta L}L_1)_-(L_2\frac{\delta \bar g}{\delta L})_-L_1 +$$

$$+ (L_2\frac{\delta \bar f}{\delta L}L_1)_-L_2(\frac{\delta \bar g}{\delta L}L_1)_- - (\frac{\delta \bar f}{\delta L}L_1L_2)_-(\frac{\delta \bar g}{\delta L}L_1)_-L_2\Big)$$

Расписываем теперь сомножители с $\bar{g}$ как $(\cdots)_- = (\cdots)-(\cdots)_+$ и приведя подобные получаем

$$\operatorname{Tr}\left(\left(L_1L_2\frac{\delta\bar{f}}{\delta L}\right)_- L_1L_2\frac{\delta\bar{g}}{\delta L} - \left(\frac{\delta\bar{f}}{\delta L}L_1L_2\right)_- \frac{\delta\bar{g}}{\delta L}L_1L_2,\right)$$

то есть правую часть (3.10), что и требовалось доказать. □

Важным следствием Теоремы 3.2 является *преобразование Миуры*:

$$D^n + u_1D^{n-1} + \ldots + u_n = (D+a_1)\cdot\ldots\cdot(D+a_n). \tag{3.11}$$

По теореме 3.2 сложные скобки на $u_1,\ldots,u_n$ можно вычислить при помощи $a_i$ которые удовлетворяют простой скобке (3.8).

**Задача 3.6.** *Проверьте явно, что преобразование Миуры $D^2+u=(D+a)(D-a)$ является пуассоновым отображением.*

**Замечание 3.4.** Зафиксируем преобразование Миуры (разложение (3.11)). Определим

$$L_i = (D+a_i)\cdot\ldots\cdot(D+a_n)(D+a_1)\cdot\ldots\cdot(D+a_{i-1}).$$

Ясно, что $(D+a_i)L_{i+1} = L_i(D+a_i)$, откуда $(D+a_i)L_{i+1}^{m/n} = L_i^{m/n}(D+a_i)$, для любого $m$ (индексы $i$ удобно считать циклически $n+1=1$). Отсюда следует, что

$$(D+a_i)(L_{i+1}^{m/n})_+ - (L_i^{m/n})_+(D+a_i) = (D+a_i)(L_{i+1}^{m/n})_- + (L_i^{m/n})_-(D+a_i)$$

является чисто дифференциальным оператором нулевого порядка, т.е. функцией.

Модифицированной системой Гельфанда-Дикого (системой $n$–mKdV) называется система уравнений на $a_i$

$$\frac{\partial a_i}{\partial_{t_m}} = (L_i^{m/n})_+(D+a_i) - (D+a_i)(L_{i+1}^{m/n})_+. \tag{3.12}$$

Выше мы показали, что эта система уравнений имеет смысл. Можно доказать, что из этой системы следует обычная система Гельфанда Дикого (3.1) для всех $L_i$. Проведем вычисление для $L_1$:

$$\frac{\partial}{\partial_{t_m}}L_1 = \sum_{i=1}^{n}(D+a_1)\cdot\ldots(D+a_{i-1})\cdot\Big((L_i^{m/n})_+(D+a_i) - (D+a_i)(L_{i+1}^{m/n})_+\Big)\cdot$$
$$\cdot(D+a_{i+1})\cdot\ldots\cdot(D+a_n) = (L_1^{m/n})_+L_1 - L_1(L_1^{m/n})_+ = [(L_1^{m/n})_+, L_1].$$

# 4. Классические $r$ матрицы и скобки Пуассона

## 4.1. Классические $r$-матрицы (по [3])

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Линейный оператор $\hat{r}$ мы назовем классической $r$-матрицей, если скобка на $\mathfrak{g}$ заданная формулой

$$[X,Y]_r = [\hat{r}X, Y] + [X, \hat{r}Y] \tag{4.1}$$

задает структуру алгебры Ли. Кососоммутативность очевидна, надо проверять только тождество Якоби.

Благодаря $\hat{r}$ у нас есть две Пуассоновы структуры на пространстве $\mathfrak{g}^*$:

$$\{h_1, h_2\}(L) = L([X_1, X_2]); \quad \{h_1, h_2\}_r(L) = L([X_1, X_2]_r). \tag{4.2}$$

Здесь $L \in \mathfrak{g}^*$, $h_1, h_2$ функции на $\mathfrak{g}^*$, $X_i = dh_i \in \mathfrak{g}$.

**Теорема 4.1.** *Пусть $\mathfrak{g}$ алгебра Ли с r-матрицей $\hat{r}$. Тогда*
*а) $\mathrm{ad}^*$ инвариантные функции на $\mathfrak{g}^*$ находятся в инволюции относительно обеих скобок Пуассона.*
*б) Уравнения движения на $\mathfrak{g}^*$, задаваемое инвариантным гамильтонианом $h$ относительно скобки $\{\cdot,\cdot\}_r$, допускает эквивалентные формы записи*

$$\frac{dL}{dt} = \mathrm{ad}^*_r\, dh(L)\cdot L; \qquad \frac{dL}{dt} = \mathrm{ad}^*\, M_h \cdot L, \quad M_h = \hat{r}(dh(L)). \tag{4.3}$$

*Доказательство.* а) Если функция $h$ является $\mathrm{ad}^*$ инвариантной, то для любого $Y \in \mathfrak{g}$ имеем $\big(\mathrm{ad}^*\, Y \cdot L\big)(dh(L)) = 0$. Переписывая это условие в виде $L([Y, dh(L)]) = 0$ и используя определение (4.2) мы получаем требуемое.

б) Первая формула в (4.3) есть стандартная запись уравнений гамильтоновых относитльно скобки Костанта-Кириллова. Вторая формула следует из первой используя, что $\mathrm{ad}^*_r$ состоит из двух слагаемых, из которых второе занулится поскольку $\mathrm{ad}^*\, dh(L) \cdot L = 0$ для инвариантной функции $h$. □

**Замечание 4.1.** Геометрический смысл формулы (4.3) в том траектории системы с гамильтонианом $h$ лежат в пересечении двух систем орбит в $\mathfrak{g}^*$ — орбит $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}_r$.

Естественно спросить как строить такие $\hat{r}$. Тождество Якоби для скобки (4.2) имеет вид

$$\Big[X, [\hat{r}Y, \hat{r}Z] - \hat{r}[\hat{r}Y, Z] - \hat{r}[Y, \hat{r}Z]\Big] + \text{cyclic permuations} = 0, \tag{4.4}$$

для любых $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Это условие очевидно выполнено, если

$$[\hat{r}X, \hat{r}Y] - \hat{r}[\hat{r}X, Y] - \hat{r}[X, \hat{r}Y] = 0 \tag{4.5}$$

для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$. Это уравнение может быть названо *классическим уравнением Янга-Бакстера*, ниже мы увидим, как оно связано с обычной формой уравнения Янга-Бакстера. Пока можно отметит, что оно является квадратичным по $\hat{r}$ и линейным по структурным константам алгебры $\mathfrak{g}$.

Но несложно заметить, что на самом деле достаточно меньшего, а именно уравнения

$$[\hat{r}X, \hat{r}Y] - \hat{r}[\hat{r}X, Y] - \hat{r}[X, \hat{r}Y] = \alpha[X, Y]. \tag{4.6}$$

Здесь $\alpha$ может быть любым числом, уравнение (4.4) будет выполнено всилу тождества Якоби в алгебре $\mathfrak{g}$. Уравнение (4.6) называется *модифицированным* классическим уравнением Янга-Бакстера.

Решения уравнения (4.6) можно строить при помощи следующей конструкции.

**Лемма 4.1.** *Пусть* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-)$ *это тройка состоящая из алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *и двух ее подалгебр* $\mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-$ *таких, что* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ *как векторное пространство. Обозначим через* $P_+, P_-$ *проекторы на* $\mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-$ *вдоль второго слагаемого. Тогда оператор* $\hat{r} = P_+ - P_-$ *удовлетворяет соотношению* (4.6).

Заметим, что в лемме не предполагается (и обычно неверно в примерах), что подалгебры $\mathfrak{g}_-$ и $\mathfrak{g}_+$ коммутируют. Иными словами $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ как алгебра Ли.

**Пример 4.1.** Тройка $(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \mathfrak{n}_-)$ удовлетворяет условию леммы. Здесь $\mathfrak{g}$ это простая алгебра Ли, $\mathfrak{b}$ это борелевская подалгебра, $\mathfrak{n}_-$ это противоположная нильпотентая алгебра.

Тройка $(\mathfrak{gl}(n), \mathfrak{so}(n), \mathfrak{b})$ удовлетворяет условию леммы. Здесь $\mathfrak{so}(n)$ это алгебра Ли кососимметрических матриц, $\mathfrak{b}$ это алгебра Ли верхнетреугольных матриц.

**Пример 4.2.** Пусть PD —это алгебра Ли всех псевдодифференциальных операторов вида $\sum_{i=m}^{-\infty} x_i D^i$, $\mathrm{PD}_+$ — это подалгебра Ли дифференциальных операторов, $\mathrm{PD}_-$ — это подалгебра Ли чисто интегральных операторов. Тогда тройка $(\mathrm{PD}, \mathrm{PD}_+, \mathrm{PD}_-)$ уловлетворяет условиям леммы.

**Пример 4.3.** Пусть $\mathfrak{g}$ — это полупростая алгебра Ли. Тогда тройка $(\mathfrak{g}[t, t^{-1}], \mathfrak{g}[t], t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])$ является условиям леммы.

**Задача 4.1.** *Рассмотрим тройку* $(\mathfrak{gl}(n), \mathfrak{so}(n), \mathfrak{b})$, *гамильтониан* $h = \operatorname{tr} L^2$, $L$ *бесследовая трехдиагональная матрица*

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & & \\ a_1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ & & & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}$$

*Напишите гамильтоновы уравнения* (4.3), *должно получится что-то известное.*

## 4.2. Классическое уравнение Янга-Бакстера

Предположим теперь, что на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ есть инвариантная невырожденная симметричная билинейная форма $(\cdot, \cdot)$. При помощи нее можно отождествлять пространства $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$, второе уравнение (4.3) тогда можно рассматривать как уравнение Лакса.

Предположим также, что $\hat{r}$ является кососимметическим оператором (относительно данной билинейной формы). Тогда подняв (или опустив) индекс ему можно сопоставить элемент $r \in \Lambda^2\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.

Условие (4.5) тогда перепишется в виде

$$\mathrm{CYB}(r) := [r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0. \qquad (4.7)$$

Здесь $\mathrm{CYB}(r) \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$, и мы используем тензорные обозначения, т.е. если $r = \sum x_i \otimes y_i$, то

$$r_{12} = \sum x_i \otimes y_i \otimes 1, \quad r_{13} = \sum x_i \otimes 1 \otimes y_i, \quad r_{23} = \sum 1 \otimes x_i \ \otimes y_i.$$

Уравнение (4.7) называется *классическим уравнением Янга-Бакстера.*

Уравнение (4.6) означает, что $CYB(r) = \alpha c$, где $c$ —- это тензор структурных констант алгебры Ли, с поднятыми индексами посредством билинейной формы.

**Задача 4.2.** *Докажите, что с является кососимметричным и инвариантым относительно действия* $\mathfrak{g}$.

*Модифицированным уравнением Янга-Бакстера* называется условие, что тензор $\mathrm{CYB}(r)$ является $\mathfrak{g}$ инвариантным. Заметим, что для простых алгебр Ли такой инвариантный элемент обязательно будет пропорционален $c$.

Оператор $\hat{r}$, построенный в лемме, 4.1 является кососимметричным, если подалгебры $\mathfrak{g}_-$ и $\mathfrak{g}_+$ являются изотропными относительно этой формы (т.е. ограничение формы на них равно нулю). В этом случае — выполнение условия леммы 4.1 и коизотропность — тройка алгебр Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-)$ называется *тройкой Манина.*

**Пример 4.4.** Посмотрим на примеры из прошлого параграфа. Тройка $(\mathrm{PD}, \mathrm{PD}_+, \mathrm{PD}_-)$ является тройкой Манина, спаривание задается функциалом Адлера $\mathrm{Tr}(XY)$.

Тройка $(\mathfrak{g}[t,t^{-1}], \mathfrak{g}[t], t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])$ также является тройкой Манина, спаривание задается формулой $(X,Y) = \mathrm{tr}\,\mathrm{Res}\,XY$. В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$ матрица $r \in \mathfrak{g}[z,z^{-1}]\otimes[w,w^{-1}]$ имеет явный вид:

$$r = \sum_{a,b=1}^{n} \left( \sum_{k=0}^{\infty} E_{ab} z^k \otimes E_{ba} w^{-k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} E_{ab} z^{-k-1} \otimes E_{ba} w^{k} \right) = \frac{2P}{w-z}.$$

Здесь $P$ — оператор перестановки.

Тройки $(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \mathfrak{n}_-)$ и $(\mathfrak{gl}(n), \mathfrak{so}(n), \mathfrak{b})$ тройками Манина не являются, соответствующие операторы $\hat{r}$ не являются кососимметричным.

**Теорема 4.2** (Дринфельд). *Пусть* $\mathfrak{g}$ *— алгебра Ли,* $r \in \Lambda^2\mathfrak{g}$. *Пусть* $\delta\colon \mathfrak{g} \to \Lambda^2\mathfrak{g}$ *определен по формуле*

$$\delta(a) = [a\otimes 1 + 1\otimes a, r],$$

$a \in \mathfrak{g}$. *Тогда тройка* $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \delta)$ *задают структуру биалгебры Ли если и только если* $\mathrm{CYB}(r) \in \mathfrak{g}^{\otimes 3}$ *является* $\mathfrak{g}$*-инвариантным.*

Доказательство теоремы можно посмотреть в [13]. Поясним только формулировку, *биалгеброй Ли* называется алгебра Ли $\mathfrak{g}$ снабженная отображением $\delta\colon \mathfrak{g} \to \Lambda^2\mathfrak{g}$ таким, что $\delta^*$ задает структуру алгебры Ли на $\mathfrak{g}^*$ и эти две структуры согласованы в смысле

$$\delta([a,b]) = [a\otimes 1 + 1\otimes a, \delta(b)] + [\delta(a), b\otimes 1 + 1\otimes b].$$

Для $\delta$ определенного как в теореме условие согласованности выполнено автоматически, единственное, что надо проверять это тождество Якоби для $\delta^*$, теорема говорит, что оно эквивалентно модифицированному классическому уравнению Янга-Бакстера.

Биалгебры Ли построенные как в теореме называются *кограничными*. Если дополнительно $\mathrm{CYB}(r) = 0$, то биалгебра Ли называется *треугольной*.

Предположим теперь, что $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ не обязательно кососимметричный элемент, $r = r^S + r^A$, где $r^S \in S^2\mathfrak{g}$, $r^A \in \Lambda^2\mathfrak{g}$. Биалгебра Ли называется *квазитреугольной*, если $r^S$ является $\mathfrak{g}$-инвариантным и $\mathrm{CYB}(r) = 0$.

**Задача 4.3.** *Проверьте, что если $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ удовлетворяет условию выше (квазитреугольности), то $\mathrm{CYB}(r^A)$ является $\mathfrak{g}$ инвариантным, т.е. выполнены условия теоремы 4.2, и $\delta$ постренное по $r^A$ действительно задает биалгебру.*

Заметим, что для простой алгебры пространство $\mathfrak{g}$-инвариантов в $S^2\mathfrak{g}$ ялвяется одномерным, порожденное инвариантным скалярным произведением на $\mathfrak{g}^*$.

Как следует из задачи выше, для $r$ дающих *квазиотреугольную структуру* мы можем построить $\delta$ которая определяет структуру алгебры Ли на $\mathfrak{g}^*$. Отождествляя теперь $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ посредством инвариантного скалярного произведения (или $r^S$) мы получаем новую структуру алгебры Ли на $\mathfrak{g}$, по которой можно восстанавливать $\hat{r}$.[2]

**Задача 4.4.** *Докажите, что*

$$r = \frac{1}{2} \sum h_i \otimes h_i + \sum_{\alpha > 0} e_\alpha \otimes e_{-\alpha}. \tag{4.8}$$

*определяет квазитреугольную структуру на любой простой алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Здесь $h_i$ ортонормированный базис в картановской подалгебре, $e_\alpha$ корневой базис, с нормировкой $(e_{-\alpha}, e_\alpha) = 1$.*

*С каким оператором $\hat{r}$ связна такая матрица $r$?*

## 4.3. Скобка на группе, группы Пуассона-Ли

*Группой Пуассона-Ли* называется группа Ли снабженная структурой Пуассонова многообразия в которой отображение умножение $G \times G \to G$ является отображением Пуассоновых многообразий.

Более явно это означает, что для любых двух функций $\phi, \psi \in C^\infty(G)$, и элементов $x_0, y_0 \in G$ верно

$$\{\phi, \psi\}(x_0 y_0) = \{\phi(x y_0), \psi(x y_0)\}(x_0) + \{\phi(x_0 y), \psi(x_0 y)\}(y_0) \tag{4.9}$$

В определении группы Пуассона-Ли естественно требовать согласованности взятия обратного с пуассоновой структурой, но оказывается, что нужное свойство антипуассоновость можно вывести из остальных аксиом, см. [13, Sec. 2.1].

[2] Отметим, наоборот, по $\tilde{r}$ $r$ воостановить можно не всегда, т.е. подходы при помощи $\hat{r}$ и $\tilde{r}$ не полностью эквивалентны, см [4].

**Замечание 4.2.** Если $\mathfrak{g}$ алгебра Ли группы Пуассона-Ли $G$, то на $\mathfrak{g}$ возникает структура биалгебры Ли.

Для матричных групп скобку Пуассона-Ли часто задают по формуле

$$[L_1 \otimes, L_2] = [r, L_1 \otimes L_2] \tag{4.10}$$

Можно проверить, что тождество Якоби для этой скобки вытекает из модифицированного уравнения Янга-Бакстера и кососимметричности $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Можно, как в предыдущием пункте заменить $r$ на $r^S + r^A$, где $r^S$ симметричный $\mathfrak{g}$ инвариантный тензор, формула (4.10) все равно будет выполняться.

То, что умножения в группе является отображением Пуассоновых многообразий для скобки (4.10) следует из тождества Лейбница

$$[r, L_1 L_1' \otimes L_2 L_2'] = [r, L_1 \otimes L_2](L_1' \otimes L_2') + (L_1 \otimes L_2)[r, L_1' \otimes L_2'].$$

**Задача 4.5.** *Определим скобку на группе $GL(2)$ при помощи $r$-матрицы* (4.8). *Найдите скобку матричных элементов, то есть функций $a, b, c, d$, где $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Проверьте, что выполняется свойство* (4.9). *Найдите Казимиры этой скобки.*

В более общем виде (для не обязательно матричной группы), формулу (4.10) можно переписать в виде

$$\{\phi, \psi\} = \sum r_{\mu\nu}(\partial_\mu \phi \partial_\nu \psi - \partial'_\mu \phi \partial'_\nu \psi),$$

где $\phi, \psi \in C^\infty(G)$, $r = \sum r_{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu$, $\partial_\mu$ левоинвариантное векторное поле на $G$ заданное элементом $e_\mu$, $\partial'_\mu$ правоинвариантное векторное поле на $G$ заданное элементом $e_\mu$.

Перейдем от матрицы $r$ к оператору $\tilde{r} \colon \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$. Пусть $X = d\phi$, $Y = d\psi$. Тогда (для матричной группы)

$$\{\phi, \psi\}(L) = (LX)\big(\tilde{r}(LY)\big) - (XL)\big(\tilde{r}(YL)\big). \tag{4.11}$$

Для не матричной группы надо вместо умножения слева и справа $X, Y$ на $L$ использовать дифференциалы отображения левого и правого сдвига на группе.

**Замечание 4.3.** Формула (4.11) уже очень похожа на формулу (3.5) для второй скобки. Некоторая разница состоит в том, что для алгебры Ли псевдодифференциальных операторов $\mathfrak{g} = \mathrm{PD}$ нет группы Ли. Но в этом случае алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является на самом деле ассоциативной алгеброй, скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ согласовано с умножением. Определим градиент гладкой функции на $\mathfrak{g}$ по формуле

$$(\mathrm{grad}\varphi(L), A) = \left(\frac{d}{dt}\right) \varphi(L + tA), \qquad \text{где } L, A \in \mathfrak{g}$$

Пусть $\hat{r} \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ кососимметричен и удовлетворяет модифицированному уравнению Янга-Бакстера. Тогда скобка Гельфанда-Дикого определена по формуле

$$\{\varphi, \psi\}_2(L) = \Big(\tilde{r}(LX), LY\Big) + \Big(\tilde{r}(XL), YL\Big), \text{ где } X = \mathrm{grad}\varphi, Y = \mathrm{grad}\psi. \tag{4.12}$$

Эта уже формула просто совпадает с формулой (3.5). Можно также ввести аналог первой скобки по формуле

$$\{\varphi,\psi\}_2(L) = \Big(L, [\hat{r}X, Y] + [x, \hat{r}Y]\Big),$$

эта стандартная скобка Костанта-Кириллова для (4.1). Эти две скобки коммутируют между собой.

# 5. Квантовые $W$ алгебры

## 5.1. Квантовое преобразование Миуры

Пусть есть $n$ алгебр Гейзенберга, компоненты которых мы будем обозначать $a_{i,r}$ или $a_i[r]$ с коммутационными соотношениями

$$[a_{i,r}, a_{j,s}] = r\delta_{r+s}\delta_{i,j}.$$

В терминах полей $\partial\varphi_i(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{i,k} z^{-k-1}$ соотношения записываются:

$$[\partial\varphi_i(z), \partial\varphi_j(z)] = \delta_{i,j} \sum_{k\in\mathbb{Z}} k\frac{w^{k-1}}{z^{k+1}} = \delta_{i,j}\delta'\left(\frac{z}{w}\right),$$

где $\delta\left(z/w\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} w^k/z^{k+1}$, через $\delta'$ обозначена производная по $w$. В терминах операторных произведений имеем $\varphi_i(z)\varphi_j(w) \sim \delta_{i,j}\log(z-w)$.

Токи $\mathcal{W}_1(z),\ldots,\mathcal{W}_n(z)$ определяются при помощи *квантового преобразования Миуры*:

$$(iQ\partial_z)^n + \sum_{k=1}^{n} \mathcal{W}_k(z)(iQ\partial_z)^{n-k} = :\Big(iQ\partial_z + \partial\varphi_1(z)\Big)\ldots\Big(iQ\partial_z + \partial\varphi_n(z)\Big):. \tag{5.1}$$

Посмотрим на классчический предел $\varphi_i = b^{-1}\varphi_i^{\mathrm{b}}$, $b \to 0$. Тогда $[\partial\varphi_i^{\mathrm{b}}(z), \partial\varphi_j^{\mathrm{b}}(w)] = \hbar\delta_{i,j}\delta'(z/w)$, где $\hbar = b^2$, в пределе $\partial\varphi_i^{\mathrm{b}}(z) \to u_i(z)$ и получаем скобку (3.8). Преобразование Миуры (5.1) умноженное на $b^n$ стремится к классическому преобразованию Миуры (3.11).

На третьей лекции говорилось, стандартная $\delta'$ скобка на $u_i$ (формула (3.8)) при помощи преобразования Миуры связана со второй гамильтоновой структурой на $W_i$. Поэтому естественно ожидать, что коммутационные соотношения на $W_i$ будут квантования второй гамильтоновой структуры в классической $W$ алгебре.

Алгебра порожденная токами $\mathcal{W}_1(z),\ldots,\mathcal{W}_n(z)$ называется *квантовой $W$ алгеброй $\widehat{\mathfrak{gl}}(n)$*. Обозначается эта алгебра как $W(\widehat{\mathfrak{gl}}(n))$. Отметим, что эта алгебра не является универсальной обертывающей от алгебры Ли, это алгебра токов или, на более математическом языке, вертексная алгебра.

Легко посчитать первые примеры $\mathcal{W}_i$:

$$\mathcal{W}_1(z) = \sum_i \partial\varphi_i(z), \quad \mathcal{W}_2(z) = \sum_{i<j} {:}\partial\varphi_i(z)\partial\varphi_j(z){:} + iQ\sum_i (i-1)\partial^2\varphi_i(z),$$
$$\mathcal{W}_3(z) = \sum_{i<j<k} {:}\partial\varphi_i(z)\partial\varphi_j(z)\partial\varphi_k(z){:} + (iQ)\sum_{i<j}\Big((i-1)\ {:}\partial^2\varphi_i(z)\partial\varphi_j(z){:} + (j-2)\ {:}\partial\varphi_i(z)\partial^2\varphi_j(z){:}\Big) +$$
$$+ (iQ)^2\sum_i \frac{(i-1)(i-2)}{2}\partial^3\varphi_i(z).$$

Можно доказать (см [14]), что генераторы $\mathcal{W}_i(z)$ удовлетворяют квадратичным соотношениям вида

$$\mathcal{W}_i(z)\mathcal{W}_j(w) = \sum_{k=2}(z-w)^{-k}\sum_{p+q=i+j-k} C_{ij}^{pq}\mathcal{W}_p(z)\mathcal{W}_q(w) + \mathrm{reg}.$$

**Пример 5.1.** Если $n=1$, то $W$ алгебра порождена просто током $\mathcal{W}_1(z)$ размерности 1 и совпадает с алгеброй Гейзенберга.

Если $n=2$, то $W$ алгебра порождена двумя токами размерности 1 и 2. Как вертексная алгебра она есть произведение алгебры Гейзенберга и алгебры Вирасоро. Ток $T(z)$ порождающий алгебру Вирасоро приведен ниже.

**Замечание 5.1.** Ток $\mathcal{W}_1(z)$ всегда порождает алгебру Гейзенберга. Часто удобно его отщепить, тогда для $n=2$ скажем получит просто алгебра Вирасоро. Это делается так, определим $\tilde{\varphi}_i = \varphi_i - \frac{1}{n}\sum\varphi_j$. Компоненты токов $\tilde{\varphi}_i$ по прежнему образуют алгебру Гейзенберга, но теперь $[\tilde{a}_{i,r}, \tilde{a}_{j,s}] = r\delta_{r+s}(\delta_{i,j} - \frac{1}{n})$. Тогда токи $\tilde{\mathcal{W}}_k(z)$ определенные по формуле

$$(iQ\partial_z)^n + \sum_{k=2}^n \tilde{\mathcal{W}}_k(z)(iQ\partial_z)^{n-k} = {:}\Big(iQ\partial_z + \partial\tilde{\varphi}_1(z)\Big)\dots\Big(iQ\partial_z + \partial\tilde{\varphi}_n(z)\Big){:}\,. \tag{5.2}$$

порождают алгебру которая называется *квантовой $W$ алгеброй $\widehat{\mathfrak{sl}}(n)$*.

**Задача 5.1.** *Проверьте, что все токи $\tilde{\mathcal{W}}_k$ коммутируют с током $\mathcal{W}_1$.*

*Поясните также, что токи $\tilde{\mathcal{W}}_k$ порождают подалгебру в $W(\widehat{\mathfrak{gl}}(n))$ (то есть выражаются через $\mathcal{W}_k$) и что эта подалгебра является централизатором тока $\mathcal{W}_1$.*

Ток $\tilde{\mathcal{W}}_2$ фиксируется однозначно с точностью до нормировки условиями, что он имеет конформную размерность 2 и коммутирует с $\mathcal{W}_1$. Такой ток легко построить явно поправляя $\mathcal{W}_2$, а именно:

$$T(z) = -\tilde{\mathcal{W}}_2(z) = -\left(\mathcal{W}_2(z) - iQ\frac{n-1}{2}\mathcal{W}_1'(z) - \frac{n-1}{2n}\ {:}\mathcal{W}_1(z)\mathcal{W}_1(z){:}\right), \tag{5.3}$$

Ток $T(z)$ определенный по такой формуле коммутирует с $\mathcal{W}_1$ и удовлетворяет коммутационным соотношениям алгебры Вирасоро, эти условия определяют $T(z)$ однозначно. Центральный заряд $T(z)$ равен $c = (n-1)\big(1 + n(n+1)Q^2\big)$.

**Задача 5.2.** *Проверьте соотношения на $T(z)$ и формулу для центрального заряда.*

**Задача 5.3.** *Формула для преобразования Миуры является довольно специальной, скажем при $n > 2$ она не сводится к условию $\sum \tilde{\varphi}_i = 0$ . Например, покажите, что если бы при $n = 3$ мы бы определили $\mathcal{W}_k$ по формуле*

$$(iQ\partial_z)^3+\tilde{\mathcal{W}}_2(z)(iQ\partial_z)+\tilde{\mathcal{W}}_3(z) = :\Big(iQ\partial_z+\partial\varphi_1(z)\Big)\Big(iQ\partial_z+\partial\varphi_2(z)\Big)\Big(iQ\partial_z-\partial\varphi_1(z)-\partial\varphi_2(z)\Big):,$$

*то токи $\mathcal{W}_2(z)$, $\mathcal{W}_3(z)$, не будут образовывать замкнутой алгебры.*

## 5.2. Скрининги

Произведение в правой части преобразования Миуры (5.1) можно разложить как произведение $m$ скобок и $n - m$ скобок. Таким образом мы получаем отображение $\Delta\colon W(\widehat{\mathfrak{gl}}(n)) \to W(\widehat{\mathfrak{gl}}(m)) \otimes W(\widehat{\mathfrak{gl}}(n - m))$. Об этом отображении можно думать как о коумножении, для какого-то аффинного янгиана. Для коумножения важно, что мы рассматриваем $W(\widehat{\mathfrak{gl}}(n))$, для $W(\widehat{\mathfrak{sl}}(n))$ коумножения не будет.

Перейдем к вопросу скринингов для $W(\widehat{\mathfrak{gl}}(n))$. В случае $n = 1$ это алгебра Гейзенберга и никакой скрининг с ней коммутирует.

Посмотрим на $W(\widehat{\mathfrak{gl}}(2))$, она порождается Гейзенергом $\phi_1(z) + \phi_2(z)$ и алгеброй Вирасоро выраженной по формуле (5.3). Последняя формула по сути эквивалентна формуле (1.1), для Гейзенберга $\frac{i}{\sqrt{2}}(a_{1,r}-a_{2,r})$ и $\lambda = \frac{-i}{\sqrt{2}}Q$. Используя Лиувиллевскую параметризацию $Q = b + b^{-1}$ мы находим значения $\alpha_+$, $\alpha_-$ по формуле (1.7)

Поэтому, скрининовские токи будут иметь вид

$$S_+(z) =:\exp(ib(\varphi_1(z) - \varphi_2(z))):, \quad S_-(z) =:\exp(ib^{-1}(\varphi_1(z) - \varphi_2(z))): . \tag{5.4}$$

Теперь рассмотрим $W(\widehat{\mathfrak{gl}}(n))$, для произвольного $n$. Для любого $1 \leq k \leq n-1$ мы имеем вложение $W(\widehat{\mathfrak{gl}}(n)) \hookrightarrow W(\widehat{\mathfrak{gl}}(k-1)) \otimes W(\widehat{\mathfrak{gl}}(2)) \otimes W(\widehat{\mathfrak{gl}}(n-k-1))$. Скрининги построенные по средней $W(\widehat{\mathfrak{gl}}(2))$ коммутируют с ней и с остальными множителями, значит они коммутируют со всей $W(\widehat{\mathfrak{gl}}(n))$. Таким образом мы нашли $2(n-1)$ скринингов, их токи имеют вид

$$S_{k,+}(z) =:\exp(ib\alpha_k \cdot \vec{\varphi(z)}):, \quad S_{k,-}(z) =:\exp(ib^{-1}\alpha_k \cdot \vec{\varphi(z)}): . \tag{5.5}$$

Здесь $\vec{\varphi(z)} = (\varphi_1(z), \cdots, \varphi_n(z))$, $\alpha_k = e_k - e_{k+1}$ — *простой корень* для системы корней $A_{n-1}$.

Как и раньше, скрининг определяется как контурный интеграл от тока

$$S_{k,\pm} = \oint S_{k,\pm}(x)dx$$

Для $W(\widehat{\mathfrak{sl}}(n))$ скрининги будут те же самые, можно записать $S_{k,\pm}$ как экспоненты от полей $\tilde{\varphi}$.

**Задача 5.4.** *а) Докажите, что при общем значении $Q$ у алгебры $W(\widehat{\mathfrak{gl}}(3))$ нет других скринингов. В частности не простые корни не годятся.*
*б) То же утверждение про $W(\widehat{\mathfrak{gl}}(n))$.*

**Замечание 5.2.** Мы на самом деле не обсуждали как $W(\widehat{\mathfrak{gl}}(n))$ связана с $\mathfrak{gl}(n)$ (это требует рассказа про редукцию Дринфельда-Соколова). В частности непонятно как определять $w$ алгебры отвечающие другой простой алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Но что сделать легко, так это изменить формулу (5.5) для скрининговсих токов — надо в качестве $\alpha_k$ взять простые корни алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В одном из возможных определений $W(\mathfrak{g})$ — вертексная алгебра состоящия из локальных выражений коммутирующих с этими скринингами.

**Задача 5.5.** *(если не решали раньше) Простейшим частным случаем $W$ алгебры является $Q = 0$. В этом случае формулы для $\mathcal{W}_k$ упрощаются, и мы имеем*

$$\mathcal{W}_k(z) = \sum_{a_1<\ldots<a_k} :\partial\varphi_{a_1}(z)\cdot\ldots\cdot\partial\varphi_{a_k}(z):$$

*Интересно, что в этом случае есть другое, фермионное описание. А именно рассмотрим $n$ комплексных фермионов*

$$\psi_a^*(z) = \sum\nolimits_{p\in\frac12+\mathbb{Z}} \psi_{a,p}^* z^{-p-\frac12}, \quad \psi_a(z) = \sum\nolimits_{p\in\frac12+\mathbb{Z}} \psi_{a,p} z^{-p-\frac12}$$

*со стандартным операторным разложением*

$$\psi_a^*(z)\psi_b(w) = -\psi_b(w)\psi_a^*(z) = \frac{\delta_{a,b}}{z-w} + \mathrm{reg.} \qquad \psi_a(z)\psi_b(w) = \psi_a^*(z)\psi_b^*(w) = \mathrm{reg},$$

*или, эквивалентно коммутационными соотношениям мод*

$$\{\psi_{a,p}^*, \psi_{b,q}\} = \delta_{a,b}\delta_{p+q,0}, \quad \{\psi_{a,p}, \psi_{b,q}\} = \{\psi_{a,p}^*, \psi_{b,q}^*\} = 0, \qquad p,q \in \frac12 + \mathbb{Z}.$$

*Тогда, если ввести $J_{ab}(z) =: \psi_a^*(z)\psi_b(z):$, то они удовлетворяют соотношениям алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}(n)$ на уровне 1. В терминах бозонов эти токи $J_{ab}(z)$ имеют вид вертексных операторов с еще некоторым знаком возникающим из-за упорядочивания фермионов.*

*Если определить $S_{ab} = \oint J_{ab}(x)dx$, то $S_{ab}$ образуют алгебру Ли $\mathfrak{gl}(n)$ и все являются скринингами, то есть коммутируют с $W$ алгеброй. Формулой* (5.5) *опысываются только $J_{ab}(x)$ отвечающие простым корням, т.е. $|a-b| = 1$.*

*Образующие $W$ алгебры можно написать через фермионы*

$$\sum_{\alpha=1}^N \psi_\alpha^*\left(z+\frac12 t\right)\psi_\alpha\left(z-\frac12 t\right) = \frac{N}{t} + \sum_{k=1}^\infty \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}U_k(z)$$

*Несложно проверить, что $U_k(z)$ коммутируют со скринингами, но отметим, что это другие, отличные от $\mathcal{W}_k$ образующие.*

**Задача 5.6.** *Обозначим $\mathcal{V}(z)$ ток определенный по формуле*

$$\mathcal{V}(z) = (-1)^n\Big( :\!\Big(iQ\partial_z + \partial\varphi_1(z)\Big)\ldots\Big(iQ\partial_z + \partial\varphi_n(z)\Big)\!: \Big)1.$$

*С точностью до знака это просто последний ток в $W(\widehat{\mathfrak{gl}}(n))$. Докажите, что помимо указанных выше скринингов он коммутирует также с с интегралами от токов*

$$S_{n,+}(z) =:\exp\Big(ib(\varphi_{n-1}(z)+\varphi_n(z))\Big):,\quad S_{n,-}(z) =:\exp\Big(ib^{-1}(\varphi_{n-1}(z)+\varphi_n(z)\Big):.$$

*Видно, что этот скрининг соответствует простому корню системы $D_n$. Можно доказать, что подалгебра в $W(\widehat{\mathfrak{gl}}(n))$ порожденная током $\mathcal{V}(z)$ совпадает с $W(\widehat{\mathfrak{so}}(2n))$.*

# 6. Соотношения Серра

## 6.1. Квантовые группы

Пусть $\mathfrak{g}$ — простая алгебры Ли, ранга $l$ с матрицей Картана $A=(a_{i,j})_{i,j=1}^{l}$. Тогда ее нильпотентная подалгебра $\mathfrak{n}$ порождается образующими $e_1,\dots,e_l$ с Серровскими соотношениями

$$(\operatorname{ad} e_i)^{-a_{i,j}+1}e_j=0. \tag{6.1}$$

Здесь ad это присоединенное представление. В случае системы корней $A_l$ соотношение (в универсальной обертывающей $U(\mathfrak{n})$) можно записать как

$$e_ie_j-e_je_i=0,\ \ |i-j|>1;\qquad e_i^2e_j-2e_ie_je_i+e_je_i^2=0,\ \ |i-j|=1. \tag{6.2}$$

Перейдем теперь к квантовой группе $U_q(\mathfrak{n})$. Она порождена образующим $E_1,\dots,E_l$, которые градуированы решеткой корней. То есть для любого монома вида $x=E_{i_1}\cdot\ldots E_{i_k}$ определен его вес $\mathrm{wt}(x)=\sum\alpha_{i_k}$, где $\alpha_{i_k}$ простые корни. Определим *$q$-коммутатор* однородных элементов по формуле

$$[x,y]_q=xy-q^{(\mathrm{wt}(x),\mathrm{wt}(y))}yx. \tag{6.3}$$

В этой формуле $(\cdot,\cdot)$ это скалярное произведение на решетке корней. Построенное таким образом присоединенное действие мы будем обозначать $\operatorname{ad}_q$. Конечно формулу для $\operatorname{ad}_q$ можно получить из формул для коумножения и антипода в квантовой группе.

Алгебра $U_q(\mathfrak{n})$ порождена образующим $E_1,\dots,E_l$ которые должны удовлетворять соотношениям Серра

$$(\operatorname{ad}_q E_i)^{-a_{i,j}+1}E_j=0. \tag{6.4}$$

В случае системы корней $A_l$ эти соотношения можно расписать более явно в виде

$$E_iE_j-E_jE_i=0,\ \ |i-j|>1;\qquad E_i^2E_j-(q+q^{-1})E_iE_jE_i+E_jE_i^2=0,\ \ |i-j|=1. \tag{6.5}$$

То есть просто натуральное число 2 заменилось на $q$-число $[2]_q=(q^2-q^{-2})/(q-q^{-1})$.

**Задача 6.1.** *Пусть $q=\exp(2\pi i/p)$, $p$ целое число большее 2. Докажете (выведите из соотношений Серра), что $E_i^p$ коммутирует с остальными $E_j$.*

## 6.2. Соотношения на скрининги

Мы сейчас покажем, что скрининги формально удовлетворяют соотношениям Серра (6.5) (см. [8] и ссылка там). Обозначим

$$“S_{j_1}\cdots S_{j_k}” := \int_\Gamma \left(\prod_{l<k}(x_r-x_s)^{b^2}\right)\left(\prod x_r^{b\alpha_{j_r}\lambda}\right) :e^{b\alpha_{j_1}\cdot\vec{\varphi}(x_1)}\cdot\ldots\cdot e^{b\alpha_{j_k}\cdot\vec{\varphi}(x_k)}: dx_1\ldots dx_k$$

Здесь $\Gamma$ это цикл состоящий из вложенных друг в друга кривых охватывающих ноль, начинающися и заканчивающихся в 1. Подинтегральное выражение понимается как аналитически продолженное с области $0<x_n<\ldots<x_1$, где оно принимает вещественные значения (при вещественном $b^2$). Этот есть просто применение $n$ скринингов — интегралов от токов $S_{j,+}(x)$ (5.5).

Обозначим теперь

$$I_{j_1\cdots j_k} := \int_{0\le \arg x_1<\ldots<\arg x_k<2\pi}\left(\prod_{r<s}(x_r-x_s)^{b^2}\right)\left(\prod x_r^{b\alpha_{i_r}\cdot\lambda}\right)$$
$$:e^{b\alpha_{j_1}\cdot\vec{\varphi}(x_1)}\cdot\ldots\cdot e^{b\alpha_{j_k}\cdot\vec{\varphi}(x_k)}: dx_1\ldots dx_k$$

Здесь в интеграле все $x_j$ лежат на единичной окружности, упорядоченные.

Интегралы $“S_{j_1}\cdots S_{j_k}”$ деформируя контур сводятся к интегралам вида $I_{j_1\cdots j_k}$, однако из-за того, что радиальный порядок может не совпасть с порядком на окружности надо будет переобозначать $x_j$, и отсюда будут получаться фазы. Например

$$“S_1S_1” = (1+q^2)I_{11},\quad “S_1S_2” = I_{12}+q^{-1}I_{21},$$

где $q=\exp(i\pi b^2)$.

Отсюда следует, что

$$“[S_1,S_2]_q” = S_1S_2-q^{-1}S_2S_1 = (1-q^{-2})I_{12}$$
$$“[S_1,[S_1,S_2]_q]_q” = S_1(1-q^{-2})I_{12}-q(1-q^{-2})I_{12}S_1 = 0.$$

То есть мы проверили соотношения Серра (6.5)

$$“S_1S_1S_2-(q+q^{-1})S_1S_2S_1+S_2S_1S_1” = 0.$$

**Задача 6.2.** *Пусть $\alpha_i,\alpha_j$ какие-то два простых корня системы корней $X_N$. Докажите, что “$\mathrm{ad}_q^m\, S_i\cdot S_j$” $= C_m I_{i,\ldots,i,j}$. Найдите $C_m$. Выведите отсюда соотношения Серра* (6.4).

**Замечание 6.1.** Выше мы рассматривали только скрининги $S_{j,+}$. Скрининги $S_{j,-}$ также удовлетворяют соотношениям Серра, но с другим (модулярно преобразованным) параметром $\tilde{q}=\exp(i\pi b^{-2})$. Т.е. и $S_{j,+}$ и $S_{j,-}$ порождают нильпотентные подалгебры квантовой группы, но эти нильпотентные подалгебры не склеиваются в одну алгебру (при общем значении $b$, см важное исключение ниже).

Элементы эти двух квантовых групп формально коммутируют или антикоммутируют

$$S_{i,+}(x)S_{j,-}(y)=(x-y)^{(\alpha_i,\alpha_j)}\,{:}S_{i,+}(x)S_{j,-}(y){:}=(-1)^{(\alpha_i,\alpha_j)}S_{j,-}(y)S_{i,+}(x).$$

Подкрутив определения $_{i,+}, S_{j,-}$ (как в случае $b=i$ ниже) на некоторые знаки можно получить, что эти две квантовые группы просто коммутируют.

**Пример 6.1.** Мы обсуждали на прошлой лекции, что в случае $b=i$ есть большая $\widehat{\mathfrak{gl}}(n)$ уровня 1 симметрия. Скрининги $S_{ab}$ порождают $\mathfrak{gl}(n)$. Формула для $q$ выше дает $q=\tilde{q}=-1$, но этот знак как раз подправляется упомянутыми выше знаками в бозонизации токов $J_{ab}(z)$.

Отметим еще, что в этом примере две квантовые группы склеились $\mathfrak{n}_+$ и $\mathfrak{n}_-$ от одной $\mathfrak{gl}(n)$.

**Пример 6.2.** Центральным зарядом минимальной модели называется случай $b=i\sqrt{p/p'}$. В этом случае $q,\tilde{q}$ являются корнями из 1 и по задаче выше квантовые группы имеют большой центр. Теория представлений при этом конечно приобретает новые черты, что и соответствуют специальным конформными теориям — минимальным моделям.

## 7. Одевание вертексного оператора скринингом

Рассмотрим двумерное уравнение Лиувиллся

$$\partial\bar{\partial}\varphi=me^{\varphi}.$$

Из этого уравнения следует, что токи

$$T=-\frac{1}{4}(\partial\varphi)^2+\frac{1}{2}\partial^2\varphi,\quad \bar{T}=-\frac{1}{4}(\bar{\partial}\varphi)^2+\frac{1}{2}\bar{\partial}^2\varphi,$$

являются голоморфной и антиголоморфной функций соотественно $\bar{\partial}T=\partial\bar{T}=0$.

Поля вида $e^{(1-n)\varphi}$, $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям с коэффицентами зависящими только от $T$. Легко проверить это для первых $n$

$$\partial\cdot 1=0; \tag{7.1}$$

$$(\partial^2+T)e^{-\varphi/2}=0; \tag{7.2}$$

$$(\partial^3+4T\partial+2\partial T)e^{-\varphi}=0; \tag{7.3}$$

$$\dots \tag{7.4}$$

дальше это наверное как-то можно доказать.

# 8. Классические конформные блоки

## 8.1. Действие Лиувилля

Алгебра Вирасоро с центральным зарядом

$$c = 1 + 6Q^2, \text{ где } Q = b^{-1} + b$$

возникает из тензора энергии импульса в теории Лиувилля. Пусть $g_{ab}$ метрика на поверхности $\Sigma$, $R$ — ее кривизна, $\phi$ скалярное поле на поверхности $\Sigma$. Действие Лиувилля имеет вид

$$S_L = \int \left( \frac{1}{4\pi} g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + \mu e^{2b\phi} + Q \frac{R}{4\pi} \phi \right) \sqrt{g}\, d^2 x, \tag{8.1}$$

Эта теория является конформной при преобразованиях $g_{ab} \to \Omega g_{ab}$. Экспонента имеет аномальную размерность, $\sqrt{g} e^{2b\phi} \to \Omega^{1+b^2} \sqrt{g} e^{2b\phi}$, это мы компенсируем сдвигом $\phi$:

$$\phi \to \phi - \frac{Q}{2} \log \Omega,$$

но тогда из первого слагаемого возникает поправка. Там будет член квадратичный по $\Omega$, но он не зависит от $\phi$ и поэтому выносится (он связан с конформной аномалией теории).

**Задача 8.1.** *Проверьте, что член линейный по $\Omega$ из первого и последнего слагаемого в действии* (8.1) *сокращается (достаточно проверить для метрики $g_{a,b} = \delta_{a,b}$).*

Последнее слагаемое в действии (8.1) часто не пишут имея ввиду, что метрика плоская кроме бесконечности, то есть в конечной части $R = 0$, но это конечно упрощающая изложение небрежность, это слагаемое нужно.

Пусть $\mathcal{V}_\alpha = e^{2\alpha\phi}$, его размерность равна $\Delta_\alpha = \alpha(Q - \alpha)$. Главным объектом для нас является коррелятор

$$\langle \mathcal{V}_{\alpha_1}(z_1, \overline{z_1}) \ldots \mathcal{V}_{\alpha_n}(z_n, \overline{z_n}) \rangle = \int D\phi e^{-S_L} \prod e^{2\alpha_k \phi(z_k, \overline{z_k})}. \tag{8.2}$$

Зависимоть от $\mu$ простая, его всегда можно убрать из действия сдвигом $\phi \to \phi - \frac{\log \mu}{2b}$, тогда (8.2) умножится на $\mu^{\frac{1}{2b}(\sum \alpha_k - Q \int R/4\pi)}$, по теореме Гаусса-Бонне $\frac{1}{2\pi} \int R = 2 - 2g_\Sigma$, где $g_\Sigma$ — род поверхности $\Sigma$.

## 8.2. Классический предел

Теперь пусть $\phi = b^{-1}\varphi$, $\hbar = b^2$, $\mu = mb^{-2}$, $\alpha_k = b^{-1}\eta_k$ (сравните с формулами из пункта 5.1). Тогда, коррелятор (8.2) имеет вид

$$\langle \cdots \rangle \sim \in D\varphi e^{-\frac{1}{b^2}\tilde{S}} \to e^{-\frac{1}{b^2} S_{\text{cl}}},$$

где

$$\tilde{S} = \int \left( \frac{1}{4\pi} g^{ab} \partial_a \varphi \partial_b \varphi + m e^{2\varphi} + \frac{1+b^2}{4\pi} R \varphi \right) \sqrt{g}\, d^2x - \sum 2\eta_k \varphi_k (z_k \overline{z_k})$$

Предел $b \to 0$ называется классическим, центральный заряд при этом $c \to \infty$. Мы взяли параметры $\alpha$ полей такими, что они стремятся к $\infty$ при $b \to 0$, такие поля называют тяжелыми. Легкие поля (то есть такие, что $\alpha$ постоянно при $b \to 0$) не вносят вклад в $S_{\text{cl}}$, но вносят вклад в предэкспоненту.

Экстремумы действия $S_{\text{cl}}$ удовлетворяют уравнению Лиувилля. Например возьмем в качестве $\Sigma$ сферу Римана $\bar{\mathbb{C}}$ с плоской вне бесконечности метрикой $dzd\bar{z}$. Тогда получим

$$\begin{cases} \partial\bar{\partial}\varphi = m e^{2\varphi} \\ \varphi(z,\bar{z}) = 2\eta_k \log|z - z_k|^2 + O(1), \qquad z \to z_k \\ \varphi(z,\bar{z}) \to -\log|z|^2 + O(1) \quad z \to \infty. \end{cases} \tag{8.3}$$

**Задача 8.2.** *Что будет, если взять на сфере Римана метрику постоянной кривизны (метрику Фубини Штуди)* $\frac{1}{(|z|^2+1)^2} dzd\bar{z}$ *?*

Уравнение $\partial\bar{\partial}\varphi = me^{2\varphi}$ называется *уравнение Лиувилля* (см. прошлую лекцию). Другие два условия можно воспринимать как граничные условия.

Для решения уравнения Лиувилля можно построить голоморфный и антиголоморфный токи:

$$T = -(\partial\varphi)^2 + \partial^2\varphi \quad \Rightarrow \quad \bar{\partial} T = 0, \tag{8.4}$$

$$\bar{T} = -(\bar{\partial}\varphi)^2 + \bar{\partial}^2\varphi \quad \Rightarrow \quad \partial \bar{T} = 0. \tag{8.5}$$

Зная токи $T, \bar{T}$ можно наоборот пытаться найти $\varphi$, используя уравнение (7.2). Пусть $\psi_1, \psi_2$ два решения уравнения

$$(\partial^2 + T)\psi = 0,$$

$\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2$ два решения уравнения

$$(\bar{\partial}^2 + \bar{T})\bar{\psi} = 0.$$

Тогда

$$\varphi = -\log M_{ij} \psi_i \bar{\psi}_j, \tag{8.6}$$

для числовой матрицы $M$.

**Задача 8.3.** *Докажите, $\varphi$ удовлетворяет уравнению Лиувилля для некоторого $m$ зависящего от матрицы $M$ и нормировки $\psi_i, \bar{\psi}_j$.*

В терминах $T(z)$ граничные условия в точках $\zeta_k$ означают, что

$$T(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k}{(z - z_k)^2} + \frac{c_k}{z - z_k} + T_0(z)$$

Здесь $\delta_k = 2\eta_k(1 - \eta_k)$, $T_0(z)$ не имеет особенностей кроме бесконечности, $c_k$ называются акцессорными параметрами. Условие поведения на бесконечности имеет вид

$T(z) \sim O(1/z^4)$. Отсюда следует, что $T_0 = 0$ и кроме того возникает три уравнения на $c_k$:

$$\sum c_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} c_k z_k + \delta_k = 0, \quad \sum c_k z_k^2 + 2\delta_k z_k = 0. \tag{8.7}$$

Таким образом у нас есть $n-3$ свободных параметра.

**Замечание 8.1.** При замене координат $T(z)$ ведет себе как 2-форма. Они двойственны векторным полям. На сфере есть три голомофных векторных поля $\partial_z, z\partial_z, z^2\partial_z$. Сумма вычетов свертки этих векторных полей $T(z)$ должна быть равна нулю, это означают условия (8.7).

**Замечание 8.2.** Уравнение $(\partial^2 + T)\psi = 0$ имеет симметрию

$$z \to f(z), \quad \psi(z) \to f'(z)^{-1/2}\psi(z), \quad T \to f(z)^2 T(z) + \{f(z), T(z)\},$$

где $\{\cdot,\cdot\}$ — производная Шварца. Для дробно-линейных преобразований $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ она равна нулю.

## 8.3. Случай четырех точек

Пусть теперь $n = 4$. Переведем точки $(z_1, z_2, z_3, z_4)$ в $(0, x, 1, \infty)$. Тогда уравнение $(\partial^2 + T)\psi = 0$ перейдет в *уравнение Гойна*

$$\psi'' + \left(\frac{\delta_1}{z^2} + \frac{\delta_2}{(z-x)^2} + \frac{\delta_3}{(z-1)^2} + \frac{x(x-1)c}{z(z-1)(z-x)} + \frac{\delta_1+\delta_2+\delta_3-\delta_4}{z(z-1)}\right)\psi = 0.$$

**Замечание 8.3.** Это можно записать как матричное уравнение первого порядка $\chi' = \sum_{k=1}^{4} \frac{A_k}{z-z_k}\chi$, где $\chi$ двухкомпонентный вектор столбец. Уравнению Гойна соответствует специальный случай, если переходить от общего уравнения на $\chi$ то возникнет полюс в еще одной дополнительной точке $y$ (этот полюс не будет давать монодромии). При изомонодромной деформации, то есть,вариации $x$ при условии сохранения монодромии зависимость $y(x)$ описывается уравнение Пенлеве $VI$.

Решения $\psi$ около точки $z_k$ имеют ассимптотики $(z-z_k)^{\eta_k}$ и $(z-z_k)^{1-\eta_k}$. Пусть $M$ — монодромия этого уравнения при обходе вокруг точек $0, x$. Пусть $\operatorname{tr} M = \operatorname{ch}(\pi\nu)$. Фиксируем $\nu, \delta$ получаем $c = c(\nu|x)$. *Классический конформный блок* определяется из соотношения

$$c(\rho|x) = \frac{\partial f(\rho|x)}{\partial x}.$$

# 9. Классический конформный блок как предел квантового

## 9.1. Акцессорные параметры из действия Лиувилля

Мы перешли к классическим конформным блокам стартуя с корреляционной функции (8.2)

$$\langle \mathcal{V}_{\alpha_1}(z_1, \overline{z_1}) \ldots \mathcal{V}_{\alpha_4}(z_4, \overline{z_4}) \rangle, \tag{9.1}$$

все параметры $\alpha_k$ там были «тяжелыми», т.е. имели вид $\alpha_k = \eta_k/b$. Стандартным способом изучать корреляторы в конформной теории поля является вставка вырожденных полей $\Phi_{m,n}$. Простейший пример это вырожденное поле $V_{-b/2}$ — поле $\Phi_{1,2}$, соответствующий модуль Верма имеет нуль вектора на 2-м уровне (см. лекцию 7).

Пусть $n$ (количество точек) равно 4. Рассотрим теперь специальную 5-точечную корреляционную функцию

$$\Psi(z,\bar z) = \langle \mathcal{V}_{-b/2}(z,\bar z)\mathcal{V}_{\alpha_1}(z_1,\bar{z_1}\cdots \mathcal{V}_{\alpha_4}(z_4,\bar{z_4})\rangle. \tag{9.2}$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial_z^2}{\partial z^2} + b^2\sum_{k=1}^{4}\left(\frac{\Delta(\alpha_k)}{(z-z_k)^2} + \frac{1}{z-z_k}\partial_{z_k}\right)\right)\Psi(z,\bar z) = 0. \tag{9.3}$$

В пределе

$$\Psi(z,\bar z) \xrightarrow{b\to 0} \psi(z,\bar z)\exp\left(\frac{1}{b^2}S_{cl}(z,\bar z)\right) \tag{9.4}$$

Отсюда следует, что

$$\psi''(z) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\delta_k}{(z-z_k)^2} + \frac{c_k}{z-z_k}\right)\psi = 0, \qquad \text{где } c_k = \frac{\partial S_{\rm cl}}{\partial z_k}. \tag{9.5}$$

Тут на самом деле рассуждения не строгие, корреляционная функция (9.1) являет собой сумму (интеграл) по промежуточному импульсу от произведения конформного блока на сопряженный и на структурную константу

$$\langle \mathcal{V}_{\alpha_1}(0,\overline{0})\mathcal{V}_{\alpha_2}(q,\overline{q})\mathcal{V}_{\alpha_3}(1,\overline{1})\mathcal{V}_{\alpha_4}(z_4,\overline{z_4})\rangle = \sum_P \mathrm{C}(P)\big|\mathcal{F}(\vec\alpha,P|q)\big|^2, \tag{9.6}$$

здесь $q$ — двойное отношение точек $z_1,z_2,z_3,z_4$. В пределе $P\sim\nu/b$ корреляционная функция имеет вид $\exp(\frac{1}{b^2}(f+\bar f+\log\mathrm{C}(P)))$, где сделана квазиклассика про $\nu$ (т.е. $\nu$ решает уравнение $\frac{\partial f}{\partial\nu}+\frac{\partial\bar f}{\partial\nu}+\frac{\partial\mathrm{C}}{\partial\nu}=0$). Про классический конфорный блок с таким $\nu$ мы показали (9.5), а дальше предполагаем, что это верно всегда, это иногда называется гипотезой Полякова (доказанной Зографом-Тахтаджяном).

**Замечание 9.1.** Можно находить $\psi$ пользуясь тем, что если $z_i = z_j$, то уравнение сводится к гипергеометрическому уравнению Гаусса, а далее ответ искать в виде ряда по $z_i - z_j$.

## 9.2. Классический конформный блок из квантового

Через $\mathcal{F}(\vec\alpha,P|z)$ мы обозначим четырехточечтный конформный блок, нормированный на 1, т.е.

$$\mathcal{F}(\vec\alpha,P|q) = \sum \mathcal{F}_N q^N, \tag{9.7}$$

где

$$\mathcal{F}_N = \sum_{\lambda,\mu} G^{\lambda,\mu}\langle\alpha_1|V_{\alpha_2}(1)|P,\lambda\rangle\langle P,\mu|V_{\alpha_3}(1)|\alpha_4\rangle,$$

где $|P,\lambda\rangle$ какой-то базис в модуле Верма $V_{\Delta_P}$ на уровне $N$, (обычно $\lambda$ это диграммы Юнга из $N$ клеток), $G^{\lambda,\mu}$ — матрица обратная к форме Шаповалова.

Гипотеза Замолодчикова гласит, что

$$\log \mathcal{F}(\vec{\alpha}, P|q) = \frac{1}{b^2} f(\vec{\eta}, \nu|q) + o(1), \qquad \text{при } b \to 0. \tag{9.8}$$

Нетривиальность этого утверждение можно понять например следующим образом. Легко видеть, что $\mathcal{F}_N \sim b^{-2N}$. Тогда, коффициенты логарифма $\log(\sum F_N q^N) = \sum f_N q^N$ тоже априори имеют такую ассимптотику $f_N \sim b^{-2N}$. Гипотеза Замолодчикова утверждает, что на самом деле $f_N \sim b^{-2}$.

### 9.3. Некрасовские интегралы

Соответсвтие Алди-Гайотто-Тачикаы (АГТ соответствие) утверждает, что

$$Z_{\mathrm{N}ek}(q) = \sum Z_N q^N = (1-q)^{2\alpha_2\alpha_3} \mathcal{F}(q). \tag{9.9}$$

Здесь $Z_N$ определены как многократные контурные интегралы (иногда их называют интегралами Лосева-Мура-Некрасова-Шаташвили — LNMS интегралы)

$$Z_N = \frac{1}{(2\pi i)^N} \frac{1}{N!} \int \cdots \int \prod_{k=1}^{N} Q(x_k) \prod_{1 \le i < j \le N} V(x_i - x_j) dx_1 \dots dx_N, \tag{9.10}$$

где

$$\begin{gathered}
Q(x) = -\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \frac{\prod_{f=1}^4 (x + m_f)}{P(x) P(x + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)}, \;\; P(x) = (x - a_1)(x - a_2), \\
V(x) = \frac{x^2 (x^2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2)}{(x^2 - \varepsilon_1^2)(x^2 - \varepsilon_2^2)}, \;\; b = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}, \;\; a_1 - a_2 = \frac{P}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}, \\
m_1 = (\alpha_1 + \alpha_2 - \frac{Q}{2})\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}, \;\; m_2 = (\alpha_1 - \alpha_2 + \frac{Q}{2})\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}, \\
m_3 = (\alpha_3 + \alpha_4 - \frac{Q}{2})\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \;\; m_4 = (\alpha_3 = \alpha_4 - \frac{Q}{2})\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}
\end{gathered}$$

В этих обозначениях классический предел $b \to 0$ эквивалентен пределу $\varepsilon_2 \to 0$, условие, что все поля тяжелые будет означать, что параметры $a, m$ остаются конечными.

Функция $Z_{\mathrm{N}ek}(q)$ называется (интанстнонной) Некрасовской статистической суммой для 4-мерной $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной калибровочной теории с группой $SU(2)$. Параметры $a_1, a_2$ это вакуумные средние калибровочного поля, $m_f$ — массы полей материи.

Вопрос выбора контура в формуле (9.10) довольно интересный. В случае когда количество параметров $m_f$ в определении $Q(x)$ меньше 4, можно считать, что параметры имеют маленькую вещественную часть $a = a_{\mathbb{R}} + i\delta, \varepsilon = \varepsilon_{\mathbb{R}} + i\delta$, и контур интегрирования проходит по вещественным значениям $x_i$. В случае 4 параметров

$m_f$ (который собственно и отвечает конформному блоку) интеграл по вещественным значениям становится расходящимся, тогда говорят что-то про продолжение интеграла вверх.

Другой способ это упорядочить интегрирования, скажем считать, что внешнее интегрирование ведется по $x_N$ и контур проводится так, чтобы внутри были полюса $a_1, a_2, x_k + \varepsilon_j$, где $1 \le k \le N-1$, $j = 1, 2$. Затем берется интегрирование на $x_{N-1}$, контур проводится так, чтобы внутри были полюса $a_1, a_2, x_k + \varepsilon_j$, где $1 \le k \le N-2$, $j = 1, 2$, и так далее. Вычисляя эти интегралы по вычетам можно получить другую стандартную Некрасовскую формулу в вид суммы по наборам диаграмм Юнга.

# 10. Классический конформный блок как предел квантового II

## 10.1. Взятие LNMS интеграла по вычетам: схема

Разберем для начала упрощенный пример интеграла (9.10).

$$Z_N^m = \frac{1}{(2\pi i)^N} \int \cdots \int \frac{F(x_1, \ldots, x_N)}{\prod_{k=1}^N \prod_{j=1}^m (x_k - a_j)} \prod_{1 \le i < j \le N} \frac{(x_i - x_j)^2}{(x_i - x_j)^2 - \varepsilon^2} dx_1 \ldots dx_N, \quad (10.1)$$

Будем считать, что $\operatorname{Im} a_j > 0$, $\operatorname{Im} \varepsilon > 0$, $F$ — симметричная функция, не имеющая мешающих нам особенностей, интегрирование ведется по вещественным значениям $x_i$, но будем деформировать интеграл вверх.

**Пример 10.1.** Пусть $N = 2, m = 1$. Возьмем сначала интеграл по $x_2$:

$$Z_2^1 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{mathbbR} \frac{F(x_1, x_2)}{(x_1 - a)(x_2 - a)} \frac{(x_1 - x_2)^2}{(x_1 - x_2)^2 - \varepsilon^2} =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{F(x_1, a)(x_1 - a)^2}{(x_1 - a)((x_1 - a)^2 - \varepsilon^2)} + \frac{F(x_1, x_1 + \varepsilon)\varepsilon^2}{(x_1 - a)(x_1 + \varepsilon - a)2\varepsilon} \right) dx_1$$

Теперь по $x_1$ есть полюса в точках $a$, $a + \varepsilon$, $a - \varepsilon$. Вычет в последнем полюсе равен

$$\frac{F(a - \varepsilon, a)\varepsilon^2}{2\varepsilon^2} + \frac{F(a - \varepsilon, a)\varepsilon^2}{-\varepsilon \cdot 2\varepsilon} = 0$$

Это на самом деле естественно, если считать, что $\operatorname{Im} \varepsilon > \operatorname{Im} a$, то такого полюса просто нет в нашем контуре, а так как ответ не зависит от таких неравенств, то значит вычет в этом полюс должен равнятся нулю. Сумма вычетов в первых двух равна

$$Z_2^1 = \frac{F(a, a + \varepsilon)\varepsilon^2}{2\varepsilon^2} + \frac{F(a + \varepsilon, a)\varepsilon^2}{\varepsilon \cdot 2\varepsilon} = F(a, a + \varepsilon).$$

Аналогично получается, что

$$Z_N^1 = (\cdots) F\Big(a, a + \varepsilon, \ldots, a + (N-1)\varepsilon\Big). \quad (10.2)$$

Если $m > 1$, то ответ дается суммой вкладов занумерованных наборами $l_1, \ldots, l_m$, $\sum l_j = N$, и соответствующий вклад пропорционален

$$F\Big(a_1, a_1+\varepsilon, \ldots, a_1 + (l_1-1)\varepsilon, \ldots, a_m, a_m+\varepsilon, \ldots, a_m + (l_m-1)\varepsilon\Big).$$

Т.е. точки в который мы вычисляем вычет разбиты на $m$ струн от каждой из $a_j$.

Рассмотрим теперь честный интеграл

$$Z_N^m = \frac{1}{(2\pi i)^N}\frac{1}{N!}\int\cdots\int \frac{F(x_1,\ldots,x_N)}{\prod\prod(x_k-a_l)}\prod_{i<j}\frac{x_{ij}^2(x_{ij}^2-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2)}{(x_{ij}^2-\varepsilon_2^2)(x_{ij}^2-\varepsilon_2^2)}dx_1\ldots dx_N, \qquad (10.3)$$

где $x_{ij} = x_i - x_j$. Опять будем считать, что $\operatorname{Im} a_l > 0$, $\operatorname{Im}\varepsilon_1 > 0$, $\operatorname{Im}\varepsilon_2 > 0$. Тогда ответ задается суммой по диаграммам Юнга где полюса в точках $a_l + i\varepsilon_1 + j\varepsilon_2$.

**Задача 10.1.** *Вычислите интеграл* (10.3) *по вычетам при* $N = 2$.

## 10.2. Классический предел, неправильное рассуждение

Мы хотим взять предел $\varepsilon_2 \to 0$. Напишем

$$Z_N = \frac{1}{N!}\int\prod_{i<j}V(x_i-x_j)\prod Q(x_k)dx_k,$$

где

$$V(x) = \frac{x^2(x-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2)}{(x^2-\varepsilon_1^2)(x^2-\varepsilon_2^2)}, \quad Q(x) = -\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\frac{\prod(x+m_f)}{P(x)P(x+\varepsilon_1+\varepsilon_2)}, \; P(x) = (x-a_1)(x-a_2)$$

Введем новые обозначения $\varepsilon_2 \to 0$: $V(x) = e^{-\varepsilon_2 G(x)}$, $\varepsilon_2 Q(x) = W(x)$.

$$Z \to \sum_{N=0}^{\infty}\frac{q^N}{N!}\int\prod_{i<j}e^{-\epsilon_2 G(x_i-x_j)}\prod\frac{W(x_k)}{\varepsilon_2}dx_k \qquad (10.4)$$

Возьмем $\rho(x) = \sum\delta(x-x_k)$. Тогда можно перейти к квадратичному функциональному интегралу

$$\prod_{i<j}e^{-\epsilon_2 G(x_i-x_j)} = \exp\left(-\frac{\varepsilon_2}{2}\int\rho(x)\rho(y)G(x-y)dxdy\right) =$$
$$= \int D\varphi\exp\left(\frac{-1}{2\varepsilon_2}\int\varphi(x)\varphi(y)G^{-1}(x-y)dxdy\right)\exp\left(\int\rho(x)\varphi(x)dx\right)$$

Отсюда, используя $e^{\int\rho(x)\varphi(x)dx} = \prod e^{\varphi(x_k)}$ получаем

$$Z = \int D\varphi\exp\left(\frac{-1}{2\varepsilon_2}\int\varphi(x)\varphi(y)G^{-1}(x-y)dxdy\right)\left(\sum_{N=0}^{\infty}\frac{q^N}{N!}\Big(\int\frac{W(x)}{\varepsilon_2}dx\Big)^N\right) =$$
$$= \int D\varphi\exp\frac{1}{\varepsilon_2}\left(\frac{1}{2}\int\varphi\varphi G^{-1} + \int qWe^{\varphi}\right) \sim e^{\frac{-1}{\varepsilon_2}S_{\rm cl}},$$

где $S_{\mathrm{cL}}$ вычисляется на экстремуме действия.

На самом деле этот ответ неправильный, в правильном ответе вместо $qW(x)e^{\varphi(x)}$ стоит $\mathrm{Li}_2(qW(x)e^{\varphi(x)})$, где $\mathrm{Li}_s(z) = \sum z^k/k^s$.

Выражение $\int W(x)e^{\varphi(x)}dx$ можно рассматривать как некий аналог скрининга.

## 10.3. Более аккуратное вычисление

Идея следующего вычисления написана в [17, Sec 6.4] (см. также [7]). Надо учитывать, что при вычислении по полюсам точки начинаются слипаться, это происходит когда точки начинают отличаться на кратное $\varepsilon_2$. Такой набор из близких значений $x_k$ в интеграле называется кластером, он характеризуется количество переменных.

Таким образом ответ может быть записан в виде сумме по диграммам Юнга $\lambda$, где длины строк это размеры кластеров. Мы обозначим через $m_k$ количество строк длины $k$ в диаграмме $\lambda$, конечно большинство $m_k$ равны 0. Тогда

$$Z_N = \sum_{\sum|\lambda|=N} Z_\lambda, \tag{10.5}$$

где

$$Z_\lambda = \frac{1}{(2\pi i\varepsilon_2)^{\sum m_k}} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(-q)^{m_k k}}{k^{2m_k} m_k!} \int \prod_{k,l}\prod_{i,j} \exp\left(-\varepsilon_2 d_k d_l G(x_i^{(k)} - x_j^{(l)})\right) \prod_{k=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m_k} Q(x_j^{(k)})^k \prod_{j=1}^{m_k} dx_j^{(k)}$$

**Замечание 10.1.** Отметим, что эти диаграммы Юнга отличаются от диаграмм Юнга возникших при вычислении по полюсам выше, в частности в этом рассуждении диаграмма всегда одна, а там их количество равнялось рангу калибровочной группы (количеству параметров $a_l$).

Теперь переходя к функциональному интегралу по полю $\varphi$ аналогично прошлом пункту мы получаем

$$Z_\lambda = \int D\varphi \exp\left(\frac{-1}{2\varepsilon_2}\int \varphi(x)\varphi(y)G^{-1}(x-y)dxdy\right) \prod_k \frac{1}{m_k!}\left(\int \frac{1}{k^2}\left(-qQ(x)e^{\varphi(x)}\right)^k dx\right)^{m_k}$$

Теперь суммируя по каждому $m_k$ по отдельности мы получаем, что

$$\sum_{m_1,\ldots,m_k} \prod_k \frac{1}{m_k!}\left(\frac{1}{k^2}\int \left(-qQ(x)e^{\varphi(x)}\right)^k dx\right)^{m_k} =$$
$$= \exp\left(\sum_k \frac{1}{k^2}\int \left(-qQ(x)e^{\varphi(x)}\right)^k dx\right) = \exp\left(\int \mathrm{Li}_2(-qQ(x)e^{\varphi(x)})dx\right))$$

Итого получаем

$$Z = \int D\varphi \exp \frac{1}{\varepsilon_2} \left( \int \varphi\varphi G^{-1} + \int \mathrm{Li}_2(-qQ(x)e^{\varphi}) \right)). \tag{10.6}$$

Варьируя по $\varphi$ получаем уравнение экстремума

$$\int G^{-1}(x-y)\varphi(y) + \log(1 - Q(x)e^{\varphi(x)}) = 0,$$

или, обращая оператор с ядром $G(x-y)$

$$\varphi(x) + \int G(x-y) \log \left(1 - qQ(y)e^{\varphi(y)}\right) dy = 0. \tag{10.7}$$

# A. Сингулярные вектора и полиномы Джека

## A.1. Выбор контура

Как уже было сказано в лекции 2 сингулярный вектор может быть записан в виде $S_+^{(n)}|\alpha\rangle$, см. формулу (2.7). Явно сингулярный вектор имеет вид

$$\int_{\Gamma_n} \left( :\!\exp\left(\alpha_+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{k>0} \frac{1}{k} a_{-k} x_j^r\right)\!: \, |\alpha\rangle \right) \prod_{j<j'} (x_j - x_{j'})^{\alpha_+^2} \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha\alpha_+} dx_j. \tag{A.1}$$

Будем интегрировать аналогично пункту 2.3. Немного формально запишем экспоненту $\left(:\!\exp\left(\alpha_+ \sum_{j=1}^n \sum_{k>0} \frac{1}{r} a_{-k} x_j^k\right)\!: \, |\alpha\rangle\right)$ в виде суммы $\sum A_{m_1,\dots,m_n} x_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{m_n}$, где показатели $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $A_{m_1,\dots,m_n}$ — это какие-то вектора в Фоковском модуле $\mathrm{F}_{\alpha+n\alpha_+}$. Сделаем замену переменных в интеграле

$$x_1 = yy_1, \; x_2 = yy_2, ; \dots, x_{n-1} = yy_{n-1}, \; x_n = y.$$

Тогда удобно считать, что $\Gamma_n$ это произведение цикла по $y$ вокруг нуля и какого-то цикла $C_{n-1}$. интеграл сведется к

$$\left( \sum_{k_i} \int y^{n\alpha\alpha_+ + \binom{n}{2}\alpha_+^2 + \sum m_i + (n-1)} dy \right) \int_{C_{n-1}} \left(\prod y_i^{m_i}\right) \prod_{j<j'} (y_j - y_{j'})^{\alpha_+^2} \prod y_j^{\alpha\alpha_+} (1-y_j)^{\alpha_+^2} dy_j. \tag{A.2}$$

Первый интеграл по $y$ не равен нулю только если $n\alpha\alpha_+ + \binom{n}{2}\alpha_+^2 + \sum m_i + n = 0$. Мы получили условие, что $n\alpha\alpha_+ + \binom{n}{2}\alpha_+^2 + n \in \mathbb{Z}_{<0}$.

Остается второй интеграл. В нем можно взять не замкнутый (абсолютный) цикл, а относительный цикл, цикл на границе которого подинтегральное выражение зануляется. Такой цикл легко предъявить, это симплекс

$$C_{n-1} = \left\{ y_1, \dots, y_{n-1} | 0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_{n-1} \leq 1 \right\}.$$

Более того, так как вектор $A_{m_1,\dots,m_n}$ симметричен по перестановке индексов можно после этого перейти к интегралу по кубу $0 \leq y_1, \dots, y_{n-1} \leq 1$, при этом заменив $(y_i - y_j)$ на $|y_i - y_j|$.

Получается интеграл типа интеграла Сельберга. Напомним, что интеграл Сельберга это обобщение Бета интеграла в виде

$$\int_{[0,1]^{n-1}} \prod_{i<j} |y_i - y_j|^{2\gamma} \prod y_j^{\alpha-1}(1-y_j)^{\beta-1} dy_j = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\Gamma(\alpha + (j-1)\gamma)\Gamma(\beta + (j-1)\gamma)\Gamma(1+j\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+(j+n-3)\gamma)} \tag{A.3}$$

Интеграл сходится при условии

$$\operatorname{Re}\alpha > 0, \quad \operatorname{Re}\beta > 0, \quad \operatorname{Re}\gamma > -\frac{1}{n-1}, -\frac{\operatorname{Re}\alpha}{n-2}, -\frac{\operatorname{Re}\beta}{n-2}.$$

Нам предстоит теперь разобраться когда сингулярный вектор определенный по формуле (A.2) не равен нулю. Предположим, что

$$\alpha\alpha_+ + \binom{n}{2}\alpha_+^2 = -nm - n, \tag{A.4}$$

где $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Тогда в формуле (A.2) есть слагаемое

$$\frac{1}{(n-1)!} A_{m,\dots,m} \int_{[0,1]^{n-1}} \prod_{i<j} |y_i - y_j|^{\alpha_+^2} \prod y_j^{\alpha\alpha_+ + m}(1-y_j)^{\alpha_+^2} dy_j =$$

$$\frac{1}{(n-1)!} A_{m,\dots,m} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\Gamma((j-n)\alpha_+^2/2)\Gamma(1+(j+1)\alpha_+^2/2)}{\Gamma(1+\alpha_+^2/2)} \tag{A.5}$$

Таким образом мы получили ненулевой коэффициент. Ниже мы покажем, что $A_{m,\dots,m}$ линейно независим от остальных $A_{m_1,\dots,m_n}$ с условием $\sum m_i = nm$, значит сингулярный вектор заданный формулой (A.2) не равен нулю.

Мы использовали условие (A.4), оно эквивалентно может быть записано в виде $2\alpha\alpha_+ + (n-1)\alpha_+^2 = -2(m+1)$, откуда следует, что $\alpha = \frac{m+1}{2}\alpha_- - \frac{n-1}{2}\alpha_+$, откуда

$$\alpha + n\alpha_+ = \frac{(m+1)\alpha_- + (n+1)\alpha_+}{2} = \alpha_{-m,-n},$$

где мы использовали формулу (1.15). Мы показали, что при $\Delta = \Delta_{m,n}$ фоковский модуль (а значит и модуль Верма) имеет сингулярный вектор.

Мы не обсуждали вопрос сходимости интеграла (A.5) (и более общо аналогичного интеграла для общих $m_1, \dots, m_k$). По приведенному выше критерию он сходится если

$$\operatorname{Re}\alpha_+^2 > -1, \quad \operatorname{Re}\alpha\alpha_+ > -m-1, \quad \frac{1}{2}\operatorname{Re}\alpha_+^2 > -\frac{1}{n-1}, -\frac{\alpha\alpha_+ + m + 1}{n-2}, -\frac{\alpha_+^2 + 1}{n-2}.$$

Хочется сказать, что числа $\operatorname{Re}\alpha_+^2, \operatorname{Re}\alpha\alpha_+$ очень большие, но это противоречит условию (1.4). На самом деле видимо нельзя сделать так, чтобы симплекс $C_n$ работал для всех наборов $m_1, \ldots, m_n$ (?)[3]. Но интеграл (A.5) все таки обслужить можно.

**Замечание A.1.** Если наше предположение (A.4) неверное, то на самом деле сумма коэффициентов при $A_{m_1,\ldots,m_n}$ по всем перестановками индексов $m_i$ равна нулю, для случая $n = 2$ мы это видели на лекции (2).

**Замечание A.2.** Другой стандартный выбор контура $C_{n-1}$ это Фельдеровский цикл [10] : произведение $n-1$ окружности начинающейся и заканчивающейся в 1 и охватывающих ноль. Можно считать, что эти окружности вложены друг в друга, тогда этот контур может быть продеформирован в симплекс $C_{n-1}$ использованный выше. При этом для сходимости (и интегрования по частям) нужно будет только положительности вещественной части $\alpha_+^2$.

А чтобы доказать, что интеграл не равен нулю можно член при $A_{m,\ldots,m}$ продеформировать в симплекс и воспользоваться интегралом Сельберга.

## A.2. Полиномы Джека

Сделаем небольшое отступление. Пространство Фока удобно отождествлять с пространством симметрических многочленов от бесконечного числа переменных $x_1, x_2, \ldots$. Это пространство есть просто пространство многочленов от образующих $p_k = \sum x_i^k$, эти образующие называются степенными суммами. Есть другой набор образующих $e_k = \sum x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}$, где суммирование ведется по наборам $i_1 < \ldots < i_k$, эти образующие называются элементарными симметрическими многочленами. Два набора образующих $e_k$ и $h_k$ связаны посредством замены

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k e_k z^k = \prod_i (1 - x_i z) = \exp\Big( \sum_{i,k>0} \frac{x_i^k}{-k} z^k \Big) = \exp(\sum_{k>0} \frac{-1}{k} p_k z^k), \tag{A.6}$$

здесь и далее мы считаем, что $e_0 = 1$. На пространстве симметрических многочленов есть разные аддитивные базисы, они нумеруются разбиениями $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots)$.

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \ldots, \quad p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \ldots, \quad m_\lambda = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots + \text{symmetric terms}. \tag{A.7}$$

Базис $m_\lambda$ называется мономиальным.

На самом деле эти базисы уже возникали выше. Если мы заменим $-\alpha_+ a_{-k}$ на $p_k$, то многочлены $p_\lambda$ будут соответствовать стандартному ПБВ базису в Фоковском модуле. А вектора $A_{m_1,\ldots,m_n}$ использованные выше это просто произведения $e_{m_1} \cdot \ldots \cdot e_{m_n}$. Мы сразу получили, что эти вектора являются линейно независимыми (при упорядоченных $m_i$).

Про вектор $A_{m,\ldots,m}$, непосредственно использовавшийся, выше можно напрямую сказать, что соответствующий полином $e_{(m^n)}$ в разложении по мономиальному базису содержит член $m_{(m^n)}$, а в других $e_{m_1} \cdot \ldots \cdot e_{m_n}$ с $\sum m_i = mn$ его нет. Таким

[3]Нам нужно еще чтобы при интегрировании по частям вклад от границы равнялся нулю, для этого нужно зануление на границе, что налагает еще более сильные условия на $\alpha, \alpha_+$.

образом мы доказали, что сингулярный вектор для $\Delta_{n,m}$ отличен от нуля и более того, написали для него формулу в бозонизации с фиксированной нормировкой — коэффициент при $m_{(m^n)}$ определяется по формуле (A.5).

Точно утверждение о виде сингулярного вектора после бозонизации доказали Мимачи и Ямада [15], мы ниже скорее следуем работе [6]. Сингулярный вектор пропорционален симметрической функции Джека. Эти функции зависят от параметра $\gamma$ и обозначаются $P^{\gamma}_{\lambda}$ или $J^{\gamma}_{\lambda}$, (на самом деле вместо $\gamma$ часто пишут $\alpha$, но эта буква уже перегружена выше).

Функции $P^{\gamma}_{\lambda}$ определяются двумя условиями: $P^{\gamma}_{\lambda} = m_{\lambda} + \sum_{\mu<\lambda} m_{\mu}$ и $P^{\gamma}_{\lambda}$ попарно ортогональны относительно скалярного произведения в котором оператор ортогональный умножению на $p_k$ равен $p_k^* = \gamma k \partial/\partial p_k$.

Нормировка $J^{\gamma}_{\lambda}$ отличается от $P^{\gamma}_{\lambda}$ тем, что в разложении $J^{\gamma}_{\lambda}$ по базису $p_{\mu}$ коэффициент при $p_1^n$ равен 1, в этой нормировки все коэфициенты становятся полиномиальными по $\gamma$. Примеры полиномов Джека

$$J_1 = p_1, \qquad J_2 = p_1^2 + \gamma p_2, \qquad J_{1,1} = p_1^2 - p_2 \tag{A.8}$$

$$J_3 = p_1^3 + 3\gamma p_2 p_1 + 2\gamma^2 p_3, \quad J_{2,1} = p_1^3 + (\gamma-1) p_2 p_1 - \gamma p_3, \quad J_{1,1,1} = p_1^3 - 3p_2p_1 + 2p_3. \tag{A.9}$$

Еще одной свойство симметрических функций Джека это, то, что они являются собственными относительно системы коммутирующий операторов: $I_k J^{\gamma}_{\lambda} = \epsilon^{\gamma}_{\lambda,k} J^{\gamma}_{\lambda}$. Первые два из этих операторов имеют вид:

$$I_1 = \sum_{k>0} p_k p_k^*, \quad I_2 = \sum_{k,l>0} \Big( p_l p_l p_{k+l}^* + p_{k+l} p_k^* p_l^* \Big) + (\gamma - 1) \sum_{k>0} k p_k p_k^*. \tag{A.10}$$

Из этой формулы сразу следует, что операторы $I_1, I_2$ являются самосопряженными для скалярного произведения. Высшие операторы это отдельная история (см. Макдональда или Склянина-Назарова или ...). Собственные значения равны

$$\epsilon^{\gamma}_{\lambda,1} = \sum_{(i,j)\in\lambda} 1 = \sum \lambda_i, \quad \epsilon^{\gamma}_{\lambda,2} = \gamma\Big( \sum_{i,j\in\lambda} ((2i-1)\gamma - (2j-1)) \Big) = \gamma\Big( \gamma \sum \lambda_i^2 - \sum (\lambda_j')^2 \Big)$$

Отметим, что спектр пары операторов $I_1, I_2$ приведенных выше, является вырожденным, существуют такие $\lambda$, $\mu$, что $\epsilon^{\gamma}_{\lambda,1} = \epsilon^{\gamma}_{\mu,1}$ и $\epsilon^{\gamma}_{\lambda,2} = \epsilon^{\gamma}_{\mu,2}$, поэтому нужные высшие операторы. Но можно заметить, что подобные равенства могут возникнуть только если $\lambda$ и $\mu$ несравнимы относительно доминантного порядка.

Запишем теперь оператор $I_2$ в терминах Гейзенберга, заменим $p_k$ на $-\alpha_+ a_{-k}$, двойственные операторы $p_k^*$ заменим на $-\frac{1}{2}\alpha_+ a_k$. Вместо $\gamma$ мы подставим $\alpha^2/2$ (сравните с интегралом (A.3)), тогда из соотношения $[p_k^*, p_k] = k\gamma$ мы получаем $[a_k, a_{-k}] = k$. Итого мы можем написать

$$I_2 = (-\alpha_+)^3 \Big( \sum_{r>0} a_{-r} \left( \sum_s a_s a_{r-s} + \frac{1}{i\sqrt{2}} (b + b^{-1})(r+1) a_r \right) - \\ - (2a_0 + \frac{\gamma - 1}{-\alpha_+}) \sum a_{-r} a_r \Big). \tag{A.11}$$

Выражение в скобках есть генератор $L_r$ алгебры Вирасоро по формуле (1.2)[4]. Таким образом получаем, что сингулярный вектор является собственным для $I_2$ с собственным значением

$$(-\alpha_+)^3\Big(2\frac{m\alpha_- + (n+1)\alpha_+}{2} - \frac{\alpha_+ + \alpha_-}{2}\Big)(m-1)n = \gamma(\gamma(m-1)^2n + n^2(m-1)) = \epsilon^\gamma_{(m)^n,2}$$

Из этого сразу следовало, бы что сингулярный вектор пропорционален полиному Джека $P^\gamma_{(m)^n}$. если бы н вырожденность спектра $I_2$.

**Задача A.1.** *Покажите, что в формуле для сингулярного вектор встречаются только $m_\mu$, где $\mu < (m)^n$ (сравнение в доминантом порядке). Выведете из этого, что сингулярный вектор пропорционален полиному Джека.*

Мы также можем найти коэффициент пропорциональности, так как $m_{(m)^n}$ встречается в сингулярном вектор с коэффицентом (A.5).

**Замечание A.3.** Аналогичное утверждение верно и для $W$ алгебр для $W(\widehat{\mathfrak{gl}}(n))$, при этом сингулярные вектора соответствуют $J^\gamma_\lambda$, в которой диаграмма $\lambda$ состоит из не более чем $n-1$ прямоугольного блока.

**Замечание A.4.** Квантовой системой Калоджера-Сазерленда называется система с гамильтонианом вида

$$\hat{H}_{CS} = -\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q_j}\right)^2 + (\frac{\pi}{L})^2 \sum_{i<j} \frac{g(g-1)}{\sin^2 \frac{\pi}{L}(q_i - q_j)} \tag{A.12}$$

Это система $N$ частиц на окружности длины $2L$.

Собственные функции ищутся в виде $P(x_i)\prod_{i<j}\sin^g\left(\frac{\pi}{L}(q_i-q_j)\right)$, где $x_i = \exp\frac{2\pi i}{L}q_i$, $P$ — симметрический полином. Произведение $prod_{i<j}\sin^g\left(\frac{\pi}{L}(q_i-q_j)\right)$ — е это (тригонометрический) аналог Вандермонда и может быть рассмотрено как основное состояние для системы Калоджераю. Обычно предполагают, что $g > 1$ для интегрируемости. В терминах $x_i$ гамильтониан имеет вид

$$\hat{H}_{CS} = \sum\left(x_j\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 + g\sum_{i<j}\frac{x_i + x_j}{x_i - x_j}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_i} - x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

**Задача A.2.** *Покажите, что действие $\hat{H}_{CS}$ является треугольным в базисе $m_\lambda$ с числами на диагонали равными $\epsilon^\gamma_{\lambda,2}$.*

**Задача A.3.** *Напишите действие оператора $\hat{H}_{CS}$ на $p_\lambda$ и выведите из этого, что в пределе, когда число переменных $N$ стремится к бесконечности, то этот Гамильтониан совпадает с $I_2$ определенным в формуле* (A.10).

[4]отметим, что на после такой перенормировки член $a_{-r}a_{-s}a_{r+s}$ получается с вдвое большим коэффициентом $a_{-r-s}a_ra_s$, так и надо для того, чтобы получилась алгебра Вирасоро

**Замечание A.5.** Можно это делать в духе [6]. Соответствие между векторами из пространства Фока и функциями от $x_1, \ldots, x_n$ осуществяется

$$v \mapsto f(x) = (\mathrm{vac}, \exp(\sum_{k>0} \alpha_+ \frac{p_k}{k} a_k) v)$$

Здесь $p_k = \sum x_i^k$. Можно считать, что Тогда действие оператора $\hat{H}_{CS}$ переписывается как действие оператора (A.10).

Один из способов доказывать наличие бесконечной системы коммутирующий операторов $I_1, I_2, \ldots$ это получить $N$ таких операторов для Калоджера (при помощи операторов Данкл или при помощи операторов Секигучи), а потом перейти к пределу. То, что получится в пределе называется квантованием уравнения (классической интегрируемой системы) Бенджамина-Оно.

## A.3. Бенджамин Оно

Интегрируемая система (A.10) является квантованием системы Бенджамина-Оно, см. например [16]. Мы будем работать для периодический функций на вещественной оси

$$\theta(x) = \varphi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n z^n,$$

где $z = \exp(-ix)$. На этих функциях мы рассмотрим скобку по стандартным формулам

$$\{\theta(x), \theta(y)\} = 2\pi \delta'(x-y), \quad \text{или } \{p_n, p_m\} = in\delta_{m+n}.$$

Будем считать, что $p_0 = 0$.

Определим проектции $\varphi(z) \to \varphi_\pm(z)$ по формуле

$$\varphi_+(z) = \sum_{k>0} p_{-k} z^k, \quad \varphi_+(z) = \sum_{k>0} p_k z^{-k},$$

Периодическое преобразование Гильберта определяется по формуле

$$(\mathcal{H}\varphi)(z) = -i\varphi_+(z) + i\varphi_-(z) = \mathrm{p.v.} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\pi} \cot \frac{x-y}{2} \varphi(x) \tag{A.13}$$

Уравнение Бенджамина-Оно пишется по Гамильтониану

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\pi} \left( \frac{1}{3}\theta^3(x) + \frac{1}{2}\theta'(x)(\mathcal{H}\theta)(x) \right) = \\ = \sum_{k,l>0} \Big( p_k p_l p_{-k-l} + p_{k+l} p_{-k} p_{-l} \Big) + \sum_{k>0} k p_k p_{-k}. \tag{A.14}$$

Это как раз классический ($\gamma \to 0$) предел Гамильтониана $I_2$ из (A.10). Само уравнение имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(z) = \{\varphi(z), I\} = \Big(z\frac{\partial}{\partial z}\Big)^2 (\mathcal{H}\varphi)(z) - i\Big(z\frac{\partial}{\partial z}\Big)\varphi^2(z), \tag{A.15}$$

или, в терминах компонент

$$\begin{aligned}\partial p_k/\partial t &= -ik^2 p_k + 2ik\sum_{l\geq 1} p_{k+l}p_{-l} + ik\sum_{1\leq l<k} p_l p_{k-l},\\ \partial p_k/\partial t &= ik^2 p_k - 2ik\sum_{l\geq 1} p_{k+l}p_{-l} - ik\sum_{1\leq l<k} p_l p_{k-l}.\end{aligned} \tag{A.16}$$

Есть представление Лакса в терминах интегрально-дифференциальных операторов. Их можно записать как

$$L = \begin{pmatrix} -1 & p_1 & p_2 & p_3 & \dots \\ p_{-1} & -2 & p_1 & p_2 & \ddots \\ p_{-2} & p_{-1} & -3 & p_1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad M = i\begin{pmatrix} 1 & -2p_1 & -2p_2 & -2p_3 & \dots \\ -2p_{-1} & 4 & -4p_1 & -4p_2 & \ddots \\ -2p_{-2} & -4p_{-1} & 9 & -6p_1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

Легко проверить, что уравнения (A.16) эквивалентны $\partial L/\partial t = [M, L]$.

Стандартным способом построения интегрируемой системы является спектральный детерминант $\det(u - L)$, или его логарифмическая производную tr. Тут есть проблемы с неограниченным спектром. Как пишут в [16] этой интегрируемой системе соответствует рациональная спектральная кривая и, поэтому, рассматривает матричный элемент $\vec{p}(L-u)^{-1}\vec{p^*}$, где $\vec{p} = (p_{-1}, p_{-2}, \dots)$, $\vec{p^*} = (p_1, p_2, \dots)^t$.

Более того, такая же схема работает после квантования. А именно, будем работать с операторами $p_k, p_k^*$, как в формуле (A.10). Расмотрим оператор $L$ и два вектора

$$L = \begin{pmatrix} \gamma-1 & p_1 & p_2 & p_3 & \dots \\ p_1^* & 2(\gamma-1) & p_1 & p_2 & \ddots \\ p_2^* & p_1^* & 3(\gamma-1) & p_1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = (p_1, p_2, \dots), \quad \vec{p^*} = \begin{pmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ , \vdots \end{pmatrix}. \tag{A.17}$$

Тогда операторы $I_k$ определенные по формуле

$$I(u) = \sum_{k=1} I_k u^{-k} I_k = p(u-L)^{-1}p^*. \tag{A.18}$$

Разлагая $u - L$ в ряд по формуле $u^{-1} + Lu^{-2} + L^2u^{-3}$ мы получаем формулу

$$I_k = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{\infty} p_{i_1} L_{i_1 i_2} \cdots L_{i_{k-1} i_k} p_{i_k}^*. \tag{A.19}$$

Видно, что $i_1, I_2$ совпадают с приведенным в формуле (A.10). Спектр $I(u)$ в базисе полиномов Джека $P_\lambda^\gamma$ равен

$$\epsilon(u)_\lambda^\gamma = u - (u + l(\lambda)) \prod_{i=1}^{l(\lambda')} \frac{u+i-1-\gamma\lambda_i}{u+i-\gamma\lambda_i} = u(1 - \prod_{s\in\lambda} \frac{(u+i-(j-1)\gamma)(u+(i-1)-j\gamma)}{(u+(i-1)-(j-1)\gamma)(u+i-j\gamma)}).$$

## Список литературы


[1] Сборник статей под редакцией А.А. Белавина *Инстантоны, струны и конформная теория поля*

[2] В. Дринфельд, В. Соколов *Алгебры Ли и уравнения типа Кортевега—де Фриза* Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1984. С. 81—180

[3] М. А. Семенов-Тян-Шанский *Что такое классическая $r$-матрица* Функц. анализ и его прил., 17:4 (1983), 17–33.

[4] А.Г.Рейман, М.А.Семенов-Тян-Шанский *Интегрируемые системы* Москва-Ижевск; РХД.

[5] M. Audin *Lectures on gauge theory and integrable systems* in Gauge Theory and Symplectic Geometry (1997) 1–48

[6] H. Awata, Y. Matsuo, S. Odake, J. Shiraishi, *Excited states of the Calogero Sutherland model and singular vectors of the $W_N$ algebra*, Nucl. Phys. **B449** (1995) 347. [arXiv:hep-th/9503043].

[7] J.E. Bourgine *Confinement and Mayer cluster expansions* [arXiv:1402.1626]

[8] B. Feigin, E. Frenkel *Integrals of motion and quantum groups* [arXiv:hep-th/9310022]

[9] L. Dickey *Soliton equations and hamiltonian systems* (2003)

[10] G. Felder, Nucl. Phys. *BRST approach to minimal models*, **B317** (1989) 215–236, Errata Nucl. Phys. **B324** (1989) 548.

[11] Ph. Di Francesco, P. Mathieu, D. Senechal *Conformal Field Theory* (1997)

[12] Dotsenko Fateev, *Conformal algebra and multipoint correlation functions in 2D statistical models*, Nucl. Phys. B 240(FS12) (3), 312-348 (1984); есть в [1]

[13] P. Etingof, O. Schiffman *Lectures on Quantum Groups*

[14] Lukyanov, Fateev *The models of two-dimensional conformal quantum field theory with $\mathbb{Z}_n$ symmetry* Int. J. Mod. Phys. A 3 (2), 507-520 (1988); есть в [1]

[15] K. Mimachi, Y. Yamada, *Singular vectors of the Virasoro algebra in terms of Jack symmetric polynomials*, Comm. Math. Phys. **174** (1995) 447.

[16] M. Nazarov, E. Sklyanin *Integrable Hierarchy of the Quantum Benjamin–Ono Equation* SIGMA **9** (2013), 078; [arXiv:1309.6464].

[17] N. Nekrasov, S. Shatashvili *Quantization of integrable systems and four dimensional gauge theories* [arXiv:0908.4052].