Введение в Теорию струн и Конформную теорию поля.
Лекции на Зимней Школе ИТЭФ 2009.

А.А.Белавин, Г.М.Тарнопольский

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН,
Черноголовка, 142432, Россия

План Лекций

1. **Некритические струны и Конформная аномалия.**

    Релятивистская частица.

    Релятивистская струна.

    Подход Полякова.

    Фиксация калибровки.

    j - дифференциалы и операторы Лапласа.

    Представление $\det \Delta_j$ в виде функционального интеграла.

    Регуляризация детерминантов.

    Ядро уравнения теплопроводности.

    Асимптотика ядра уравнения теплопроводности.

    Конформная аномалия.

    Конформная теория поля. Определение

2. **Конформный Бутстрап.**

    Поля, Корреляторы и Операторное разложение.

    Тензор энергии-импульса.

    Тензор энергии-импульса в Конформной теории поля в плоском пространстве.

    Тензор энергии-импульса в КТП в искривленном пространстве, псевдотензор.

    Операторное разложение для тензора энергии-импульса, Алгебра Вирасоро.

    Примарные поля и их потомки.

    Сингулярные вектора и приводимые представления.

    Дифференциальные уравнения для "вырожденных полей".

    Операторное разложение для "вырожденных полей".

3. **Минимальная Теория Струн.**

    Функциональный интеграл Полякова в конформной калибровке.

    Формулировка Давида - Дистлера - Каваи.

    Спектр гравитационных размерностей.

    Минимальная 2-мерная Гравитация Лиувилля.

1 Некритические струны и Конформная аномалия.

Основным вопросом в этой лекции будет построение квантовой теории для релятивистской струны. Понятие об одномерном объекте, струне, движущемся в D-мерном пространстве-времени, является естественным обобщением понятия о точечном объекте, частице. Естественный способ построения классической релятивистской теории струны состоит в геометрическом обобщении релятивистской теории для частицы. Напомним основные моменты.

1.1 Релятивистская частица.

Положение точечной частицы в d измерениях описывается d-мерным вектором $x^\mu(\tau)$, где τ — параметр, например, собственное время. Рассмотрим задачу о распространении частицы из начальной точки $x_0^\mu = x^\mu(0)$ в конечную точку $x_1^\mu = x^\mu(1)$. Для действия релятивистской частицы выбирается простейшая инвариантная характеристика пути — его длина

$$S = m \int ds = m \int_0^1 \sqrt{(\dot{x}^\mu)^2} d\tau. \tag{1}$$

Параметр m имеет размерность массы, и можно показать, действительно является массой частицы. Действие (1) имеет инвариантный вид, то есть не зависит от выбора параметризации мировой линии частицы. Решение классической задачи сводится к нахождению экстремальной траектории, или минимального пути между двумя точками.

Перейдем к квантовой теории, в которой частица может распространяться по любым траекториям, ведущим из начальной точки в конечную. В этом случае имеет смысл говорить лишь об амплитуде, или вероятности перехода из начального состояния в конечное. Амплитуда перехода дается хорошо известным интегралом по путям

$$A(x(0) \to x(1)) = \sum e^{-S[x^\mu(\tau)]}, \tag{2}$$

где сумма берется по всем возможным путям, ведущим из начальной точки в конечную, и каждый путь входит с весом, определяемым его длинной.

Остановимся чуть подробнее на симметриях действия. Легко видеть, что действие инвариантно относительно репараметризации $\tau \to \tilde{\tau}(\tau)$. Рассмотрим теперь амплитуду перехода

$$A(x(0) \to x(1)) = \int \mathcal{D}x(\tau) e^{-m \int_0^1 \sqrt{(\dot{x}^\mu)^2} d\tau}. \tag{3}$$

Этот интеграл расходится, так как одни и те же пути с различными репараметризациями будут учитываться бесконечное число раз. Как мы увидим, точно такая же проблема возникнет и в теории струн. Мы не будем здесь исследовать эту проблему далее, а только отметим, что уравнения движения, которые получаются из теории с действием (1) можно получить, изучая другую теорию с действием

$$\tilde{S}[x^\mu(\tau), g(\tau)] = \int \frac{1}{g(\tau)} (\dot{x}^\mu)^2 \sqrt{g} d\tau, \tag{4}$$

где поле $g(\tau)$ — метрический тензор на пути, $\sqrt{g(\tau)}d\tau$ — инвариантный элемент объема и величина $(\dot{x}^\mu)^2/g(\tau)$ инвариантна относительно репараметризации пути.

1.2 Релятивистская струна.

Для построения теории релятивистской струны будем действовать по аналогии со случаем частицы. Эволюция струны в пространстве-времени характеризуется набором D функций $X^\mu(x^1, x^2)$, где $\mu = 0, 1, ...D-1$. Функции $X^\mu(x^1, x^2)$ задают отображение мировой поверхности, в пространство-время. Основным принципом построения теории является идея репараметризационной инвариантности

$$x^\mu \to \tilde{x}^\mu = f^\mu(x^1, x^2). \qquad (5)$$

Геометрическим аналогом длины мирового пути частицы, является площадь мировой поверхности струны, т.е. площадь поверхности, которую заметает струна при своей эволюции в пространстве времени. Поэтому, простейшее репараметризационно инвариантное действие имеет вид

$$S_{NG}[X^\mu] = \int \sqrt{det(\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu)} dx^1 dx^2, \qquad (6)$$

которое известно как действие Намбу-Гото. Это действие репараметризационно инвариантно по построению. Кроме того, это действие инвариантно относительно действия группы Пуанкаре в D-мерном пространстве

$$X^\mu \to A^\mu_\nu X^\nu + B^\mu. \qquad (7)$$

Амплитуду перехода струны из начального состояния в конечное определим как сумму по всем поверхностям, соединяющим начальную и конечную конфигурацию струны

$$Z = \sum_{\text{По поверхностям}} e^{-(\text{площадь})} \stackrel{\text{def}}{=} \int \mathcal{D}X^\mu e^{-S_{NG}[X^\mu]}, \qquad (8)$$

где S_{NG} — действие Намбу-Гото, определяемое выражением (6).

Когда мы используем выражение для амплитуды в виде суммы по поверхностям, основным требованием является то, что каждая поверхность входит в сумму только один раз, но когда мы переписываем амплитуду в терминах функционального интеграла, у нас нет никаких оснований считать, что одна поверхность учитывается только один раз, поскольку различным конфигурациям $X^\mu(x)$ могут соответствовать одинаковые поверхности. Необходимо аккуратно выделить вклад, происходящий от переучета поверхностей. Прежде чем переходить к этому вопросу, надо каким-нибудь образом определить меру интегрирования в функциональном пространстве. Для этого, можно выбрать метрику в функциональном пространстве, т.е. расстояние между двумя функциями, например, в виде

$$\|\delta X^\mu\|^2 = \int (\delta X^\mu)^2 d^2x. \qquad (9)$$

1.3 Подход Полякова.

Аналогично, действие Намбу-Гото можно переписать в другом, классически эквивалентном виде с использованием двумерной метрики g_{ab}, определенной на мировой поверхности струны.

$$S_P[X^\mu, g_{ab}] = \int g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu \sqrt{g} d^2x. \qquad (10)$$

Иными словами, мы вводим в теорию двумерную гравитацию для обеспечения общекоординатной инвариантности. Такое действие с точки зрения двумерной теории поля является действием для D скалярных полей $X^\mu(x^1, x^2)$, минимально связанных с гравитацией g_{ab}. Действие (10), известное как действие Полякова, инвариантно относительно репараметризации мировой поверхности и действия группы Пуанкаре. Классическая эквивалентность действий (6) и (10) следует из того, что после исключения метрического тензора g_{ab} с помощью уравнений движения $\delta S_p/\delta g_{ab} = 0$, которые приводят к формуле

$$\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu - \frac{1}{2} g_{ab} g^{cd} \partial_c X^\mu \partial_d X_\mu = 0, \tag{11}$$

из которой не трудно получить, введя обозначение $h_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu$, равенство

$$h_{ab} = \frac{1}{2} g_{ab} g^{cd} h_{cd}. \tag{12}$$

Далее, вычисляя детерминант обеих частей этого уравнения, получим

$$\det h_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} h_{cd} \det g_{ab}. \tag{13}$$

Из формул (12) и (13) легко находим, что

$$\frac{h_{ab}}{\sqrt{h}} = \frac{g_{ab}}{\sqrt{g}}, \tag{14}$$

сворачивая обе части этого уравнения с метрическим тензором g_{ab}, имеем

$$g^{ab} h_{ab} = \frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{g}}, \tag{15}$$

подставляя это выражение в действие Полякова, получаем действие Намбу-Гото с точностью до коэффициента.

Действие Полякова (10) инвариантно также относительно локальных Вейлевских преобразований

$$g_{ab} \to \rho(x) g_{ab} \tag{16}$$

Симметриями классического действия Полякова являются:

1. Репараметризация мировой поверхности струны $x^a \to f^a(x^1, x^2)$, причем

$$X^\mu \to \tilde{X}^\mu, \tag{17}$$

$$g_{ab}(x^1, x^2) \to \tilde{g}_{ab}(x^1, x^2) = \frac{\partial f^c}{\partial x^a} \frac{\partial f^d}{\partial x^b} g_{cd}(f^1(x), f^2(x)). \tag{18}$$

2. Действие группы Пуанкаре

$$X^\mu \to A^\mu_\nu X^\nu + B^\mu. \tag{19}$$

3. Преобразование Вейля

$$g_{ab}(x) \to \rho(x) g_{ab}(x). \tag{20}$$

Инвариантность относительно преобразований Вейля играет важную роль. Следствием этой инвариантности является то, что величина g_{ab} никак не участвует в динамике на классическом уровне. Действительно, в двух измерениях метрический тензор включает три произвольные функции. Кроме того, мы имеем ровно три калибровочные симметрии — две репараметризации и одно преобразование Вейля.

Квантовая теория струны строится в формализме интеграла по путям. По аналогии со случаем точечной частицы, амплитуда распространения струны из начального состояния в конечное дается интегралом по всем мировым поверхностям струны. Поэтому, основная задача заключается в корректном определении интеграла по римановым поверхностям. Идея Полякова [1,2] заключается в использовании действия (10) для представления статистической суммы в виде

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} \int \mathcal{D}g\mathcal{D}X^\mu \exp\left(-\int g^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu \sqrt{g} d^2x\right). \tag{21}$$

Этот интеграл нуждается в дальнейшем доопределении. Меры в пространстве полей и метрик строятся по элементам объема и имеют вид

$$\|\delta X^\mu\|^2 = \int (\delta X^\mu)^2 \sqrt{g} d^2x, \tag{22}$$

$$\|\delta g_{ab}\|^2 = \int \sqrt{g} g^{ac} g^{bd} \delta g_{ab} \delta g_{cd} d^2x. \tag{23}$$

Заметим, что таким образом определенные интервалы явно инвариантны только относительно двух симметрий:

1. относительно преобразований группы Пуанкаре
2. относительно действия группы диффеоморфизмов.

В силу локальной калибровочной инвариантности относительно группы репараметризаций, интеграл (21) содержит бесконечный фактор, который должен быть устранен выбором поверхности в пространстве всех метрик, которую орбиты группы репараметризаций пересекают по одному разу. Вопрос, останется ли инвариантность относительно преобразований Вейля на квантовом уровне остается открытым и будет выясняться явным вычислением.

Определим эффективное действие для полей X^μ по формуле

$$e^{-S_X^{\text{eff}}[g_{ab}]} = \int \mathcal{D}_g X^\mu e^{-S_P[X^\mu, g_{ab}]}. \tag{24}$$

Интеграл по X^μ в формуле (24) является гауссовым. После интегрирования по частям, действие Полякова приобретает вид

$$S_P[X^\mu, g_{ab}] = \int X^\mu \Delta_0 X^\mu \sqrt{g} d^2x, \tag{25}$$

где

$$\Delta_0 = -\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_a g^{ab}\sqrt{g}\partial_b \tag{26}$$

оператор Лапласа. Введем полный набор собственных функций этого оператора

$$\Delta_0 \Psi_n = \lambda_n \Psi_n. \tag{27}$$

Скалярное произведение на пространстве функций определим формулой (22), то есть

$$(\Psi, \Phi) = \int \bar{\Psi}\Phi\sqrt{g}d^2x. \tag{28}$$

Теперь легко видеть, что оператор Лапласа является самосопряженным

$$(\Psi, \Delta_0\Phi) = (\Delta_0\Psi, \Phi). \tag{29}$$

Из этого следует, что собственные функции оператора Лапласа с различными собственными значениями, ортогональны. Поэтому базис в пространстве функций, можно выбрать из его собственных функций.

Пусть все наши вычисления проходят в некоторой фиксированной метрике g_{ab}. Тогда гауссов интеграл легко вычисляется и в результате мы получаем

$$\int \mathcal{D}_g X^\mu e^{-S_P[X^\mu, g_{ab}]} = (\det\Delta_0^{[g]})^{-D/2}, \tag{30}$$

где индекс $[g]$ над оператором Δ_0 указывает метрику в которой он определяется.

1.4 Фиксация калибровки.

Прежде чем двигаться дальше, обратимся к функциональному интегралу Полякова

$$Z = \int \mathcal{D}g\mathcal{D}_g X^\mu \exp\left(-\int \sqrt{g}g^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu d^2x\right). \tag{31}$$

Из-за параметризационной инвариантности, каждая поверхность учитывается в функциональном интеграле (31) много, а точнее бесконечно много раз. Это связанно с тем, что объем группы диффеоморфизмов бесконечен. Необходимо выделить фактор, учитывающий этот переучет поверхностей. Для этого удобно использовать замечательный геометрический факт, состоящий в том, что любая риманова метрика в случае топологии сферы, может быть приведена с помощью соответствующей репараметризации к виду $e^{\varphi(x)}\hat{g}_{ab}(x)$, то есть к метрике отличающейся от некоторой фиксированной метрики $\hat{g}_{ab}$ локальным растяжением. Поэтому интегрирование в пространстве метрик можно производить следующим образом. Выберем в пространстве метрик поверхность Σ (рис. 1), на которой метрики имеют

Рис. 1: Процедура фиксации калибровки

вид $e^\varphi \hat{g}$, где $\hat{g}$ некоторая ("бэкграунд") метрика. Остальные метрики получаются из метрик такого вида в результате действия группы репараметризаций. Идея состоит в том, чтобы перейти от интегрирования по всем метрикам к интегрированию по метрикам на поверхности Σ и по элементам группы диффеоморфизмов. А затем, пользуясь инвариантностью меры и действия относительно репараметризаций, выделить объем орбиты группы диффеоморфизмов в качестве фактора, который может быть устранен переопределением меры в пространстве метрик.

Произвольную метрику g_{ab}, мы всегда можем представить в виде

$$g_{ab} = [e^{\varphi}\hat{g}]^f_{ab} = e^{\varphi(f(x))}\frac{\partial f^c(x)}{\partial x^a}\frac{\partial f^d(x)}{\partial x^b}\hat{g}_{cd}(f(x)), \tag{32}$$

где, как мы уже говорили выше, $\hat{g}$ некоторая ("бэкграунд") метрика. Выражая вариацию δg_{ab} через вариации $\delta\varphi$ и δf, можно получить

$$\delta g_{ab} = [\delta\varphi e^{\varphi}\hat{g}_{ab} + \nabla_a\omega_b + \nabla_b\omega_a]^f = \\ = \frac{\partial f^c(x)}{\partial x^a}\frac{\partial f^d(x)}{\partial x^b}(\delta\varphi e^{\varphi}\hat{g}_{ab} + \nabla_a\omega_b + \nabla_b\omega_a)(f(x)), \tag{33}$$

где $\omega^a(x) = \delta f^a(f^{-1}(x))$. Под ∇_a подразумевается стандартная ковариантная производная вычисленная в метрике $e^{\varphi}\hat{g}$, а символ f^{-1} означает обратную функцию. Формулу (33) можно переписать в следующем виде

$$\delta g_{ab} = [\delta g^{\perp}_{ab} + \delta g^{\parallel}_{ab}]^f, \tag{34}$$

где мы ввели обозначения

$$\delta g^{\parallel}_{ab} = [(\delta\varphi + \nabla^c\omega_c)e^{\varphi}\hat{g}]_{ab}, \tag{35}$$

$$\delta g^{\perp}_{ab} = [\nabla_a\omega_b + \nabla_b\omega_a - e^{\varphi}\hat{g}_{ab}\nabla^c\omega_c]. \tag{36}$$

Отметим, что вариация $\delta g^{\perp}_{ab}$ является бесследовым симметричным тензором 2 ранга. Теперь подставим выражение (34) для вариации метрики в формулу для нормы (23), и учитывая, что так определенный формулой (23) элемент длины в пространстве метрик инвариантен по отношению к репараметризациям, в итоге находим

$$\|\delta g_{ab}\|^2 = \int e^{\varphi}\sqrt{\hat{g}}\left[2(\delta\varphi + \nabla^c\omega_c)^2 + (e^{-\varphi}\hat{g}^{ac})(e^{-\varphi}\hat{g}^{bd})\delta g^{\perp}_{ab}\delta g^{\perp}_{cd}\right]d^2x = \\ = \|\delta g^{\parallel}_{ab}\|^2 + \|\delta g^{\perp}_{ab}\|^2. \tag{37}$$

Здесь нормы на вариациях $\delta g^{\perp}_{ab}$ и $\delta g^{\parallel}_{ab}$ определены в следующем виде

$$\|\delta g^{\parallel}_{ab}\|^2 = \int e^{\varphi}\sqrt{\hat{g}}[2(\delta\varphi + \nabla^c\omega_c)^2]d^2x, \tag{38}$$

$$\|\delta g^{\perp}_{ab}\|^2 = \int e^{\varphi}\sqrt{\hat{g}}(e^{-\varphi}\hat{g}^{ac})(e^{-\varphi}\hat{g}^{bd})\delta g^{\perp}_{ab}\delta g^{\perp}_{cd}d^2x. \tag{39}$$

Чтобы понять структуру (39), выберем $\hat{g}_{ab} = \delta_{ab}$. Удобно ввести комплексные координаты $(z, \bar{z})$. Они связанны с вещественными координатами формулами

$$z = x^1 + ix^2, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \partial_z = \partial = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2), \quad \partial_1 = \partial_z + \partial_{\bar{z}}, \tag{40}$$

$$\bar{z} = x^1 - ix^2, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \partial_{\bar{z}} = \bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2), \quad \partial_2 = i(\partial_z - \partial_{\bar{z}}). \tag{41}$$

В координатах $(z, \bar{z})$: $g_{ab}dx^a dx^b = e^{\varphi(z,\bar{z})}dzd\bar{z} = \rho(z,\bar{z})dzd\bar{z}$, то есть метрический тензор принимает вид

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} g_{zz} & g_{z\bar{z}} \\ g_{\bar{z}z} & g_{\bar{z}\bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \rho/2 \\ \rho/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad g^{ab} = \begin{pmatrix} g^{zz} & g^{z\bar{z}} \\ g^{\bar{z}z} & g^{\bar{z}\bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2/\rho \\ 2/\rho & 0 \end{pmatrix}. \tag{42}$$

Элемент объема при интегрировании в координатах $(z,\bar z)$ связан с элементом объема в координатах (x^1,x^2) следующей формулой

$$\sqrt{g}dx^1dx^2 = \frac{\rho dz d\bar z}{2i}, \tag{43}$$

для краткости, в дальнейшем мы будем писать $d^2z = \frac{dzd\bar z}{2i}$. Вернемся к формуле (39), в конформно плоской метрике в координатах $(z,\bar z)$ имеем

$$\|\delta g^{\perp}_{ab}\|^2_g = \int \rho(g^{z\bar z}g^{z\bar z}\delta g^{\perp}_{\bar z\bar z}\delta g^{\perp}_{zz} + g^{\bar z z}g^{\bar z z}\delta g^{\perp}_{zz}\delta g^{\perp}_{\bar z\bar z})d^2z = 8\int \frac{1}{\rho}\delta g^{\perp}_{zz}\delta g^{\perp}_{\bar z\bar z}d^2z. \tag{44}$$

Теперь напишем в явном виде выражения для $\delta g^{\perp}_{zz}$ и $\delta g^{\perp}_{\bar z\bar z}$, следующие из формулы (36)

$$\delta g^{\perp}_{zz} = 2\nabla_z\omega_z = 2(\partial_z\omega_z - \Gamma^z_{zz}\omega_z) = \rho\partial\bar\omega, \tag{45}$$
$$\delta g^{\perp}_{\bar z\bar z} = 2\nabla_{\bar z}\omega_{\bar z} = 2(\partial_{\bar z}\omega_{\bar z} - \Gamma^{\bar z}_{\bar z\bar z}\omega_{\bar z}) = \rho\bar\partial\omega, \tag{46}$$

где мы учли, что в конформно плоской метрике символ Кристофеля имеет только две отличные от нуля компоненты

$$\Gamma^z_{zz} = \partial_z\rho/\rho, \quad \Gamma^{\bar z}_{\bar z\bar z} = \partial_{\bar z}\rho/\rho, \tag{47}$$

а также ввели обозначения $\omega^z = \omega$, $\omega^{\bar z} = \bar\omega$. Поэтому теперь выражение (44) можно записать в виде

$$\|\delta g^{\perp}_{ab}\|^2_g = 2\int \frac{1}{\rho}(2\rho\partial\bar\omega)(2\rho\bar\partial\omega)d^2z = 2\int \rho^2\bar\omega(-4\rho^{-2}\partial\rho\bar\partial\omega)d^2z. \tag{48}$$

Введем оператор $\Delta_{-1} = -4\rho^{-2}\partial\rho\bar\partial$. Выбранные здесь обозначения будут пояснены в следующем разделе. Таким образом мы можем окончательно записать вид нормы вариации $\delta g^{\perp}_{ab}$

$$\|\delta g^{\perp}_{ab}\|^2 = 2\int \rho^2\bar\omega\Delta_{-1}\omega d^2z. \tag{49}$$

Теперь определим меру и норму в пространстве диффеоморфизмов. Существует единственная норма, инвариантная по отношению к левому и правому умножению. Она дается следующей формулой

$$\|\delta f\|^2_g = \int \sqrt{g}g_{ab}(x)\omega^a(x)\omega^b(x)d^2x. \tag{50}$$

Эта формула обладает двумя видами инвариантности. Рассмотрим сперва "правое умножение", а именно замену

$$f \to f\circ\alpha, \tag{51}$$
$$f(x) \to f(\alpha(x)). \tag{52}$$

Тогда имеем

$$f^{-1}(x) \to \alpha^{-1}(f^{-1}(x)), \tag{53}$$
$$\delta f(x) \to \delta f(\alpha(x)), \tag{54}$$
$$\omega(x) \to \delta f(\alpha(\alpha^{-1}(f^{-1}(x)))) = \omega(x). \tag{55}$$

Таким образом, уже сама форма $\omega(x)$ инвариантна при "правом умножении" на диффеоморфизм. Если теперь рассмотреть "левое умножение", мы получим

$$f \to \beta \circ f, \tag{56}$$

$$f^a(x) \to \beta^a(f(x)), \tag{57}$$

$$\delta f^a(x) \to \frac{\partial \beta^a(f)}{\partial f^b} \delta f^b(x), \tag{58}$$

$$\delta f^a(f^{-1}(x)) \to \frac{\partial \beta^a(\beta^{-1})}{\partial(\beta^{-1})^b} \delta f^b(f^{-1}(\beta^{-1}(x))), \tag{59}$$

$$\omega^a(x) \to \frac{\partial \beta^a(\beta^{-1})}{\partial(\beta^{-1})^b} \omega^b(\beta^{-1}(x)). \tag{60}$$

В итоге ω^a при умножении слева преобразуется как обычный (контравариантный) вектор. Перепишем теперь также и формулу (50) в координатах, где метрика конформно плоская, получим

$$\|\delta f\|^2 = \int \rho^2 \bar{\omega}\omega d^2 z. \tag{61}$$

Исходя из этого выражения и формул (38), (49) и (61), мы получаем, что

$$\mathcal{D}g_{ab} = \det \Delta_{-1}^{[e^\varphi \hat{g}]} \mathcal{D}_{\hat{g}}\varphi \mathcal{D}_{e^\varphi \hat{g}} f, \tag{62}$$

где норма в пространстве вейлевских преобразований определена по формуле

$$\|\delta\varphi\|_{\hat{g}}^2 = \int \sqrt{\hat{g}} e^{\varphi(x)} (\delta\varphi(x))^2 d^2 x, \tag{63}$$

а $\mathcal{D}_{\hat{g}}\varphi$ соответствующий элемент объема. Мы видим, что при фиксации калибровки, возникает интеграл по всем диффеоморфизмам, причем мера этого интеграла зависит от точки калибровочной поверхности, то есть от $e^\varphi \hat{g}$. Заметим, что

$$[\mathrm{Vol(diff)}]_{e^\varphi \hat{g}} = \int \mathcal{D}_{e^\varphi \hat{g}} f = \int \mathcal{D}_g f, \tag{64}$$

где g любая метрика, получающаяся из $e^\varphi \hat{g}$ при произвольной репараметризации, т.е. $g = [e^\varphi \hat{g}]^f$. Второе равенство в формуле (64) следует из свойств нормы (50) на диффеоморфизмах. Таким образом $\int \mathcal{D}_g f$ есть по сути объем орбиты, пересекающей калибровочную поверхности в точке $e^\varphi \hat{g}$. Поэтому, для корректного определения меры $\mathcal{D}g$ в функциональном интеграле, нам следует разделить элемент объема в пространстве метрик $\mathcal{D}g_{ab}$ на объем орбиты

$$\mathcal{D}g = \frac{\mathcal{D}g_{ab}}{[\mathrm{Vol(diff)}]_{e^\varphi \hat{g}}}. \tag{65}$$

Теперь учитывая, что из-за инвариантности действия Полякова и меры в пространстве полей X^μ по отношению к репараметризациям, можно написать

$$\int \mathcal{D}_g X^\mu e^{-S_P[X^\mu, g_{ab}]} = \int \mathcal{D}_{[e^\varphi \hat{g}]^f} X^\mu e^{-S_P[X_\mu, [e^\varphi \hat{g}]^f_{ab}]} =$$
$$= \int \mathcal{D}_{e^\varphi \hat{g}} X_\mu e^{-S_P[X_\mu, e^\varphi \hat{g}_{ab}]} = (\det \Delta_0^{[e^\varphi \hat{g}]})^{-D/2}. \tag{66}$$

В результате чего для полного функционального интеграла мы получаем

$$Z = \int \mathcal{D}g \mathcal{D}_g X^\mu e^{-S_P(X^\mu, g_{ab})} = \int \mathcal{D}_{\hat{g}} \varphi \det \Delta_{-1}^{[e^\varphi \hat{g}]} (\det \Delta_0^{[e^\varphi \hat{g}]})^{-D/2}. \tag{67}$$

1.5 j - дифференциалы и операторы Лапласа.

Ранее фиксировав конформную калибровку, мы свели функциональный интеграл к двум детерминантам операторов Лапласа Δ_0 и Δ_{-1}. Прежде чем переходить к пояснению вопроса о зависимости этих детерминантов от метрики, введем некоторое обобщение этих операторов Лапласа. Для этого определим поля $\Psi^{(j)}(z, \bar{z})$, $\bar{\Psi}^{(j)}(z, \bar{z})$, которые при голоморфных преобразованиях

$$z \to w(z), \quad \bar{z} \to \bar{w}(\bar{z}) \tag{68}$$

преобразуются по правилам

$$\Psi^{(j)}(z, \bar{z}) \to \Psi'^{(j)}(z, \bar{z}) = \left(\frac{dw}{dz}\right)^j \Psi^{(j)}(w(z), \bar{w}(\bar{z})), \tag{69}$$

$$\bar{\Psi}^{(j)}(z, \bar{z}) \to \bar{\Psi}'^{(j)}(z, \bar{z}) = \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}\right)^j \bar{\Psi}^{(j)}(w(z), \bar{w}(\bar{z})), \tag{70}$$

такие тензорные поля называются j-дифференциалами. Следующим шагом нам потребуется определить операторы L_j действующие на пространстве j-дифференциалов и переводящие их в $(1-j)$ дифференциалы

$$L_j : \quad V_j \to \bar{V}_{1-j}, \tag{71}$$

$$L_j = 2\rho^{-j}\bar{\partial}. \tag{72}$$

Примером такого оператора является оператор $\frac{1}{2}L_{-1}$ в формуле (46). Используя преобразование метрики

$$\rho(z, \bar{z}) \to \rho'(z, \bar{z}) = \left(\frac{dw}{dz}\right)\left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}\right)\rho(w, \bar{w}) = \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 \rho(w, \bar{w}), \tag{73}$$

и закон преобразований Ψ_j, определенный выше, легко проверить, что тензор $L_j\Psi^{(j)}$ преобразуется как

$$L_j\Psi^{(j)}(z, \bar{z}) \to \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}\right)^{1-j} L_j\Psi^{(j)}(w, \bar{w}), \tag{74}$$

то есть является комплексно сопряженным $(1-j)$-дифференциалом. Теперь нам следует определить метрику на пространстве j-дифференциалов, по формуле

$$(\Psi^{(j)}(z), \Phi^{(j)}(z)) = \int \rho^{1-j} \bar{\Psi}^{(j)}(\bar{z}) \Phi^{(j)}(z) d^2 z. \tag{75}$$

Это выражение инвариантно при преобразованиях (68). Введем сопряженный оператор с помощью скалярного произведения

$$(L_j^+ \Psi^{(1-j)}, \Phi^{(j)}) = (\Psi^{(1-j)}, L_j \Phi^{(j)}), \tag{76}$$

тогда из цепочки равенств

$$(\Psi^{(1-j)}, L_j\Phi^{(j)}) = \int \rho^j \bar{\Psi}^{(1-j)} 2\rho^{-j}\bar{\partial}\Phi^{(j)} d^2z =$$
$$= -\int 2\bar{\partial}\bar{\Psi}^{(1-j)}\Phi^{(j)} d^2z = \int \rho^{1-j}\overline{(-2\rho^{j-1}\partial\Psi^{(1-j)})}\Phi^{(j)} d^2z \tag{77}$$

следует, что

$$L_j^+ = -\bar{L}_{1-j} = -2\rho^{j-1}\partial, \tag{78}$$

и этот оператор действует из пространства тензоров ранга $(1-j)$ в пространство тензоров ранга j. Определим оператор Лапласа по формуле

$$\Delta_j = L_j^+ L_j = -\bar{L}_{1-j} L_j. \tag{79}$$

Нетрудно проверить, что так определенный оператор является самосопряженным и имеет следующий явный вид

$$\Delta_j = -4\rho^{j-1}\partial\rho^{-j}\bar{\partial}. \tag{80}$$

Кроме того, существует оператор

$$\Delta_{1-j} = L_j L_j^+ = -L_j \bar{L}_{1-j}. \tag{81}$$

Теперь определим набор собственных функций и собственных значений этих операторов

$$\Delta_j \Psi_n^{(j)} = \lambda_n^{(j)} \Psi_n^{(j)}, \tag{82}$$
$$\Delta_{1-j} \Phi_n^{(1-j)} = \lambda_n^{(1-j)} \Phi_n^{(1-j)}. \tag{83}$$

Покажем, что набор ненулевых собственных значений одинаков, то есть $\lambda_n^{(j)} = \lambda_n^{(1-j)}$. Для доказательства, подействуем на обе части выражения

$$L_j^+ L_j \Psi_n^{(j)} = \lambda_n^{(j)} \Psi_n^{(j)}, \tag{84}$$

оператором L_j. В результате получим

$$(L_j L_j^+)(L_j \Psi_n^{(j)}) = \lambda_n^{(j)} (L_j \Psi_n^{(j)}), \tag{85}$$

то есть, если функция $\Psi_n^{(j)}$ является собственной функцией оператора Δ_j с собственным значением $\lambda_n^{(j)}$, то функция $L_j \Psi_n^{(j)}$ будет являться собственной функцией оператора Δ_{1-j} с тем же самым собственным значением. Таким образом, утверждение доказано. Пусть теперь $\Psi_n^{(j)}$ — собственная функция оператора $L_j^+ L_j$, которая является нормированной и с ненулевым собственным значением. Рассмотрим $L_j \Psi_n^{(j)}$ и вычислим норму этой функции

$$(L_j \Psi_n^{(j)}, L_j \Psi_n^{(j)}) = (\Psi_n^{(j)}, L_j^+ L_j \Psi_n^{(j)}) = \lambda_n^{(j)} (\Psi_n^{(j)}, \Psi_n^{(j)}). \tag{86}$$

Эта и другие формулы, приведенные выше, потребуются нам в следующем разделе.

1.6 Представление $\det \Delta_j$ в виде функционального интеграла.

Детерминант операторов Δ_j можно записать в виде функционального интеграла по полям Ψ и Φ являющихся соответственно $(1-j)$ и j-дифференциалами.

Вычислим чему равно выражение, вида

$$Z = \int \mathcal{D}(\Psi,\Phi) \exp\left(2\pi i(\Psi^{(1-j)}, \bar{L}_j \Phi^{(j)}) + 2\pi i(\bar{\Psi}^{(1-j)}, L_j \bar{\Phi}^{(j)})\right), \qquad (87)$$

где мера $\mathcal{D}(\Psi,\Phi) = \mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Phi\mathcal{D}\bar{\Phi}$. Разложение полей $\Phi^{(j)}$ и $\bar{\Phi}^{(j)}$ по собственным нормированным функциям операторов $\bar{\Delta}_j = -L_{1-j}\bar{L}_j$ и $\Delta_j = -\bar{L}_{1-j}L_j$ принимает вид

$$\Phi^{(j)} = \sum_n \phi_n \Phi_n^{(j)}, \quad (\Phi_n^{(j)}, \Phi_m^{(j)}) = \delta_{mn}, \quad \bar{\Delta}_j \Phi_n^{(j)} = \lambda_n \Phi_n^{(j)}, \qquad (88)$$

$$\bar{\Phi}^{(j)} = \sum_n \bar{\phi}_n \bar{\Phi}_n^{(j)}, \quad (\bar{\Phi}_n^{(j)}, \bar{\Phi}_m^{(j)}) = \delta_{mn}, \quad \Delta_j \bar{\Phi}_n^{(j)} = \lambda_n \bar{\Phi}_n^{(j)}. \qquad (89)$$

Используя результаты предыдущего раздела, мы можем разложить поле $\Psi^{(1-j)}$ по нормированным функциям $\Psi_n^{(1-j)} = \frac{\bar{L}_j \Phi_n^{(j)}}{\sqrt{\lambda_n}}$, следовательно

$$\Psi^{(1-j)} = \sum_m \psi_m \Psi_m^{(1-j)}, \quad \left(\Psi_n^{(1-j)}, \Psi_m^{(1-j)}\right) = \delta_{mn}, \qquad (90)$$

$$\bar{\Psi}^{(1-j)} = \sum_m \bar{\psi}_m \bar{\Psi}_m^{(1-j)}, \quad \left(\bar{\Psi}_n^{(1-j)}, \bar{\Psi}_m^{(1-j)}\right) = \delta_{mn}. \qquad (91)$$

Таким образом легко получить, что

$$(\Psi^{(1-j)}, \bar{L}_j \Phi^{(j)}) = \left(\sum_m \psi_m \Psi_m^{(1-j)}, \bar{L}_j \sum_n \phi_n \Phi_n^{(j)}\right) = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \psi_n \phi_n, \qquad (92)$$

$$(\bar{\Psi}^{(1-j)}, L_j \bar{\Phi}^{(j)}) = \left(\sum_m \bar{\psi}_m \bar{\Psi}_m^{(1-j)}, L_j \sum_n \bar{\phi}_n \bar{\Phi}_n^{(j)}\right) = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \bar{\psi}_n \bar{\phi}_n. \qquad (93)$$

Меры $\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi}$ и $\mathcal{D}\Phi\mathcal{D}\bar{\Phi}$ в функциональном интеграле при разложении Ψ и Φ по системам нормированных ортогональных базисных функций просто превращаются в произведения

$$\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi} = \prod_n d\psi_n d\bar{\psi}_n, \quad \mathcal{D}\Phi\mathcal{D}\bar{\Phi} = \prod_n d\phi_n d\bar{\phi}_n. \qquad (94)$$

Таким образом мы получаем для выражения (87) следующую формулу

$$Z = \int \prod_n d\psi_n d\phi_n d\bar{\psi}_n d\bar{\phi}_n \exp(2\pi i \sqrt{\lambda_n}(\psi_n \phi_n + \bar{\psi}_n \bar{\phi}_n)) =$$

$$= \frac{1}{\prod\limits_n \lambda_n} = (\det \Delta_j)^{-1}. \qquad (95)$$

В только что приведенном вычислении мы предполагали, что поля Ψ и Φ являются коммутирующими полями. Если же Ψ и Φ были бы грассмановыми полями, то

$$\det \Delta_j = \int \mathcal{D}(\Psi, \Phi) \exp\left(\frac{1}{2\pi}(\Psi^{(1-j)}, \bar{L}_j \Phi^{(j)}) + \frac{1}{2\pi}(\bar{\Psi}^{(1-j)}, L_j \bar{\Phi}^{(j)})\right). \quad (96)$$

Из этого в частности следует, что $\det \Delta_{-1}$ запишется в виде

$$\det \Delta_{-1} = \int \mathcal{D}(B, \mathrm{C}) \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int \left[B\bar{\partial}C + \bar{B}\partial\bar{C}\right] d^2 z\right), \quad (97)$$

где мы ввели стандартные обозначения для грассмановых полей $\Psi^{(2)}$, и $\Phi^{(-1)}$, а именно $B = \Psi^{(2)}$ и $\mathrm{C} = \Phi^{(-1)}$. Величина

$$S_{\mathrm{Gh}} = \frac{1}{2\pi}\int \left[B\bar{\partial}C + \bar{B}\partial\bar{C}\right] d^2 z \quad (98)$$

называется действием духов.

1.7 Регуляризация детерминантов.

Теперь приступим к исследованию зависимости $\det \Delta_j$ от метрики g. Любая вариация метрического тензора g_{ab}, как мы знаем, эквивалентна некоторому конформному преобразованию и некоторой репараметризации. Поскольку детерминанты операторов Лапласа являются инвариантными относительно репараметризаций, то необходимо определить только, как они меняются при локальном растяжениях метрики. Детерминант любого оператора равен произведению всех собственных значений этого оператора. Поэтому мы можем формально записать

$$\log \det \Delta_j = \sum_n \log \lambda_n^{(j)}. \quad (99)$$

Очевидно, что эта сумма расходится при больших собственных значениях $\lambda_n^{(j)}$. Если вычесть из этого выражения логарифм детерминанта оператора Лапласа Δ_{j0}, определенного в какой-то другой фиксированной метрике ρ_0, то расходимость останется, но уменьшится. Эту разность можно записать как

$$\log \det \Delta_j - \log \det \Delta_{j0} = \sum_n \log \frac{\lambda_n^{(j)}}{\lambda_{n0}^{(j)}} = -\sum_n \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda_n^{(j)} t} - e^{-\lambda_{n0}^{(j)} t}}{t} dt, \quad (100)$$

где за $\lambda_{n0}^{(j)}$ мы обозначили собственные числа оператора Лапласа Δ_{j0}. При этом вариация выражения (100) по метрике ρ очевидно совпадает с вариацией выражения $\log \det \Delta_j$. Заменим теперь порядок интегрирования и суммирования

$$\sum_n \log \frac{\lambda_n^{(j)}}{\lambda_{n0}^{(j)}} = -\int_0^\infty \frac{dt}{t} \sum_n (e^{-\lambda_n^{(j)} t} - e^{-\lambda_{n0}^{(j)} t}). \quad (101)$$

Выражение в правой части (101) расходится при малых t. Эта расходимость эквивалентна расходимости исходной суммы при больших собственных значениях $\lambda_n^{(j)}$. Мы можем сделать это выражение конечным, введя обрезание

ϵ на нижнем пределе в интеграле по t, определив тем самым регуляризованные значения для разности логарифмов детерминантов, как

$$\log\det\Delta_j - \log\det\Delta_{j0} = -\int_\epsilon^\infty \frac{dt}{t}\sum_n (e^{-\lambda_n^{(j)}t} - e^{-\lambda_{n0}^{(j)}t}). \qquad (102)$$

ϵ-обрезание эквивалентно обрезанию на больших собственных значениях $\lambda_n^{(j)}$. Поскольку теперь правая часть (102) представляет собой разность конечных выражений, мы можем принять формулу

$$(\log\det\Delta_j)_\epsilon = -\sum_n \int_\epsilon^\infty \frac{e^{-\lambda_n^{(j)}t}}{t} dt = -\int_\epsilon^\infty \frac{dt}{t}\mathrm{Tr}e^{-\Delta_j t}, \qquad (103)$$

как определение для регуляризованного детерминанта. Такой способ регуляризации называется регуляризацией методом собственного времени.

1.8 Ядро уравнения теплопроводности.

Для последующих вычислений удобно выразить регуляризованный $\det\Delta_j$ через тепловое ядро $K_j(t,z,u)$, определенное следующим выражением

$$e^{-t\Delta_j} f(z,\bar z) = \int K_j(t,z,u) f(u,\bar u) d^2u, \qquad (104)$$

где $f(z,\bar z)$ — произвольная функция.

Набор собственных функция $\Psi_n^{(j)}(z,\bar z)$ оператора Δ_j является полным, поэтому функцию $f(z,\bar z)$ мы можем представить, как

$$f(z,\bar z) = \sum_n a_n \Psi_n^{(j)}(z,\bar z), \qquad (105)$$

где коэффициенты разложения выражаются формулами

$$a_n = \int f(u,\bar u)\bar\Psi_n^{(j)}(u,\bar u)\rho^{1-j}(u,\bar u) d^2u. \qquad (106)$$

В итоге получаем

$$e^{-t\Delta_j} f(z,\bar z) = e^{-t\Delta_j}\sum_n a_n\Psi_n^{(j)}(z,\bar z) = \sum_n a_n e^{-\lambda_n^{(j)}t}\Psi_n^{(j)}(z,\bar z) =$$
$$= \int \sum_n e^{-\lambda_n^{(j)}t}\bar\Psi_n^{(j)}(u,\bar u)\Psi_n^{(j)}(z,\bar z) f(u,\bar u)\rho^{1-j}(u,\bar u)d^2u, \qquad (107)$$

откуда видно, что

$$K_j(t,z,u) = \sum_n e^{-\lambda_n^{(j)}t}\Psi_n^{(j)}(z,\bar z)\bar\Psi_n^{(j)}(u,\bar u)\rho^{1-j}(u,\bar u) =$$
$$= \sum_n e^{-\lambda_n^{(j)}t}\Psi_n^{(j)}(z,\bar z)\widetilde\Psi_n^{(j)}(u,\bar u), \qquad (108)$$

где мы ввели обозначение $\widetilde\Psi_n^{(j)}(u,\bar u) = \bar\Psi_n^{(j)}(u,\bar u)\rho^{1-j}(u,\bar u)$. Очевидно, что ядро $K_j(t,z,u)$ удовлетворяют тепловому уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_j\right) K_j(t,z,u) = 0, \quad \text{при} \quad t > 0, \qquad (109)$$

где дифференцирование производится по переменной z. Также заметим, что при $t = 0$ выражение (104) выглядит как

$$f(z, \bar{z}) = \int K_j(0, z, u) f(u, \bar{u}) d^2u, \tag{110}$$

следовательно

$$K_j(0, z, u) = \delta^{(2)}(u - z). \tag{111}$$

Здесь дельта функция определена как обычно

$$\int f(z, \bar{z}) \delta^{(2)}(u - z) d^2z = f(u, \bar{u}). \tag{112}$$

Теперь вспоминая формулу (103), и используя выражение (108), находим

$$(\log \det \Delta_j)_\epsilon = -\int_\epsilon^\infty \frac{dt}{t} \mathrm{Tr} e^{-\Delta_j t} = -\int_\epsilon^\infty \frac{dt}{t} \int K_j(t, z, z) d^2z. \tag{113}$$

Как обсуждалось выше, нас интересует не сама эта величина, а ее вариация при преобразованиях Вейля.

Сначала найдем вариацию самого оператора Лапласа при Вейлевских преобразованиях, учитывая, что $\Delta_j = -\bar{L}_{1-j} L_j$, получим

$$\delta \Delta_j = -(j-1) \frac{\delta\rho}{\rho} \bar{L}_{1-j} L_j + j \bar{L}_{1-j} \frac{\delta\rho}{\rho} L_j, \tag{114}$$

поэтому

$$\delta(\log \det \Delta_j)_\epsilon = \int_\epsilon^\infty dt \mathrm{Tr} \left((j-1) \frac{\delta\rho}{\rho} \Delta_j e^{-\Delta_j t} + j \bar{L}_{1-j} \frac{\delta\rho}{\rho} L_j e^{-\Delta_j t} \right). \tag{115}$$

Под знаком следа во втором слагаемом можно сделать циклическую перестановку, а первое слагаемое легко переписать в эквивалентном виде, поэтому имеем

$$\delta(\log \det \Delta_j)_\epsilon = \int_\epsilon^\infty dt \mathrm{Tr} \left(\frac{\delta\rho}{\rho} (j-1) \left(-\frac{\partial}{\partial t} \right) e^{-\Delta_j t} + \frac{\delta\rho}{\rho} j L_j e^{-\Delta_j t} \bar{L}_{1-j} \right). \tag{116}$$

Для того чтобы записать в подходящем виде второе слагаемое, используем формулу из линейной алгебры

$$A e^{BAt} B = AB e^{ABt} \quad \text{где} \quad A, B - \text{операторы}. \tag{117}$$

Поэтому второе слагаемое в правой части (116) равно

$$\int_\epsilon^\infty dt \mathrm{Tr} \left(\frac{\delta\rho}{\rho} j \frac{\partial}{\partial t} e^{-\Delta_{1-j} t} \right), \tag{118}$$

и в результате находим

$$\begin{aligned} \delta(\log \det \Delta_j)_\epsilon &= \mathrm{Tr} \frac{\delta\rho}{\rho} \left((j-1) e^{-\Delta_j \epsilon} - j e^{-\Delta_{1-j} \epsilon} \right) = \\ &= \int \frac{\delta\rho}{\rho} \left((j-1) K_j(\epsilon, z, z) - j K_{1-j}(\epsilon, z, z) \right) d^2z. \end{aligned} \tag{119}$$

Таким образом конформная вариация $\det \Delta_j$ определяется асимптотикой функции $K_j(t, z, z)$ при малых временах.

1.9 Асимптотика ядра уравнения теплопроводности.

Приступим теперь к вычислению асимптотики ядра уравнения теплопроводности в пределе $t \to 0$. Это вычисление можно проделать в наиболее простой форме, развив теорию возмущений по отклонению метрики $\rho(z)$ от точки к точке. Как мы знаем из физики, скорость распространения тепла в теле пропорциональна $\sqrt{t}$, поэтому при $t \to 0$ существенный вклад в K_j будут вносить точки, отстоящие от начальной на расстоянии $\Delta z \sim \sqrt{t}$.

Обозначим $\rho(z) = e^{\sigma(z)}$ и разложим $\sigma(z)$ в ряд Тейлора

$$\delta\sigma(z) = \sigma(z) - \sigma(0) = z\sigma_z + \bar{z}\sigma_{\bar{z}} + \frac{z^2}{2}\sigma_{zz} + \frac{\bar{z}^2}{2}\sigma_{\bar{z}\bar{z}} + z\bar{z}\sigma_{z\bar{z}} + ..., \tag{120}$$

а разложение для производной $\partial\sigma(z)$ примет вид

$$\partial\sigma(z) = \sigma_z + z\sigma_{zz} + \bar{z}\sigma_{z\bar{z}} + ... \tag{121}$$

Мы решаем дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_j\right) K_j(t, z, u) = \delta(t)\delta^{(2)}(z - u), \tag{122}$$

где оператор Лапласа в терминах σ имеет вид

$$\Delta_j = -4e^{-\sigma}[\partial\bar{\partial} - j(\partial\sigma)\bar{\partial}], \tag{123}$$

Представим Δ_j как сумму оператора $\Delta_j^{(0)}$ и возмущения V_j

$$\Delta_j = \Delta_j^{(0)} + V_j, \tag{124}$$

причем

$$\Delta_j^{(0)} = -4e^{-\sigma(0)}\bar{\partial}\partial. \tag{125}$$

Возмущение V_j удобно разбить на две части $V_j = V_j^{(1)} + V_j^{(2)}$

$$V_j^{(1)}(z) = -4\left(-\delta\sigma(z) + \frac{(\delta\sigma(z))^2}{2} + ...\right) e^{-\sigma(0)}\partial\bar{\partial}, \tag{126}$$

$$V_j^{(2)}(z) = 4je^{-\sigma(0)}(1 - \delta\sigma(z) + ...)(\partial\sigma(z))\bar{\partial}. \tag{127}$$

Для того чтобы избавиться от не очень удобных множителей в выражениях для возмущения определим $\tilde{K}_j$, которое получается из K_j простым перемасштабированием времени

$$\tilde{K}_j(t, z, u) = K_j(\frac{\rho(0)}{4}t, z, u). \tag{128}$$

Эта новая функция будет удовлетворять уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \bar{\partial}\partial + \tilde{V}_j\right) \tilde{K}_j(t, z, u) = \delta(t)\delta^{(2)}(z - u), \tag{129}$$

где

$$\tilde{V}_j^{(1)} = \left(\delta\sigma - \frac{(\delta\sigma)^2}{2}\right) \partial\bar{\partial}, \tag{130}$$

$$\tilde{V}_j^{(2)} = j(1 - \delta\sigma)(\partial\sigma)\bar{\partial}. \tag{131}$$

Пусть $\tilde{K}_j^0$ решение нашего уравнения теплопроводности без возмущения $\tilde{V}_j$, то есть удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \partial\bar{\partial}\right) \tilde{K}_j^0(t,z,u) = \delta(t)\delta^{(2)}(z-u). \tag{132}$$

Его решение выглядит как

$$\tilde{K}_j^0(t,z,u) = \frac{1}{\pi t}\exp\left\{-\frac{|z-u|^2}{t}\right\}. \tag{133}$$

Будем порядок за порядком вычислять величину $\tilde{K}_j$. Из уравнения

$$(\tilde{K}_j^0)^{-1}\tilde{K}_j + \tilde{V}_j\tilde{K}_j = I \tag{134}$$

следует, что

$$\tilde{K}_j = \tilde{K}_j^0 - \tilde{K}_j^0\tilde{V}_j\tilde{K}_j^0 + \tilde{K}_j^0\tilde{V}_j\tilde{K}_j^0\tilde{V}_j\tilde{K}_j^0 + ... \tag{135}$$

В первом порядке теории возмущений, в явной записи, имеем

$$\tilde{K}_j^0\tilde{V}_j\tilde{K}_j^0 = \int\limits_0^t dt_1 \int d^2u \tilde{K}_j^0(t-t_1, z-u)\tilde{V}_j(u)\tilde{K}_j^0(u). \tag{136}$$

Кроме того, сразу заметим, что нам необходимо вычислять ядро K_j только на диагонали, поэтому $z=0$. Также нужно найти лишь ту поправку, которая не исчезает при $t\to 0$, то есть поправку $\sim t^0$. Простая оценка показывает, что в эту поправку вносят вклад только первый и второй порядки теории возмущений. А теперь обратимся собственно к вычислению.

Первый порядок теории возмущений.

Вклад $\tilde{V}_j^{(1)}$. Оценим теперь вклад члена $\tilde{K}_j^0\tilde{V}_j^{(1)}\tilde{K}_j^0$. Для начала, разложим возмущение в ряд Тэйлора

$$\tilde{V}_j^{(1)} = \sum_{(k,l)\geqslant 0,(k+l)\geqslant 1} a_{kl}^{(1)}\bar{u}^k u^l \bar{\partial}\partial, \tag{137}$$

где $a_{kl}^{(1)}$ коэффициенты разложения возмущения в ряд Тейлора, следующие из формулы (120). После подстановки в (136), первая поправка теории возмущений для $V_j^{(1)}$ равна

$$\begin{aligned}&\tilde{K}_j^0\tilde{V}_j^{(1)}\tilde{K}_j^0 = \\ &= \frac{1}{\pi^2}\sum_{k,l} a_{kl}^{(1)} \int_0^t \frac{dt_1}{t_1(t-t_1)} \int d^2u \exp\left\{-\frac{\bar{u}u}{t-t_1}\right\} \bar{u}^k u^l \partial\bar{\partial}\exp\left\{-\frac{\bar{u}u}{t_1}\right\}.\end{aligned} \tag{138}$$

Дифференцируя экспоненту под интегралом $\bar{\partial}\partial e^{-\frac{\bar{u}u}{t_1}} = \left(-\frac{1}{t_1}+\frac{\bar{u}u}{t_1^2}\right)e^{-\frac{\bar{u}u}{t_1}}$, в результате получаем

$$\begin{aligned}&\tilde{K}_j^0\tilde{V}_j^{(1)}\tilde{K}_j^0 = \\ &= \frac{1}{\pi^2}\sum_{k,l} a_{kl}^{(1)} \int_0^t \frac{dt_1}{t_1(t-t_1)} \int d^2u \left(-\frac{1}{t_1}+\frac{\bar{u}u}{t_1^2}\right) u^k\bar{u}^l \exp\left\{-u\bar{u}\frac{t}{t_1(t-t_1)}\right\}.\end{aligned} \tag{139}$$

Сделаем оценку значений k и l, которые нам потребуются для поправки $\sim t^0$. Обозначим

$$I_{kl}^{(1)} = \int_0^t \frac{dt_1}{t_1(t-t_1)} \int d^2u \left(-\frac{1}{t_1} + \frac{\bar{u}u}{t_1^2}\right) u^k \bar{u}^l \exp\left\{-u\bar{u}\frac{t}{t_1(t-t_1)}\right\}. \tag{140}$$

Воспользуемся формулой

$$\int d^2u \exp\left\{-\frac{\bar{u}u}{t}\right\} \bar{u}^k u^l = \pi k! t^{(k+1)} \delta_{kl}. \tag{141}$$

Тогда очевидно, что $I_{kl}^{(1)} \sim \frac{t}{t^2} \cdot \frac{t^{k+1}\delta_{kl}}{t} = t^{k-1}\delta_{kl}$. Учитывая, что $k, l \geqslant 0$ и $k + l \geqslant 1$, заключаем, что нам нужны лишь $k = l = 1$. Итак, посмотрим, чему равна первая поправка с $k = l = 1$. После вычислений, получаем

$$\tilde{K}_j^0 \tilde{V}_j^{(1)} \tilde{K}_j^0 = \frac{1}{6\pi} a_{11}^{(1)} + O(t) \tag{142}$$

или, находя $a_{11}^{(1)}$, имеем

$$\tilde{K}_j^0 \tilde{V}_j^{(1)} \tilde{K}_j^0 = \frac{1}{6\pi} \left(\partial\bar{\partial}\sigma - \partial\sigma\bar{\partial}\sigma\right) + O(t). \tag{143}$$

Вклад $\tilde{V}_j^{(2)}$.

Раскладываем возмущение $\tilde{V}_j^{(2)}$ в ряд Тэйлора

$$\tilde{V}_j^{(2)} = j \sum_{k,l\geqslant 0} a_{kl}^{(2)} \bar{u}^k u^l \bar{\partial}, \tag{144}$$

где $a_{kl}^{(2)}$ коэффициенты разложения. Тогда первая поправка теории возмущений для $\tilde{V}_j^{(2)}$ равна

$$\tilde{K}_j^0 \tilde{V}_j^{(2)} \tilde{K}_j^0 = \frac{j}{\pi^2} \sum_{k,l} a_{kl}^{(2)} \int_0^t \frac{dt_1}{t_1(t-t_1)} \int d^2u \exp\left\{-\frac{\bar{u}u}{t-t_1}\right\} \bar{u}^k u^l \bar{\partial} \exp\left\{-\frac{\bar{u}u}{t_1}\right\}. \tag{145}$$

Дифференцируя экспоненту под интегралом $\bar{\partial}e^{-\frac{\bar{u}u}{t_1}} = -\frac{u}{t_1}e^{-\frac{\bar{u}u}{t_1}}$, в результате получаем

$$\tilde{K}_j^0 \tilde{V}_j^{(2)} \tilde{K}_j^0 = -\frac{j}{\pi^2} \sum_{k,l} a_{kl}^{(2)} \int_0^t \frac{dt_1}{t_1^2(t-t_1)} \int d^2u \bar{u}^k u^{l+1} \exp\left\{-u\bar{u}\frac{t}{t_1(t-t_1)}\right\}. \tag{146}$$

Снова сделаем оценку значений k и l, которые нам потребуются для поправки $\sim t^0$. Обозначим

$$I_{kl}^{(2)} = \int_0^t \frac{dt_1}{t_1^2(t-t_1)} \int d^2u \bar{u}^k u^{l+1} \exp\left\{-u\bar{u}\frac{t}{t_1(t-t_1)}\right\}. \tag{147}$$

Учитывая формулу (141), находим $I_{kl}^{(2)} \sim \frac{t}{t^3} t^{k+1} \delta_{k,l+1} = t^{k-1}\delta_{k,l+1}$, поэтому нам нужны только $k = 1$ и $l = 0$. Вычисляя первую поправку, получаем

$$\tilde{K}_j^0 \tilde{V}_j^{(2)} \tilde{K}_j^0 = -\frac{j}{2\pi} a_{10}^{(2)} + O(t), \tag{148}$$

или после вычисления $a_{10}^{(2)}$, имеем

$$\tilde{K}_j^0 \tilde{V}_j^{(2)} \tilde{K}_j^0 = -\frac{j}{2\pi}(\partial\bar{\partial}\sigma - \partial\sigma\bar{\partial}\sigma) + O(t). \tag{149}$$

Собирая вместе поправки первого порядка теории возмущений, находим, что

$$\tilde{K}_j^0 \tilde{V}_j \tilde{K}_j^0 = \tilde{K}_j^0 \tilde{V}_j^{(1)} \tilde{K}_j^0 + \tilde{K}_j^0 \tilde{V}_j^{(2)} \tilde{K}_j^0 = -\frac{3j-1}{6\pi}(\partial\bar{\partial}\sigma - \partial\sigma\bar{\partial}\sigma) + O(t). \tag{150}$$

Второй порядок теории возмущений.

Во втором порядке теории возмущений, мы будем вычислять $\tilde{K}_j^0 \tilde{V}_j \tilde{K}_j^0 \tilde{V}_j \tilde{K}_j^0$, и в явной записи имеем

$$\tilde{K}_j^0 \tilde{V}_j \tilde{K}_j^0 \tilde{V}_j \tilde{K}_j^0 = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \iint d^2u_1 d^2u_2 \tilde{K}_j^0(t-t_1, z-u_1)\times$$
$$\times \tilde{V}_j(u_1)\tilde{K}_j^0(t_1-t_2, u_1-u_2)\tilde{V}_j(u_2)\tilde{K}_j^0(t_2, u_2). \tag{151}$$

Так как мы вычисляем значение ядро на диагонали, то $z = 0$. Мы не будем приводить здесь вычисления, скажем лишь, что они полностью аналогичны вычислениям, проведенным выше. И в итоге ответ равен

$$\tilde{K}_j^0 \tilde{V}_j \tilde{K}_j^0 \tilde{V}_j \tilde{K}_j^0 = \frac{3j-1}{6\pi}\partial\sigma\bar{\partial}\sigma + O(t). \tag{152}$$

Теперь учитывая, что $\tilde{K}_j^0(t,z,z) = \frac{1}{\pi t}$, получаем, для $\tilde{K}_j(t,z,z)$ с точность до членов $\sim t^0$

$$\tilde{K}_j = \tilde{K}_j^0 - \tilde{K}_j^0 \tilde{V}_j \tilde{K}_j^0 + \tilde{K}_j^0 \tilde{V}_j \tilde{K}_j^0 \tilde{V}_j \tilde{K}_j^0 + ... = \frac{1}{\pi t} + \frac{3j-1}{6\pi}\partial\bar{\partial}\sigma + O(t). \tag{153}$$

И принимая во внимание, что необходимо перейти во всех величинах, которые мы вычисляли, от $\tilde{K}_j$ к K_j, получаем окончательное разложение оператора ядра уравнения теплопроводности в пределе маленьких времен

$$K_j(t\to 0, z, z) = \frac{\rho}{4\pi t}\left[1 + \frac{2\partial\bar{\partial}\sigma}{\rho}\left(j - \frac{1}{3}\right)t + O(t^2)\right]. \tag{154}$$

Теперь вспомним, что скалярная кривизна в конформно плоской метрике $g_{ab}dx^a dx^b = \rho dz d\bar{z}$, равна

$$R = -4e^{-\sigma}\partial\bar{\partial}\sigma, \tag{155}$$

где $\sigma = \log\rho$, и в итоге получим

$$K_j(t\to 0, z, z) = \frac{\rho}{4\pi t}\left[1 - \frac{(3j-1)R}{6}t + O(t^2)\right]. \tag{156}$$

Таким образом мы вычислили поведение ядра теплопроводности при $t \to 0$. Этот результат понадобится нам в следующем разделе, для вычисления регуляризованного логарифма детерминанта Лапласа.

1.10 Конформная аномалия.

Мы показали, что ядро уравнения теплопроводности в пределе $\epsilon \to 0$ имеет асимптотику

$$K_j(\epsilon, z, z) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon}\left[1 - \frac{(3j-1)R}{6}\epsilon + O(\epsilon^2)\right]. \tag{157}$$

Возвращаясь к формуле для вариации регуляризованного логарифма детерминанта Лапласа

$$\delta(\log \det \Delta_j)_\epsilon = \int \frac{\delta\rho}{\rho}\left((j-1)K_j(\epsilon, z, z) - jK_{1-j}(\epsilon, z, z)\right) d^2 z, \tag{158}$$

и подставляя в нее найденную асимптотику теплового ядра, а также вспоминая, что $\rho = e^\sigma$, получим

$$\delta(\log \det \Delta_j^{[g]})_\epsilon = -\frac{1}{4\pi\epsilon}\int \delta\sigma(x)\sqrt{g}d^2x - \frac{a_j}{24\pi}\int \delta\sigma(x)R^{[g]}(x)\sqrt{g}d^2x, \tag{159}$$

здесь

$$a_j = 6j^2 - 6j + 1. \tag{160}$$

Запись $R^{[g]}$ означает, что кривизна пространства вычисляется в метрике g.

Теперь положим $g = e^{\sigma(x)}\hat{g}$, тогда формула (159) примет вид

$$\delta(\log \det \Delta_j^{[e^\sigma \hat{g}]})_\epsilon = -\frac{1}{4\pi\epsilon}\int \delta\sigma(x)e^{\sigma(x)}\sqrt{\hat{g}}d^2x - \frac{a_j}{24\pi}\int \delta\sigma(x)R^{[g]}(x)\sqrt{g}d^2x. \tag{161}$$

Для второго члена в правой части выражения (161) воспользуемся следующей формулой

$$\sqrt{g}R^{[g]}(x) = \sqrt{\hat{g}}(R^{[\hat{g}]}(x) + \Delta_0^{[\hat{g}]}\sigma(x)),$$
$$\text{где} \quad g_{ab} = e^\sigma \hat{g}_{ab}, \quad \Delta_0^{[\hat{g}]} = -\frac{1}{\sqrt{\hat{g}}}\partial_a \hat{g}^{ab}\sqrt{\hat{g}}\partial_b. \tag{162}$$

Тогда выражение (161) можно будет представить в виде

$$\delta(\log \det \Delta_j^{[e^\sigma \hat{g}]})_\epsilon = -\frac{1}{4\pi\epsilon}\int \delta\sigma(x)e^{\sigma(x)}\sqrt{\hat{g}}d^2x -$$
$$- \frac{a_j}{24\pi}\int \delta\sigma(x)R^{[\hat{g}]}(x)\sqrt{\hat{g}}d^2x - \frac{a_j}{24\pi}\int \delta\sigma(x)\Delta_0^{[\hat{g}]}\sigma(x)\sqrt{\hat{g}}d^2x. \tag{163}$$

Интегрируя в формуле (163) третье слагаемое по частям, мы приходим к следующему выражению

$$\delta(\log \det \Delta_j^{[e^\sigma \hat{g}]})_\epsilon =$$
$$= \delta\left\{-\frac{a_j}{24\pi}\int \left[\frac{1}{2}\hat{g}^{ab}\partial_a\sigma(x)\partial_b\sigma(x) + R^{[\hat{g}]}(x)\sigma(x)\right]\sqrt{\hat{g}}d^2x + \Delta\mu\int e^{\sigma(x)}\sqrt{\hat{g}}d^2x\right\}, \tag{164}$$

где введено обозначение $\Delta\mu = -\frac{1}{4\pi\epsilon}$. Эта величина называется космологической постоянной. Интегрируя это уравнение, мы приходим к соотношению, которое показывает как меняется детерминант оператора Лапласа при конформном преобразовании метрики

$$\log\det\Delta_j^{[e^\sigma\hat{g}]} - \Delta\mu\int e^{\sigma(x)}\sqrt{\hat{g}}d^2x = \log\det\Delta_j^{[\hat{g}]} -$$
$$-\Delta\mu\int\sqrt{\hat{g}}d^2x - \frac{a_j}{24\pi}\int\left[\frac{1}{2}\hat{g}^{ab}\partial_a\sigma(x)\partial_b\sigma(x) + R^{[\hat{g}]}(x)\sigma(x)\right]\sqrt{\hat{g}}d^2x. \quad (165)$$

Члены в левой и правой части пропорциональные $\Delta\mu$ могут быть устранены прибавлением соответствующего контрчлена вида $\Delta\mu\int\sqrt{\hat{g}}d^2x$ к исходному действию теории. С учетом этого, детерминанты оператора Лапласа в исходной и растянутой метрике связанны соотношением

$$\det\Delta_j^{[e^\sigma\hat{g}]} = \exp\left(-\frac{a_j}{24\pi}W[\sigma,\hat{g}]\right)\det\Delta_j^{[\hat{g}]}, \quad (166)$$

где функционал $W[\sigma,\hat{g}]$ дается выражением

$$W[\sigma,\hat{g}] = \int\left[\frac{1}{2}\hat{g}^{ab}\partial_a\sigma(x)\partial_b\sigma(x) + R^{[\hat{g}]}(x)\sigma(x)\right]\sqrt{\hat{g}}d^2x. \quad (167)$$

Теперь посмотрим, как меняются при растяжении метрики, эффективные действия духов и поля X^μ, равные $S^{\text{eff}}_{\text{Gh}}[g] = -\log\det\Delta_{-1}^{[g]}$, и $S^{\text{eff}}_X[g] = \frac{D}{2}\log\det\Delta_0^{[g]}$ соответственно. Используя формулу (166) имеем

$$S^{\text{eff}}_{\text{Gh}}[e^\sigma\hat{g}] = S^{\text{eff}}_{\text{Gh}}[\hat{g}] - \frac{c_{\text{Gh}}}{48\pi}W[\sigma,\hat{g}], \quad (168)$$
$$S^{\text{eff}}_X[e^\sigma\hat{g}] = S^{\text{eff}}_X[\hat{g}] - \frac{c_X}{48\pi}W[\sigma,\hat{g}], \quad (169)$$

где число $c_{\text{Gh}} = -2a_{-1} = -26$ называется духовым центральным зарядом, а $c_X = Da_0 = D$ центральным зарядом поля X^μ. Таким образом выражение для статистической суммы струны (67) при учете формул (168) и (169) принимает вид

$$Z = \int\mathcal{D}_{\hat{g}}\varphi\, e^{\frac{D-26}{48\pi}W[\varphi,\hat{g}_{ab}]}\int\mathcal{D}_{\hat{g}}(B,C)e^{-S_{Gh}[\hat{g}_{ab},B,C]}\int\mathcal{D}_{\hat{g}}Xe^{-S_P[\hat{g}_{ab},X]}. \quad (170)$$

Теперь заметим, что вариация по метрике какого-либо действия $S[\phi,g_{ab}]$, по определению дается формулой

$$\delta S[g_{ab}] = \frac{1}{4\pi}\int\delta g_{ab}T^{ab}\sqrt{g}d^2x, \quad (171)$$

где T_{ab} — тензор энергии-импульса. И если вариация метрики является растяжением

$$g_{ab}\to(1+\delta\sigma(x))g_{ab}, \quad (172)$$

то мы получаем

$$\delta S[g_{ab}] = \frac{1}{4\pi}\int\delta\sigma(x)T^a_a(x)\sqrt{g}d^2x. \quad (173)$$

С другой стороны из формул (168) и (169) следует, что

$$\delta S^{\text{eff}}[g_{ab}] = -\frac{\text{c}}{48\pi}\int\delta\sigma(x)R^{[g]}(x)\sqrt{g}d^2x. \quad (174)$$

Из чего можно получить

$$T^a_a(x) = -\frac{c}{12}R(x). \tag{175}$$

Соотношения (168), (169) и (175) равносильны утверждению о конформной аномалии соответствующей теории поля.

1.11 Конформная теория поля. Определение

Соотношения (168) и (169) и (175) были получены нами как свойство теории с действием $S_j[\phi]$ в результате прямого вычисления. Однако, они могут рассматриваться как определение Конформной Теории Поля (CFT) в общем случае.

А именно, пусть существует некоторая теория с действием $S[\phi]$. Погрузим ее в кривое пространство с Римановой метрикой, тогда действие примет вид $S[\phi, g_{ab}]$. Определим эффективное действие по формуле

$$e^{-S_{\text{eff}}[g]} = \int \mathcal{D}_g\phi e^{-S[g_{ab},\phi]}. \tag{176}$$

В случае если эффективное действие при растяжении метрики g_{ab}, преобразуется как

$$S_{\text{eff}}[e^\sigma g_{ab}] = S_{\text{eff}}[g_{ab}] - \frac{c}{48\pi}W[\sigma, g_{ab}], \tag{177}$$

Такая теория называется Конформной теорией поля. Другое, эквивалентное определение, основанно на формуле (175), а именно, если след тензора энергии-импульса некоторой теории связан с кривизной, формулой

$$T^a_a(x) = -\frac{c}{12}R(x), \tag{178}$$

то эта теория является Конформной теорией поля.

Свойство (177) вместе с другими общими свойствами локальной Квантовой Теории Поля являются весьма жесткими и позволяют получить важные соображения об алгебре Локальных полей и корреляторах в Конформной теории поля [3, 4]. Этим мы займемся в следующей лекции.

2 Конформный Бутстрап.

Основной темой этой лекции является общая структура двумерной Конформной теории поля.

2.1 Поля, Корреляторы и Операторное разложение.

Основным объектом Квантовой теории поля являются корреляционные функции локальных полей $A_j(x)$

$$\langle A_{j_1}(x_1)...A_{j_N}(x_N)\rangle. \tag{179}$$

Набор локальных полей $\mathcal{A} = \{A\}$ представляет собой линейное пространство. Этот набор является полным, в том смысле, что любое поле может быть разложено по базису $\{A_j(x)\}$.

Кроме того мы будем предполагать справедливость Аксиомы операторного разложения, которая заключается в том, что произведение двух операторов может быть разложено по базису $\{A_j(x)\}$

$$A_i(x)A_j(y) = \sum_k C_{ij}^k(x,y)A_k(y). \tag{180}$$

Уравнение (180) нужно понимать, как соотношение корреляционных функций

$$\langle A_i(x)A_j(y)X\rangle = \sum_k C_{ij}^k(x,y)\langle A_k(y)X\rangle, \tag{181}$$

где $X = A_{j_1}(y_1)...A_{j_N}(y_N)$. Ввиду предположения о выполнении (180), набор локальных полей образует не только линейное пространство, но и является алгеброй.

Соотношение (180) может быть использовано, чтобы выразить N точечные корреляционные функции через $N-1$ точечные. Поэтому, зная структурные функции $C_{ij}^k(x)$, мы в принципе можем найти любые корреляционные функции.

Отметим, что соотношение (180) предполагается, как точное соотношение, и кроме того, предполагается, что ряд сходиться, если расстояние между точками x и y меньше, чем расстояние до любого другого оператора. Для больших расстояний (180) понимается, как аналитическое продолжение этого ряда.

Корреляционные функции (179) являются однозначными и имеют особенности, когда положения каких либо полей совпадают. Аксиома (180) должна быть согласованна с возможностью ее применения в любом порядке к произвольной паре локальных полей в корреляционной функции.

Рассмотрим подробно четырехточечную функцию

$$\langle A_1(x_1)A_2(x_2)A_3(x_3)A_4(x_4)\rangle. \tag{182}$$

Тогда, используя операторное разложение (180) внутри корреляционной функции (182) между полями A_1, A_2 и A_3, A_4 получим

$$\langle (A_1(x_1)A_2(x_2))(A_3(x_3)A_4(x_4))\rangle = \sum_{k,l} C_{12}^k(x_1-x_2)\mathcal{D}_{kl}(x_2-x_4)C_{34}^l(x_3-x_4), \tag{183}$$

где

$$\langle A_i(x_i)A_j(x_j)\rangle = \mathcal{D}_{ij}(x_i-x_j). \tag{184}$$

Мы пишем везде разности аргументов, так как предполагаем трансляционную инвариантность. Заметим, что можно спарить поля в другом порядке, например A_1, A_3 и A_2, A_4. После чего получим

$$\langle A_1(x_1)A_2(x_2)A_3(x_3)A_4(x_4)\rangle = \sum_{k,l} C_{13}^k(x_1 - x_3)\mathcal{D}_{kl}(x_3 - x_4)C_{24}^l(x_2 - x_4). \tag{185}$$

Результаты применения двух разных порядков должны совпадать

$$\sum_{k,l} C_{13}^k(x_1 - x_3)\mathcal{D}_{kl}(x_3 - x_4)C_{24}^l(x_2 - x_4) = \\ = \sum_{k,l} C_{12}^k(x_1 - x_2)\mathcal{D}_{kl}(x_2 - x_4)C_{34}^l(x_3 - x_4). \tag{186}$$

Уравнение (186) накладывает жесткие условия на структурные функции алгебры локальных полей. Оказывается, что если оно выполнено, то применение аксиомы (180) для многоточечной функции также не зависит от порядка в котором оно выполняется. Это свойство операторного разложения называется свойством ассоциативности или кроссинг симметрии операторной алгебры.

2.2 Тензор энергии-импульса.

Следующим свойством алгебры локальных полей в лоренц-инвариантной Теории Поля является существование тензора энергии-импульса $T_{ab} \in \mathcal{A}$. Его определение заключается в следующем. Предположим, что при бесконечно малых преобразованиях координат $x^a \to x^a + \varepsilon^a(x)$, определены и бесконечно малые преобразования полей $A_j(x) \to A_j(x) + \delta_\varepsilon A_j(x)$. Тогда мы **постулируем**, что существует поле $T_{ab}(x)$, такое, что

$$\delta_\varepsilon \langle A_1(x_1)...A_N(x_N)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \partial_a \varepsilon_b(x)\langle T^{ab}(x)A_1(x_1)...A_N(x_N)\rangle d^2x, \tag{187}$$

где вариация коррелятора

$$\delta_\varepsilon \langle A_1(x_1)...A_N(x_N)\rangle = \sum_k \langle A_1(x_1)...\delta_\varepsilon A_k(x_k)...A_N(x_N)\rangle. \tag{188}$$

Также постулатом является симметричность тензора энергии-импульса

$$T^{ab}(x) = T^{ba}(x). \tag{189}$$

Вариация $\delta_\varepsilon A_j(x)$ некого локального поля A_j при бесконечно малом преобразовании координат, вследствие локальности является линейной комбинацией функции $\varepsilon(x)$ и конечного числа ее производных, взятых в точке x. Это можно записать как

$$\delta_\varepsilon A_j(x) = \sum_{k=0}^{\nu_j} B_j^{(k-1)}(x)\frac{d^k}{dx^k}\varepsilon(x), \tag{190}$$

где $B_j^{(k-1)}$ — локальные поля, принадлежащие множеству $\mathcal{A}$ и ν_j — некие целые числа. Интегрирование в правой части уравнения (187) ведется по всему пространству $\mathbb{R}^2$. Этот интеграл можно разбить на две части

$$\int_{\mathbb{R}^2}(...)d^2x = \sum_{k=1}^{N}\int_{\mathbb{D}_k}(...)d^2x + \int_{\bar{\mathbb{D}}}(...)d^2x, \tag{191}$$

Рис. 2: Координаты локальных полей, окруженные областями $\mathbb{D}_k$

где $\mathbb{D}_k$ маленькие области, каждая из которых окружает только точку x_k (рис. 2), то есть $x_k \in \mathbb{D}_k$ и $x_i \notin \mathbb{D}_k$, если $i \neq k$. И $\bar{\mathbb{D}}$ оставшаяся часть пространства $\mathbb{R}^2$, то есть $\bar{\mathbb{D}} = \mathbb{R}^2 - \cup_i \mathbb{D}_i$. Теперь воспользуемся интегрированием по частям и получим, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}(...)d^2x = -\frac{1}{2\pi}\int_{\bar{\mathbb{D}}}\varepsilon_b(x)\langle\partial_a T^{ab}(x)A_1(x_1)...A_N(x_N)\rangle d^2x - \\ -\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}_k}(...)d\mathbf{x} + \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}_k}(...)d^2x. \quad (192)$$

Мы можем выбрать такую вариацию координат, при которой $\varepsilon(x) = 0$ во всех областях $\mathbb{D}_k$, и $\varepsilon(x) \neq 0$ в $\bar{\mathbb{D}}$. Следовательно корреляционная функция $\langle\partial_a T^{ab}(x)A_1(x_1)...A_N(x_N)\rangle$ должна исчезнуть, когда $x \in \bar{\mathbb{D}}$, и так как мы можем выбрать области $\mathbb{D}_k$ произвольно малыми, то получаем, что

$$\langle\partial_a T^{ab}(x)A_1(x_1)...A_N(x_N)\rangle = 0, \quad \text{если} \quad x \neq x_1, ...x_N. \quad (193)$$

Из этого соотношения следует уравнение непрерывности для тензора энергии-импульса

$$\partial_a T^{ab}(x) = 0, \quad \text{если} \quad x \neq x_1, ...x_N. \quad (194)$$

Чтобы не оговаривать постоянно условие того, что $x \neq x_1, ..., x_N$, мы будем писать $\partial_a T^{ab}(x) \simeq 0$.

В итоге мы получили

$$\delta_\varepsilon\langle A_1(x_1)...A_N(x_N)\rangle = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{\mathbb{D}_k}(...)d^2x - \\ -\sum_{k=1}^{N}\oint_{C_k}\frac{dx^a}{2\pi}\varepsilon_b(x)\langle\tilde{T}_a^b(x)A_1(x_1)...A_N(x_N)\rangle, \quad (195)$$

где $\tilde{T}_a^b(x) = e_{ac}T^{cb}(x)$, и e_{ac} — совершенно антисимметричный единичный тензор второго ранга. Интегрирование во второй части уравнения проводится по контурам $C_k = \partial\mathbb{D}_k$, в направлении против часовой стрелки.

2.3 Тензор энергии-импульса в Конформной теории поля в плоском пространстве.

Если конформная теория находится в плоском пространстве с метрикой $g_{ab} = \delta_{ab}$, то кроме того, что для тензора энергии импульса выполняется условие непрерывности и симметричности

$$\partial_a T^{ab}(x) = 0, \quad T^{ab}(x) = T^{ba}(x), \quad (196)$$

из формулы (178) следует, что он становится бесследовым

$$T_a^a(x) = 0. \quad (197)$$

В конформных координатах $(z, \bar{z})$ (формулы (40),(41)) уравнения (196) и (197) запишутся в следующем виде

$$\partial T_{\bar{z}\bar{z}} + \bar{\partial} T_{z\bar{z}} = 0, \quad \partial T_{\bar{z}z} + \bar{\partial} T_{zz} = 0, \quad T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z}, \tag{198}$$
$$T_{\bar{z}z} + T_{z\bar{z}} = 0, \tag{199}$$

где снова $\partial = \partial_z$, $\bar{\partial} = \partial_{\bar{z}}$. Также мы учли, что

$$T_z^z = \frac{2}{\rho} T_{\bar{z}z}, \quad T_{\bar{z}}^{\bar{z}} = \frac{2}{\rho} T_{z\bar{z}}, \quad T^{zz} = \frac{4}{\rho^2} T_{\bar{z}\bar{z}},$$
$$T^{\bar{z}\bar{z}} = \frac{4}{\rho^2} T_{zz}, \quad T^{z\bar{z}} = \frac{4}{\rho^2} T_{\bar{z}z}, \quad T^{\bar{z}z} = \frac{4}{\rho^2} T_{z\bar{z}}. \tag{200}$$

Из уравнений (198),(199) получаем, что $T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = 0$. Следовательно если определить величины

$$T(z, \bar{z}) = T_{zz}(z, \bar{z}), \tag{201}$$
$$\bar{T}(z, \bar{z}) = T_{\bar{z}\bar{z}}(z, \bar{z}), \tag{202}$$

то для них будут выполняться уравнения

$$\bar{\partial} T(z, \bar{z}) = 0, \tag{203}$$
$$\partial \bar{T}(z, \bar{z}) = 0. \tag{204}$$

То есть, в двумерной конформной теории есть два поля, голоморфное и антиголоморфное. Голоморфность $T = T(z)$ приводит к тому, что коррелятор

$$\langle T(z) X \rangle = \langle T(z) A_1(z_1, \bar{z}_1) ... A_1(z_N, \bar{z}_N) \rangle \tag{205}$$

является однозначной функцией z, которая имеет сингулярности только в точках $z_1, z_2, ..., z_N$.

Вновь вернемся к выражению (195), так как вариации координат $\varepsilon^a(x)$ могут изменяться независимо в каждой области $\mathbb{D}_k$, в формуле (195) можно рассматривать вариации каждого поля в отдельности, поэтому имеем

$$\delta_\varepsilon A_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}_k} d^2 y \partial_a \varepsilon_b(y) T^{ab}(y) A_k(x) - \oint_{C_k} \frac{dy^a}{2\pi} \varepsilon_b(y) \tilde{T}_a^b(y) A_k(x). \tag{206}$$

Рассмотрим бесконечно малые преобразования координат, удовлетворяющие соотношению

$$\partial_a \varepsilon_b + \partial_b \varepsilon_a = (\partial_c \varepsilon_c) \delta_{ab}. \tag{207}$$

Такие преобразования называются конформными, поскольку соответствуют локальным растяжениям интервала $(dx_a)^2 \to (1 + \partial_c \varepsilon_c)(dx_a)^2$. При этом углы пересечения двух линий не меняются.

Так как в плоском пространстве $T_a^a(y) = 0$, то первое слагаемое в выражении (206) равно нулю и мы получаем, что

$$\delta_\varepsilon A_k(x) = -\oint_{C_k} \frac{dy^a}{2\pi} \varepsilon_b(y) \tilde{T}_a^b(y) A_k(x). \tag{208}$$

Если теперь перейти в конформные координаты по формулам

$$\left\{ \begin{array}{l} u = y_1 + i y_2 \\ \bar{u} = y_1 - i y_2 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} z = x_1 + i x_2 \\ \bar{z} = x_1 - i x_2 \end{array} \right. . \tag{209}$$

И учесть, что в них символ Леви-Чивиты e_{ab} имеет компоненты

$$e_{uu} = e_{\bar{u}\bar{u}} = 0, \quad e_{u\bar{u}} = -e_{\bar{u}u} = i/2, \tag{210}$$

то компоненты тензора $\tilde{T}_a^b$ равны

$$\tilde{T}_u^u = \tilde{T}_{\bar{u}}^{\bar{u}} = 0, \quad \tilde{T}_u^{\bar{u}} = 2iT_{uu}, \quad \tilde{T}_{\bar{u}}^u = -2iT_{\bar{u}\bar{u}}. \tag{211}$$

В конформных координатах малые вариации выглядят как

$$\begin{aligned} u &\to u + \varepsilon^u(u), \\ \bar{u} &\to \bar{u} + \varepsilon^{\bar{u}}(\bar{u}). \end{aligned} \tag{212}$$

Величины $\varepsilon(u) = \varepsilon^u(u)$ и $\bar{\varepsilon}(\bar{u}) = \varepsilon^{\bar{u}}(\bar{u})$ мы можем считать не зависимыми. В итоге из формул (208) и (210), (211) следует, что в голоморфных координатах малая вариация поля имеет вид

$$\delta_\varepsilon A_k(z,\bar{z}) = \oint_{C_k} \frac{du}{2\pi i} \varepsilon(u) T(u) A_k(z,\bar{z}), \tag{213}$$

$$\delta_{\bar{\varepsilon}} A_k(z,\bar{z}) = -\oint_{C_k} \frac{d\bar{u}}{2\pi i} \bar{\varepsilon}(\bar{u}) \bar{T}(\bar{u}) A_k(z,\bar{z}), \tag{214}$$

где контурные интегралы берутся против часовой стрелки.

2.4 Тензор энергии-импульса в КТП в искривленном пространстве, псевдотензор.

В искривленном пространстве с метрикой g_{ab} формула (187) запишется в следующем виде

$$\delta_\varepsilon \langle A_1(x_1)...A_N(x_N)\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \nabla_a \epsilon_b(x) \langle T^{ab}(x) A_1(x_1)...A_N(x_N)\rangle \sqrt{g} d^2x, \tag{215}$$

где $\nabla_a \varepsilon_b = \partial_a \varepsilon_b - \Gamma^c_{ab} \varepsilon_c$, Γ^c_{ab} — символ Кристофеля. Делая аналогичные преобразования предыдущего раздела, а также вспоминая эквивалентное определение конформной теории поля, мы приходим к следующим уравнениям

$$g^{ab} \langle T_{ab} \rangle = -\frac{c}{12} R, \tag{216}$$

$$\nabla_a T^{ab} \simeq 0, \tag{217}$$

где R — скалярная кривизна. Напомним, что при выборе координат, в которых метрика конформная плоская $g_{ab} dx^a dx^b = \rho(z,\bar{z}) dz d\bar{z} = e^{\sigma(z,\bar{z})} dz d\bar{z}$, символ Кристофеля имеет только две отличные от нуля компоненты

$$\Gamma^z_{zz} = \partial\rho/\rho = \partial\sigma, \quad \Gamma^{\bar{z}}_{\bar{z}\bar{z}} = \bar{\partial}\rho/\rho = \bar{\partial}\sigma, \tag{218}$$

а скалярная кривизна равна

$$R = -4e^{-\sigma} \bar{\partial}\partial\sigma. \tag{219}$$

Таким образом уравнение непрерывности в конформных координатах запишется как

$$\nabla_{\bar z} T^{\bar z \bar z} + \nabla_z T^{z \bar z} = 0, \tag{220}$$
$$\nabla_{\bar z} T^{\bar z z} + \nabla_z T^{z z} = 0. \tag{221}$$

Далее будем рассматривать только одну формулу (220), преобразования для (221) аналогичны. Теперь учитывая то, что $\nabla_a T^{ab} = \partial_a T^{ab} + \Gamma^a_{ac} T^{cb} + \Gamma^b_{ac} T^{ca}$, получим, что

$$\nabla_{\bar z} T^{\bar z \bar z} + \nabla_z T^{z \bar z} = \partial_{\bar z} T^{\bar z \bar z} + 2\Gamma^{\bar z}_{\bar z \bar z} T^{\bar z \bar z} + \partial_z T^{z \bar z} + \Gamma^z_{zz} T^{z \bar z} = 0. \tag{222}$$

В итоге мы получили уравнение

$$\bar\partial T^{\bar z \bar z} + 2\bar\partial\sigma T^{\bar z \bar z} + \partial T^{z \bar z} + \partial\sigma T^{z \bar z} = 0, \tag{223}$$

которое после преобразования приводится к виду

$$\bar\partial(e^{2\sigma} T^{\bar z \bar z}) + e^{\sigma}\partial(e^{\sigma} T^{z \bar z}) = 0. \tag{224}$$

Используя то, что $T^{ab} = g^{ac} g^{bd} T_{cd}$ и $g^{z \bar z} = g^{\bar z z} = 2e^{-\sigma}$, имеем

$$\bar\partial T_{zz} + e^{\sigma}\partial(e^{-\sigma} T_{z \bar z}) = 0. \tag{225}$$

Также учитывая формулу (216), получим два уравнения

$$\bar\partial T_{zz} + e^{\sigma}\partial(e^{-\sigma} T_{z \bar z}) = 0, \tag{226}$$
$$T_{z \bar z} = -\alpha \partial\bar\partial\sigma, \tag{227}$$

где $\alpha = -\frac{c}{12}$. Из них следует, что

$$\bar\partial\left(T_{zz} - \frac{\alpha}{2}\{2\partial^2\sigma - (\partial\sigma)^2\}\right) = 0. \tag{228}$$

Теперь видно, что если определить величины

$$T = T_{zz} - \frac{\alpha}{2} t_{zz}, \quad \text{где} \quad t_{zz} = 2\partial^2\sigma - (\partial\sigma)^2, \tag{229}$$
$$\bar T = T_{\bar z \bar z} - \frac{\alpha}{2} t_{\bar z \bar z}, \quad \text{где} \quad t_{\bar z \bar z} = 2\bar\partial^2\sigma - (\bar\partial\sigma)^2, \tag{230}$$

то они будут соответственно голоморфными и антиголоморфными полями. Эти поля и называются голоморфными и антиголоморфными компонентами псевдотензора энергии-импульса.

При голоморфных преобразованиях

$$z \to w(z), \quad \bar z \to \bar w(\bar z) \tag{231}$$

компонента

$$t_{zz} = 2\partial^2\sigma - (\partial\sigma)^2 \tag{232}$$

преобразуется как

$$t_{zz} \to (\partial_z w)^2 t_{ww} - 2\{w, z\}. \tag{233}$$

Величина $\{w,z\}$ называется Шварцианом и равна

$$\{w,z\} = \frac{w_{zzz}}{w_z} - \frac{3}{2}\left(\frac{w_{zz}}{w_z}\right)^2. \tag{234}$$

Компоненты тензора T_{zz} преобразуется по формуле

$$T_{zz} \to (\partial_z w)^2 T_{ww}. \tag{235}$$

Поэтому закон преобразования для голоморфного псевдотензора $T(z)$ выглядит как

$$T(z) \to (\partial_z w)^2 T(w) - \alpha\{w,z\}. \tag{236}$$

Антиголоморфный псевдотензор $\bar{T}(\bar{z})$ преобразуется аналогично.

2.5 Операторное разложение для тензора энергии-импульса, Алгебра Вирасоро.

Заметим, что из формулы (236) следует, что при голоморфной вариации координат $z \to z + \varepsilon(z)$, псевдотензор $T(z)$ преобразуется по следующему правилу

$$T(z) \to (1 + \partial_z \varepsilon(z))^2 T(z + \varepsilon(z)) - \alpha \partial_z^3 \varepsilon(z), \tag{237}$$

отсюда легко заметить, что его вариация равна

$$\delta_\varepsilon T(z) = \varepsilon \partial_z T(z) + 2(\partial_z \varepsilon(z)) T(z) - \alpha \partial_z^3 \varepsilon(z). \tag{238}$$

Используя то, что вариация поля в точке z выражается через контурный интеграл вокруг этой точки

$$\delta_\varepsilon T(z) = \oint_{C_z} \frac{du}{2\pi i} \varepsilon(u) T_{zz}(u) T(z) \tag{239}$$

и учитывая, что в операторном разложении тензора t_{zz} с тензором T нет сингулярных членов, что эквивалентно

$$\oint_{C_z} \frac{du}{2\pi i} \varepsilon(u) t_{zz}(u) T(z) = 0, \tag{240}$$

приходим к формуле

$$\delta_\varepsilon T(z) = \oint_{C_z} \frac{du}{2\pi i} \varepsilon(u) T(u) T(z). \tag{241}$$

И аналогично для антиголоморфного псвевдотензора

$$\delta_{\bar{\varepsilon}} \bar{T}(\bar{z}) = -\oint_{C_z} \frac{d\bar{u}}{2\pi i} \bar{\varepsilon}(\bar{u}) \bar{T}(\bar{u}) \bar{T}(\bar{z}). \tag{242}$$

Из этого, используя формулу (238), не трудно получить, операторное разложение голоморфного псевдотензора с самим собой

$$T(u)T(z) = \frac{c}{2(u-z)^4} + \frac{2T(z)}{(u-z)^2} + \frac{\partial_z T(z)}{u-z} + \text{рег.}, \tag{243}$$

$$\bar{T}(\bar{u})\bar{T}(\bar{z}) = \frac{c}{2(\bar{u}-\bar{z})^4} + \frac{2\bar{T}(\bar{z})}{(\bar{u}-\bar{z})^2} + \frac{\partial_{\bar{z}} \bar{T}(\bar{z})}{\bar{u}-\bar{z}} + \text{рег.}, \tag{244}$$

где мы учли, что $\alpha = -\frac{c}{12}$, а "рег." означает слагаемые, регулярные при $z \to u$. Очевидно, что так как $\delta_{\bar\varepsilon} T = 0$, то разложение тензора $T(u)$ с тензором $\bar T(\bar z)$, содержит только регулярные члены

$$T(u)\bar T(\bar z) = \text{рег.}. \tag{245}$$

Необходимо более подробно изучить свойства операторного разложения, чтобы увидеть какие возникают ограничения на корреляционные функции теории. Рассмотрим операторное разложение голоморфного псевдотензора энергии импульса с одним из полей $A_j \in \mathcal{A}$. Как следствие того, что тензор энергии-импульса голоморфный и корреляционные функции теории однозначны, возможные особенности в этом операторном разложении могут иметь вид

$$T(u)A(z,\bar z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (u-z)^{-n-2} A_n(z,\bar z), \tag{246}$$

где n принимает целые значения. Коэффициенты $A_n(z)$ принадлежат пространству локальных полей и линейно зависят от A. Поэтому удобно их представить как результат применения некоторого линейного оператора L_n к полю A

$$A_n = L_n A. \tag{247}$$

Таким образом

$$T(u)A(z,\bar z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (u-z)^{-n-2} L_n A(z,\bar z). \tag{248}$$

Это выражение является определением операторов $L_n,\ n \in \mathbb{Z}$, действующих в пространстве полей $\mathcal{A}$. Аналогично формула

$$\bar T(\bar u)A(z,\bar z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\bar u-\bar z)^{-n-2} \bar L_n A(z,\bar z) \tag{249}$$

определяет операторы $\bar L_n$. Теперь нетрудно написать действие операторов L_n и $\bar L_n$ на поле A в виде контурного интеграла

$$L_n A(z,\bar z) = \oint_{C_z} \frac{du}{2\pi i}(u-z)^{n+1} T(u) A(z,\bar z), \tag{250}$$

$$\bar L_n A(z,\bar z) = -\oint_{C_z} \frac{d\bar u}{2\pi i}(\bar u-\bar z)^{n+1} \bar T(\bar u) A(z,\bar z). \tag{251}$$

Вычислим коммутатор $[L_n, L_m]$ операторов L_n и L_m. Для этого надо применить поочередно эти операторы к полю A, а затем вычесть результат применения в другом порядке. Рассмотрим сначала

$$L_n L_m A(z,\bar z) = \oint_{C_2} \frac{dv}{2\pi i}(v-z)^{n+1} T(v) \oint_{C_1} \frac{du}{2\pi i}(u-z)^{m+1} T(u) A(z,\bar z), \tag{252}$$

где контур C_1 охватывает точку z, а контур C_2 охватывает и точку z и сам контур C_1. Применение операторов в другой последовательности будет

Рис. 3: Вычисление коммутационных соотношений в алгебре Вирасоро.

иметь точно такой же вид, только контур C_1 будет охватывать контур C_2. Интегралы в (252) будем вычислять используя равенство

$$\oint_{C_2}\oint_{C_1} = \oint_{C_1}\oint_{C_2} + \oint_{C_1}\oint_{C_v}, \tag{253}$$

где точка u лежит на контуре C_1. А контур C_v охватывает точку u. В результате, при вычислении коммутатора, первый член сокращается, и остается только последний. Таким образом

$$[L_n, L_m]A(z,\bar{z}) = \oint_{C_1}\frac{du}{2\pi i}(u-z)^{m+1}\oint_{C_v}\frac{dv}{2\pi i}(v-z)^{n+1}T(v)T(u)A(z,\bar{z}), \tag{254}$$

Контур, охватывающий точку u можно сжать и поскольку функция $(v-z)^{n+1}$ не имеет особенностей в точке u, то при вычислении этого интеграла будут давать вклад только сингулярные члены из операторного разложения $T(v)T(u)$. После этого можно выполнить второе интегрирование. В результате получим

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0}. \tag{255}$$

Операторы $\bar{L}_n$ подчиняются аналогичным коммутационным соотношениям. Итак операторы L_n образуют бесконечно мерную алгебру Ли, генераторами которой являются L_n и элемент c — центральный заряд. Эта алгебра называется алгеброй Вирасоро. Мы обозначим ее Vir. Она действует на пространстве локальных полей. Так как полная алгебра состоит из генераторов L_n и $\bar{L}_n$, для которых верно

$$[L_n, \bar{L}_m] = 0, \tag{256}$$

то вся алгебра Вирасоро есть $\mathrm{Vir}\times\overline{\mathrm{Vir}}$.

Изучим некоторые интересные подалгебры алгебры Вирасоро. Во-первых, есть подалгебра $\{L_n\}$ и $\{\bar{L}_n\}$ с $n \geqslant -1$. Эта подалгебра связана бесконечномалыми конформными преобразованиями вида $\varepsilon_n(u) = (u-z)^{n+1}$ и $\bar{\varepsilon}_n(\bar{u}) = (\bar{u}-\bar{z})^{n+1}$. Еще одна важная конечномерная подалгебра $Sl(2)\times\overline{Sl(2)}$, формируемая операторами L_{-1}, L_0 и L_1, а также $\bar{L}_{-1}$, $\bar{L}_0$ и $\bar{L}_1$, причем, как нетрудно видеть

$$[L_0, L_{\pm1}] = \mp L_{\pm1}, \quad [L_1, L_{-1}] = 2L_0. \tag{257}$$

($\bar{L}_{\pm1}$, $\bar{L}_0$ удовлетворяют таким же соотношениям). Эта подалгебра соответствует подгруппе проективных конформных преобразований

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \bar{w} = \frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}+\bar{d}}, \tag{258}$$

где можно положить, что $ad-bc = \bar{a}\bar{d}-\bar{b}\bar{c} = 1$. Проективные (дробнолинейные) преобразования являются голоморфными. Они также являются диффеоморфизмами сферы в себя. Поэтому эти преобразования есть полные симметрии теории, в том смысле, что они оставляют инвариантными корреляторы локальных полей

$$\langle A_{j_1}(z_1,\bar{z}_1)...A_{j_N}(z_N,\bar{z}_N)\rangle = \langle \tilde{A}_{j_1}(z_1,\bar{z}_1)...\tilde{A}_{j_N}(z_N,\bar{z}_N)\rangle, \tag{259}$$

где $\tilde{A}_{j_i}(z_i,\bar{z}_i)$ поля получающиеся из полей $A_{j_i}(z_i,\bar{z}_i)$ при преобразованиях (258). Действительно, так как бесконечно малые дробно линейные преобразования являются, как уже было сказано, голоморфными, то, вспоминая формулу (215), получим

$$\delta_\epsilon \langle A_1(x_1)...A_N(x_N)\rangle = 0. \tag{260}$$

Прочие преобразования, например $z \to z+\epsilon z^3$, не являются диффеоморфизмами и из них не следует никаких условий на корреляционные функции. Однако они ограничивают вид операторного разложения. Отметим также, что L_{-1} и $\bar{L}_{-1}$ являются генераторами сдвигов $z \to z+a$. А L_0 и $\bar{L}_0$ связаны с оператором спина поля S, действие которого выражается формулой

$$SA(z,\bar{z}) = (L_0-\bar{L}_0)A(z,\bar{z}) = \oint_{C_z}\left[\frac{du}{2\pi i}(u-z)T(u) - \frac{d\bar{u}}{2\pi i}(\bar{u}-\bar{z})\bar{T}(\bar{u})\right]A(z,\bar{z}), \tag{261}$$

что соответствует бесконечно малым преобразованиям вращения. В свою очередь бесконечно малому преобразованию растяжения или как это еще называется — дилатации, соответствует оператор D, который действует по правилу

$$DA(z,\bar{z}) = (L_0+\bar{L}_0)A(z,\bar{z}) = \oint_{C_z}\left[\frac{du}{2\pi i}(u-z)T(u) + \frac{d\bar{u}}{2\pi i}(\bar{u}-\bar{z})\bar{T}(\bar{u})\right]A(z,\bar{z}). \tag{262}$$

Базис полей A_j мы можем выбрать таким образом, что эти поля являются собственными для операторов L_0 и $\bar{L}_0$

$$L_0A_j(z,\bar{z}) = \Delta_j A_j(z,\bar{z}), \quad \bar{L}_0A_j(z,\bar{z}) = \bar{\Delta}_j A_j(z,\bar{z}), \tag{263}$$

где Δ_j и $\bar{\Delta}_j$ собственные числа этих двух операторов, которые называются правой и левой размерностями поля соответственно. При этом $\Delta_j-\bar{\Delta}_j = s_j$ называется спином поля, а $\Delta_j+\bar{\Delta}_j = d_j$ аномальной размерностью. Формула (263) означает, что при заменах $z \to \lambda_1 z$ и $\bar{z} \to \lambda_2\bar{z}$, поле преобразуется как

$$A_j(z,\bar{z}) \to \tilde{A}_j(z,\bar{z}) = \lambda_1^{\Delta_j}\lambda_2^{\bar{\Delta}_j}A_j(\lambda_1 z,\lambda_2\bar{z}). \tag{264}$$

Одновременно мы можем выбрать базисные поля A_j так, что операторы L_{-1} и $\bar{L}_{-1}$ действуют дифференцированием на них, то есть

$$L_{-1}A_j(z,\bar{z}) = \partial_z A_j(z,\bar{z}), \quad \bar{L}_{-1}A_j(z,\bar{z}) = \partial_{\bar{z}} A_j(z,\bar{z}), \tag{265}$$

а при конечных сдвигах $z \to z+a_1$ и $\bar{z} \to \bar{z}+a_2$ поля преобразуются как

$$A_j(z,\bar{z}) \to \tilde{A}(z,\bar{z}) = A_j(z+a_1,\bar{z}+a_2). \tag{266}$$

Уже отсюда следует, что одноточечная корреляционная функция базисного поля $A_j(z,\bar{z})$ равна нулю, если его размерность не равна нулю

$$\langle A_j(z,\bar{z})\rangle = 0, \quad \text{если} \quad \Delta_j \neq 0 \quad \text{или} \quad \bar{\Delta}_j \neq 0. \tag{267}$$

Теперь найдем функциональную зависимость коэффициентов $C^k_{12}(z_1, z_2)$ в операторном разложении для полей

$$A_1(z_1, \bar{z}_1)A_2(z_2, \bar{z}_2) = \sum_k C^k_{12}(z_1, z_2)A_k(z_2, \bar{z}_2). \tag{268}$$

Для этого вычислим выражение вида

$$\oint_C \frac{du}{2\pi i} T(u)A_1(z_1, \bar{z}_1)A_2(z_2, \bar{z}_2), \tag{269}$$

где контур C окружает сразу две точки z_1 и z_2. Стянув контур C к этим точкам и, пользуясь тем, что если u находится вблизи z_1 или z_2, мы можем использовать формулу (248), а также учитывая, что $L_{-1} = \partial_z$, получим

$$\oint_C \frac{du}{2\pi i} T(u)A_1(z_1, \bar{z}_1)A_2(z_2, \bar{z}_2) = A_2(z_2, \bar{z}_2)\partial_{z_1}A_1(z_1, \bar{z}_1) + A_1(z_1, \bar{z}_1)\partial_{z_2}A_2(z_2, \bar{z}_2) =$$
$$= (\partial_{z_1} + \partial_{z_2})A_1(z_1, \bar{z}_1)A_2(z_2, \bar{z}_2). \tag{270}$$

Аналогичную получаем

$$\oint_C \frac{du}{2\pi i} T(u)\sum_k C^k_{12}(z_1, z_2)A_k(z_2, \bar{z}_2) = \sum_k C^k_{12}(z_1, z_2)\partial_{z_2}A_k(z_2, \bar{z}_2). \tag{271}$$

В итоге мы имеем равенство

$$(\partial_{z_1} + \partial_{z_2})A_1(z_1, \bar{z}_1)A_2(z_2, \bar{z}_2) = \sum_k C^k_{12}(z_1, z_2)\partial_{z_2}A_k(z_2, \bar{z}_2). \tag{272}$$

Теперь подставляя в левую часть этого равенства формулу (268) находим, что

$$\sum_k (\partial_{z_1} + \partial_{z_2})C^k_{12}(z_1, z_2)A_k(z_2, \bar{z}_2) = \sum_k C^k_{12}(z_1, z_2)\partial_{z_2}A_k(z_2, \bar{z}_2). \tag{273}$$

Откуда можно получить одно из свойств структурной функции

$$(\partial_{z_1} + \partial_{z_2})C^k_{12}(z_1, z_2) = 0, \quad \text{следовательно} \quad C^k_{12}(z_1, z_2) = C^k_{12}(z_1 - z_2). \tag{274}$$

Аналогично находим, что

$$\oint_C \frac{du}{2\pi i} uT(u)A_1(z_1, \bar{z}_1)A_2(z_2, \bar{z}_2) =$$
$$= [(z_1\partial_{z_1} + \Delta_1) + (z_2\partial_{z_2} + \Delta_2)]A_1(z_1, \bar{z}_1)A_2(z_2, \bar{z}_2). \tag{275}$$

Проделывая подобные операции в итоге получаем еще одно уравнение на структурные константы

$$(z_1\partial_{z_1} + z_2\partial_{z_2})C^k_{12}(z_1 - z_2) = (\Delta_k - \Delta_1 - \Delta_2)C^k_{12}(z_1 - z_2). \tag{276}$$

Учитывая то, что аналогичные формулы можно написать с помощью антиголоморфного псевдотензора, находим выражение для структурных функций

$$C^k_{12}(z_1, z_2) = (z_1 - z_2)^{\Delta_k - \Delta_1 - \Delta_2}(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{\bar{\Delta}_k - \bar{\Delta}_1 - \bar{\Delta}_2}C^k_{12}, \tag{277}$$

где C_{12}^k уже являются структурными константами. Теперь вспомним, что $\langle A_k(z,\bar z)\rangle = 0$, если $\Delta_k \neq 0$ или $\bar\Delta_k \neq 0$. Поэтому очевидно, что

$$\langle A_1(z_1,\bar z_1)A_2(z_2,\bar z_2)\rangle = \frac{D_{12}}{(z_1-z_2)^{\Delta_1+\Delta_2}(\bar z_1-\bar z_2)^{\bar\Delta_1+\bar\Delta_2}} \tag{278}$$

Базисные поля, для которых

$$L_1 A_j(z,\bar z) = 0, \quad \bar L_1 A_j(z,\bar z) = 0 \tag{279}$$

называются квазипримарными, в дальнейшем будем обозначать их как $\phi_\alpha(z,\bar z)$. Они обладают, как мы уже выяснили, следующими свойствами

$$L_0\phi_\alpha(z,\bar z) = \Delta_\alpha\phi_\alpha(z,\bar z), \quad \bar L_0\phi_\alpha(z,\bar z) = \bar\Delta_\alpha\phi_\alpha(z,\bar z), \tag{280}$$

$$L_{-1}\phi_\alpha(z,\bar z) = \partial_z\phi_\alpha(z,\bar z), \quad \bar L_{-1}\phi_\alpha(z,\bar z) = \partial_{\bar z}\phi_\alpha(z,\bar z), \tag{281}$$

$$L_1\phi_\alpha(z,\bar z) = \bar L_1\phi_\alpha(z,\bar z) = 0. \tag{282}$$

Вспоминая, что дробнолинейные преобразования являются симметриями корреляторов (формула (259)), находим, что $\Delta_i = \Delta_j$, и $\bar\Delta_i = \bar\Delta_j$, иначе мы получим ноль. Таким образом можно записать в компактном виде выражение для двухточечной функции

$$\langle \phi_1(z_1,\bar z_1)\phi_2(z_2,\bar z_2)\rangle = \frac{D_{12}}{z_{12}^{2\Delta_1}\bar z_{12}^{2\bar\Delta_1}}\delta_{\Delta_1,\Delta_2}\delta_{\bar\Delta_1,\bar\Delta_2}, \tag{283}$$

где $z_{12} = z_1 - z_2$, а также $\delta_{\Delta_1,\Delta_2} = 1$, если $\Delta_1 = \Delta_2$ и $\delta_{\Delta_1,\Delta_2} = 0$ иначе. Теперь приведем просто ответ для трехточечной функции

$$\langle \phi_1(z_1,\bar z_1)\phi_2(z_2,\bar z_2)\phi_3(z_3,\bar z_3)\rangle = C_{123} z_{12}^{\gamma_3} z_{13}^{\gamma_2} z_{23}^{\gamma_1} \bar z_{12}^{\bar\gamma_3}\bar z_{13}^{\bar\gamma_2}\bar z_{23}^{\bar\gamma_1}, \tag{284}$$

где C_{123} — константа, $\gamma_i = \Delta_i - \Delta$, $\bar\gamma_i = \bar\Delta_i - \bar\Delta$, а $\Delta = \Delta_1+\Delta_2+\Delta_3$, $\bar\Delta = \bar\Delta_1+\bar\Delta_2+\bar\Delta_3$.

2.6 Примарные поля и их потомки.

Теперь давайте вернемся к операторному разложению (248). Так как мы говорили, что вариация $\delta_\varepsilon A(z)$ некого локального поля A при бесконечно малом преобразовании координат является линейной комбинацией функции $\varepsilon(z)$ и конечного числа ее производных, взятых в точке z, то очевидно что ряд в формуле (248) обрывается сверху при некотором n_A, поэтому можно записать

$$T(u)A(z,\bar z) = \sum_{n=-\infty}^{n_A}(u-z)^{-n-2}L_nA(z,\bar z). \tag{285}$$

Далее, так как поле L_nA имеет размерность $(\Delta-n,\bar\Delta)$, где $(\Delta,\bar\Delta)$ размерность поля A. И так как $L_nA = 0$ при всех $n > n_A$, то мы видим, что спектр размерностей ограничен снизу. Отсюда следует что в пространстве локальных полей $\mathcal{A}$ существуют специальные конформные поля, которые уничтожаются операторами L_n, при $n > 0$, то есть

$$L_n\Phi_\alpha = \bar L_n\Phi_\alpha = 0, \quad n > 0, \tag{286}$$

$$L_0\Phi_\alpha = \Delta_\alpha\Phi_\alpha, \quad \bar L_0\Phi = \bar\Delta_\alpha\Phi_\alpha \tag{287}$$

Такие поля называются примарными. Операторное разложение тензоров энергии импульса с примарным полем

$$T(u)\Phi_\alpha(z,\bar z)=\frac{\Delta_\alpha}{(u-z)^2}\Phi_\alpha(z,\bar z)+\frac{1}{u-z}\partial_z\Phi(z,\bar z)+\text{рег.},\qquad(288)$$

$$\bar T(\bar u)\Phi_\alpha(z,\bar z)=\frac{\bar\Delta_\alpha}{(\bar u-\bar z)^2}\Phi_\alpha(z,\bar z)+\frac{1}{\bar u-\bar z}\partial_{\bar z}\Phi(z,\bar z)+\text{рег.}.\qquad(289)$$

Отсюда легко получить выражение для вариации примарного поля при $z\to z+\varepsilon(z)$ и $\bar z\to\bar z+\bar\varepsilon(\bar z)$

$$\delta_\varepsilon\Phi_\alpha(z,\bar z)=\varepsilon(z)\partial_z\Phi_\alpha(z,\bar z)+\Delta_\alpha\varepsilon'(z)\Phi_\alpha(z,\bar z),\qquad(290)$$

$$\delta_{\bar\varepsilon}\Phi_\alpha(z,\bar z)=\bar\varepsilon(\bar z)\partial_{\bar z}\Phi_\alpha(z,\bar z)+\bar\Delta_\alpha\bar\varepsilon'(\bar z)\Phi_\alpha(z,\bar z),\qquad(291)$$

а для конечных преобразований $z\to w(z),\ \bar z\to\bar w(\bar z)$, получим

$$\Phi_\alpha(z,\bar z)\to\left(\frac{dw}{dz}\right)^{\Delta_\alpha}\left(\frac{d\bar w}{d\bar z}\right)^{\bar\Delta_\alpha}\Phi_\alpha(w,\bar w).\qquad(292)$$

Если мы рассмотрим результат применения оператора L_{-n} к примарному полю $\Phi_\alpha(z,\bar z)$, то в результате получим поле с размерностью $(\Delta_\alpha+n,\bar\Delta_\alpha)$. Такие поля мы будем называть потомками примарного поля $\Phi_\alpha(z,\bar z)$. Чтобы не было явного переучета потомков, в следствие коммутационного соотношения (255), их можно выбрать в виде

$$L_{-n_1}L_{-n_2}...L_{-n_N}\bar L_{-m_1}...\bar L_{-m_M}\Phi_\alpha,\qquad(293)$$

где $0\leqslant n_1<n_2\leqslant...\leqslant n_N$ и $0<m_1\leqslant m_2\leqslant...\leqslant m_M$. Все это бесконечномерное пространство образует представление алгебры Вирасоро. Набор полей $[\Phi_\alpha]\in\mathcal{A}$, состоящий из всех полей типа (293), мы будем называть конформным семейством. Конформное семейство содержит само примарное поле $\Phi_\alpha(z,\bar z)$, а также все его потомки, получаемые действием операторов алгебры Вирасоро. Сделаем важное предположение, что всё пространство полей представляет собой сумму $\mathcal{A}=\oplus_\alpha[\Phi_\alpha]$. Более того, предположим, что других полей нет, хотя это и не общая ситуация.

Рассмотрим теперь корреляционные функции некоторых примарных полей и тензора энергии-импульса

$$\langle T(u)\Phi_1(z_1,\bar z_1)...\Phi_N(z_N,\bar z_N)\rangle.\qquad(294)$$

Будем рассматривать этот коррелятор, как функцию u, при фиксированных z_i. Как мы знаем, эта функция является голоморфной, за исключением тех точек, где находятся остальные поля. В этих точках, имеются сингулярности в операторном разложении (288). Кроме того, в пределе $u\to\infty$ эта функция ведет себя как $1/u^4$. Чтобы это увидеть, заметим, что в этом пределе, используя операторное разложение между полями Φ, мы, в конечном итоге получим двухточечную корреляционную функцию вида $T(u)\tilde\Phi(z)$. Мы опустили структурные константы и суммы по промежуточным размерностям. Теперь заметим, что размерность тензора энергии импульса равна двум, поэтому, как мы обсуждали выше, размерность поля $\tilde\Phi$ тоже должна быть равна двум. В противном случае, корреляционная функция равна нулю. Если же размерности совпадают, то двухточечная функция убывает как $1/(u)^{2\Delta} = 1/(u)^4$ при $u \to \infty$. Опираясь на эти рассуждения, сразу можем написать, каким образом эта функция зависит от u

$$\langle T(u)\Phi_1(z_1,\bar{z}_1)...\Phi_N(z_N,\bar{z}_N)\rangle =$$
$$= \sum_{k=1}^{N}\left[\frac{\Delta_k}{(u-z_k)^2} + \frac{1}{(u-z_k)}\frac{\partial}{\partial z_k}\right]\langle\Phi_1(z_1,\bar{z}_1)...\Phi_N(z_N,\bar{z}_N)\rangle \quad (295)$$

Аналогично можно получить, значение корреляционной функции, содержащей любое число операторов тензора энергии-импульса и произвольное количество примарных полей. Следствием уравнения (295) является важный факт, что корреляционная функция потомков выражается посредством применения некоторого дифференциального оператора к корреляционной функции примарных полей. Действительно, как мы знаем, потомки примарного поля получаются применением некоторой комбинации операторов алгебры Вирасоро к примарному полю

$$L_{-n}\Phi(z,\bar{z}) = \oint_{C_z}\frac{du}{2\pi i}(u-z)^{1-n}T(u)\Phi(z,\bar{z}). \quad (296)$$

Рассмотрим теперь корреляционную функцию, содержащую это вторичное поле

$$\langle(L_{-n}\Phi(z,\bar{z}))\Phi_1(z_1,\bar{z}_1)...\Phi_N(z_N,\bar{z}_N)\rangle =$$
$$= \oint_{C_z}\frac{du}{2\pi i}(u-z)^{1-n}\langle T(u)\Phi(z,\bar{z})\Phi_1(z_1,\bar{z}_1)...\Phi_N(z_N,\bar{z}_N)\rangle. \quad (297)$$

Контур можно перекинуть на точки z_k, $k = 1,..,N$, (рис.4) и так как

Рис. 4: Вычисление корреляционной функции.

контур, охватывающий все точки в пределе бесконечно большого контура, не дает вклада, то получаем

$$\langle(L_{-n}\Phi(z,\bar{z}))\Phi_1(z_1,\bar{z}_1)...\Phi_N(z_N,\bar{z}_N)\rangle =$$
$$= -\sum_{k=1}^{N}\oint_{C_{z_k}}\frac{du}{2\pi i}(u-z)^{1-n}\langle T(u)\Phi(z,\bar{z})\Phi_1(z_1,\bar{z}_1)...\Phi_N(z_N,\bar{z}_N)\rangle. \quad (298)$$

Теперь можно воспользоваться операторным разложением внутри корреляционной функции, так как единственные сингулярности по u находятся в точке z. В результате получим

$$\langle(L_{-n}\Phi(z,\bar{z}))\Phi_1(z_1,\bar{z}_1)...\Phi_N(z_N,\bar{z}_N)\rangle =$$
$$= \sum_{k=1}^{N}\left[\frac{(n-1)\Delta_k}{(z_k-z)^n} - \frac{1}{(z_k-z)^{n-1}}\frac{\partial}{\partial z_k}\right]\langle\Phi(z,\bar{z})\Phi_1(z_1,\bar{z}_1)...\Phi_N(z_N,\bar{z}_N)\rangle. \quad (299)$$

Таким образом, мы явно показали, как корреляционные функции потомков выражаются через корреляционные функции примарных полей.

2.7 Сингулярные вектора и приводимые представления.

В прошлом разделе мы постулировали, что все пространство полей Конформной теории поля может быть разбито на прямую сумму представлений алгебры Вирасоро со старшим весом

$$\mathcal{A} = \oplus_\alpha [\Phi_\alpha], \tag{300}$$

где конформное семейство (конформный блок) $[\Phi_\alpha]$ состоит из примарного поля Φ_α и всех его потомков, получающихся из Φ_α многократным применением к нему генераторов L_n, с $n < 0$. Пространство векторов представления является градуированным пространством. Уровнем мы будем называть целое положительное число, на которое размерность поля потомка отличается от размерности примарного поля. Например, все пространство состояний на

Рис. 5: Пространство представления алгебры Вирасоро.

первых нескольких уровнях является линейной оболочкой векторов

$$L_{-1}\Phi_\alpha \quad \text{на первом уровне}$$
$$L_{-1}^2\Phi_\alpha \quad L_{-2}\Phi_\alpha \quad \text{на втором}$$
$$L_{-1}^3\Phi_\alpha \quad L_{-1}L_{-2}\Phi_\alpha \quad L_{-3}\Phi_\alpha \quad \text{на третьем (рис.5)}$$

На произвольном N-ом уровне, пространство состояний будет линейной оболочкой векторов вида

$$L_{-n_1}L_{-n_2}...L_{-n_N}\Phi_\alpha, \tag{301}$$

таких, что $n_1 + n_2 + ... + n_N = N$. Базис можно выбрать таким образом, что $n_1 \geqslant n_2 \geqslant ... \geqslant n_N$. Число базисных векторов равно количеству разбиений числа N, в сумму натуральных чисел.

Представление является приводимым, если на некотором уровне существует потомок $\mathcal{W}$ (рис. 6), такой, что он сам является примарным полем, то есть $L_n\mathcal{W} = 0$ для $n > 0$. Действительно, подпространство $[\Phi_\alpha]$, состоя-

Рис. 6: Сингулярный вектор в пространстве представления алгебры Вирасоро.

щие из потомков $\mathcal{W}$, является инвариантным подпространством. Также $\mathcal{W}$ мы будем называть особым вектором.

Если размерность примарного поля и центральный заряд теории находятся в общем положении, то особых векторов нет, однако при специальных значениях этих параметров особые вектора возникают. Ответ на вопрос, когда возникают особые вектора дается теоремой Каца. Для того, чтоб сформулировать эту теорему, введем дополнительные обозначения. Выберем параметризацию центрального заряда

$$c = 1 + 6Q^2, \tag{302}$$

где

$$Q = b^{-1} + b. \tag{303}$$

Размерность примарного поля удобно параметризовать как

$$\Delta(a) = a(Q - a), \tag{304}$$

тогда можно сформулировать теорему

Теорема Каца. Если параметр a равен специальному значению

$$a_{mn} = \frac{(1-m)b^{-1} + (1-n)b}{2}, \tag{305}$$

где m, n целые положительные числа, то на уровне $N = mn$ находиться особый вектор.
Этот особый вектор является потомком примарного поля с размерностью $\Delta_{mn} = \Delta(a_{mn})$, которое мы будем обозначать Φ_{mn}. Сам особый вектор имеет вид $\mathcal{W}_{nm} = D_{mn}\Phi_{mn}$, где

$$D_{mn} = L_{-1}^{mn} + a_1 L_{-1}^{mn-2} L_{-2} + ... \tag{306}$$

Процедура нахождения сингулярного вектора состоит в следующем. Записываем самый общий вид вектора на уровне N. Затем, действуя на него операторами L_n, $n > 0$, смотрим, при каких условиях результат этого действия равен нулю. Таким способом определяются коэффициенты $a_1, a_2, ...$ Явное вычисление особых векторов позволяет найти операторы D_{mn}. Отметим, что D_{mn} и D_{nm} связаны заменой $b \to b^{-1}$. Приведем несколько первых выражений для D_{mn}

$$\begin{aligned}
&D_{11} = L_{-1},\\
&D_{12} = (L_{-1}^2 + b^2 L_{-2}),\\
&D_{13} = (L_{-1}^3 + 4b^2 L_{-2}L_{-1} + 2b^2(1+2b^2)L_{-3}),\\
&D_{41} = (L_{-1}^4 + 10b^2 L_{-2}L_{-1}^2 + 2b^2(5+12b^2)L_{-3}L_{-1} + 9b^2(1+4b^2+6b^4)L_{-4}).
\end{aligned} \tag{307}$$

2.8 Дифференциальные уравнения для "вырожденных полей".

Можно показать, что поле Φ_{mn}, соответствующее сингулярному вектору, обладает нулевой нормой, поэтому мы будем требовать чтобы особые вектора были равны нулю [4] . Вместе с сингулярным вектором будем полагать нулю и всех его потомков. В результате представление $[\Phi_{mn}]$ станет неприводимым. Такое поле Φ_{mn} в литературе, возможно не очень удачно, называется “вырожденным“.

Из этого требования отщепления особого вектора можно получить интересные следствия для корреляционных функций, а именно, корреляционные функции, содержащие примарные поля Φ_{mn} удовлетворяют однородным дифференциальным уравнениям

$$\langle D_{mn}\Phi_{mn}\Phi_1(z_1,\bar{z}_1)...\Phi_N(z_N,\bar{z}_N)\rangle = \hat{D}_{mn}\langle\Phi_{mn}\Phi_1(z_1,\bar{z}_1)...\Phi_N(z_N,\bar{z}_N)\rangle = 0, \tag{308}$$

где $\hat{D}_{mn}$ уже некоторый дифференциальный оператор. Рассмотрим, например, особый вектор $D_{12}\Phi_{12}$. Тогда корреляционная функция, содержащая это поле тождественно равна нулю

$$\langle D_{12}\Phi_{12}\Phi_1(z_1,\bar{z}_1)...\Phi_N(z_N,\bar{z}_N)\rangle = 0. \tag{309}$$

С другой стороны, вспомним, как действует оператор L_n на поле $A(z,\bar{z})$

$$L_n A(z,\bar{z}) = \oint_{C_z} \frac{du}{2\pi i}(u-z)^{n+1}T(u)A(z,\bar{z}). \tag{310}$$

Тогда, используя тождества Уорда (295) из предыдущего раздела, получаем

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + b^2\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{\Delta_k}{(z-z_k)^2} + \frac{1}{z-z_k}\frac{\partial}{\partial z_k}\right]\right]\langle\Phi_{12}\Phi_1(z_1,\bar{z}_1)...\Phi_N(z_N,\bar{z}_N)\rangle = 0, \tag{311}$$

то есть, корреляционная функция удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению.

2.9 Операторное разложение для "вырожденных полей".

Оказывается, что возникает ограничение на операторное разложение "вырожденного поля" с другими полями. Действительно, пусть $z \to z_1$. Рассмотрим операторное разложение

$$\Phi_{12}(z)\Phi_{\Delta}(z_1) = \sum_{\tilde{\Delta}} C_{12,\Delta}^{\tilde{\Delta}}(z-z_1)^{\tilde{\Delta}-\Delta-\Delta_{12}}(\Phi_{\tilde{\Delta}}(z_1)+...). \tag{312}$$

Обозначим $\kappa = \tilde{\Delta} - \Delta - \Delta_{12}$. Подставим в дифференциальное уравнение (311) правую часть операторного разложения (312). Получим, что наиболее сингулярные члены пропорциональны $(z-z_1)^{\kappa-2}$. Для того чтобы уравнение выполнялось, необходимо потребовать, чтобы коэффициент при $(z-z_1)^{\kappa-2}$ был равен нулю. Отсюда получаем квадратное уравнение

$$\kappa(\kappa-1) + b^2\Delta - b^2\kappa = 0. \tag{313}$$

Используя параметризацию $\Delta(a) = a(Q-a)$, где $Q = b + b^{-1}$, легко показать, что уравнение (313) сводится к виду

$$(ab-\kappa)(1-ab+b^2-\kappa) = 0. \tag{314}$$

Поэтому два решения квадратного уравнения равны

$$\tilde{\Delta} - \Delta - \Delta_{1,2} = ab, \tag{315}$$

$$\tilde{\Delta} - \Delta - \Delta_{1,2} = 1 - ab - b^2. \tag{316}$$

Теперь учтем, что $\Delta_{1,2} = -3b^2/4 - 1/2$, а также параметризуем $\tilde{\Delta}(\tilde{a}) = \tilde{a}(Q - \tilde{a})$, тогда решения приобретают вид

$$(\tilde{a} - a + b/2)(Q - a - \tilde{a} + b/2) = 0, \tag{317}$$

$$(\tilde{a} - a - b/2)(Q - a - \tilde{a} - b/2) = 0. \tag{318}$$

Теперь несложно найти $\tilde{a}$

$$\tilde{a} = a \pm b/2, \quad \tilde{a} = Q - a \pm b/2. \tag{319}$$

Мы получили ограничение на вид операторного разложения, то есть при рассмотрении операторного разложения произвольного поля $\Phi_a = \Phi_{\Delta(a)}$ с полем Φ_{12} могут появляться поля с размерностью $\tilde{\Delta} = \tilde{a}(Q - \tilde{a})$, где $\tilde{a}$ удовлетворяет уравнениям (319). Это утверждение схематически можно записать так

$$\Phi_{12}\Phi_a = \left[\Phi_{a+b/2}\right] + \left[\Phi_{a-b/2}\right]. \tag{320}$$

Кроме поля Φ_{12} имеется еще поле Φ_{21}. Как мы отмечали выше, разница между особыми векторами этих полей заключается в замене $b \to b^{-1}$. Поэтому имеем

$$\Phi_{21}\Phi_a = \left[\Phi_{a+1/2b}\right] + \left[\Phi_{a-1/2b}\right]. \tag{321}$$

Аналогично можно изучать и операторные разложения с полями Φ_{mn}. Например, для поля Φ_{13} мы получим уравнение третьей степени. Вместо этого можно воспользоваться другим приемом. Пусть $a = a_{12} = -b/2$. Тогда из формулы (320) следует

$$\Phi_{12}\Phi_{12} = \left[\Phi_{a_{12}+b/2}\right] + \left[\Phi_{a_{12}-b/2}\right] = [\Phi_{11}] + [\Phi_{13}]. \tag{322}$$

Можно также написать

$$\Phi_{13}\Phi_a = \Phi_{12}(\Phi_{12}\Phi_a) = [\Phi_{a+b}] + [\Phi_a] + [\Phi_{a-b}]. \tag{323}$$

Для поля общего вида Φ_{mn}, которое мы можем представить символически как $(\Phi_{21})^{m-1}(\Phi_{12})^{n-1}$, повторяя эту процедуру можем получить

$$\Phi_{mn}\Phi_a = \sum_{r,s} \left[\Phi_{a+\lambda_{r,s}}\right], \tag{324}$$

где

$$\lambda_{r,s} = \frac{rb + sb^{-1}}{2}, \tag{325}$$

а r и s пробегают значения

$$r = m - 1,\ m - 3,\ \dots, 1 - m, \tag{326}$$

$$s = n - 1,\ n - 3,\ \dots, 1 - n. \tag{327}$$

И также можно найти, что

$$\Phi_{n_1 m_1}\Phi_{n_2 m_2} = \sum_{k=0}^{\min(m_1,m_2)-1} \sum_{l=0}^{\min(n_1,n_2)-1} [\Phi_{n_0+2l, m_0+2k}], \tag{328}$$

где $n_0 = |n_1 - n_2| + 1$, $m_0 = |m_1 - m_2| + 1$.

Возможна ли теория в которой алгебра полей исчерпывается пространством $\mathcal{A}_D = \bigoplus\limits_{n,m=1}^{\infty} [\Phi_{mn}]$? Для того, чтобы ответить на этот вопрос следует определить структурные константы операторного разложения и показать, что они удовлетворяют условию ассоциативности. Эта задача была решена, дав на этот вопрос положительный ответ, но ее тема выходит за рамки наших лекций.

Конформная Теория Поля с таким набором полей и мнимым параметром $b = i\beta$ называется Обобщенной Минимальной Моделью. Собственно же Минимальной Моделью Конформной Теории Поля называется случай, когда параметр β^2 является рациональным числом $\beta^2 = p/q$. В этом случае центральный заряд

$$\mathrm{c} = 1 - 6\frac{(p-q)^2}{pq}, \tag{329}$$

а значение размерностей

$$\Delta_{mn} = \frac{(pm - qn)^2 - (p-q)^2}{4pq}. \tag{330}$$

Минимальные модели Конформной Теории Поля описывают различные типы критического поведения при $d = 2$ таких моделей Статистической физики, как двумерная Модель Изинга, Модели Поттса и другие.

3 Минимальная Теория Струн.

В этой лекции мы возвращаемся к некритической Теории струн. Альтернативная к исходной формулировка позволяет вычислить струнную восприимчивость и гравитационные размерности наблюдаемых в терминах центрального заряда и размерностей соответствующих примарных полей конформной материи [5].

3.1 Функциональный интеграл Полякова в конформной калибровке.

Вспомним, с чего мы начинали. Мы определили амплитуду перехода струны из начального состояния в конечное, как сумму по всем поверхностям соединяющим начальную и конечную конфигурацию струны

$$Z = \sum_{\text{По поверхностям}} e^{-(\text{площадь})} \stackrel{\text{def}}{=} \int \mathcal{D}g\mathcal{D}X^\mu \exp(-S_P[X^\mu, g_{ab}]), \tag{331}$$

где $S_P[X^\mu, g_{ab}]$ — действие Полякова. Нам нужно учитывать каждую поверхность по одному разу, но из-за параметризационной инвариантности, каждая поверхность входит в функциональный интеграл (331) бесконечно много раз. Необходимо было выделить фактор, учитывающий этот переучет поверхностей. Для этого мы провели фиксацию калибровки. Вкратце напомним основные шаги этой процедуры. Вначале мы выбрали в пространстве метрик поверхность Σ, на которой метрики имеют вид $e^\sigma \hat{g}$, где $\hat{g}$ некоторая метрика. Остальные метрики получаются из метрик на поверхности Σ в результате действия группы репараметризаций. Затем мы перешли от интегрирования по всем метрикам, к интегрированию по метрикам на поверхности Σ и по элементам группы диффеоморфизмов. Объем орбиты группы диффеоморфизмов и является фактором переучета поверхностей. Поэтому мы переопределили меру в пространстве метрик, устранив этот фактор. И в итоге получили, что

$$Z = \int \mathcal{D}_P\varphi \mathcal{D}_{e^{\varphi}\hat{g}}(B,C)\mathcal{D}_{e^{\varphi}\hat{g}}X^{\mu} \exp(-S_P[X^{\mu}, e^{\varphi}\hat{g}_{ab}] - S_{\mathrm{Gh}}[B, C, e^{\varphi}\hat{g}_{ab}]), \tag{332}$$

где норма на мере Полякова $\mathcal{D}_P\varphi$, определяется следующим выражением

$$\|\delta\varphi\|_P^2 = \int e^{\varphi(x)}(\delta\varphi(x))^2\sqrt{\hat{g}}d^2x. \tag{333}$$

Эта мера не является инвариантной при замене $\varphi(x) \to \varphi(x) + \eta(x)$, то есть не является линейной. Далее, используя конформную аномалию, мы в итоге пришли к конечному ответу, который можно записать в виде

$$Z = \int \mathcal{D}_P\varphi \mathcal{D}_{\hat{g}}(B,C)\mathcal{D}_{\hat{g}}X \exp(-S^P_{\mathrm{tot}}[B, C, X, \varphi, \hat{g}_{ab}]), \tag{334}$$

где полное действие струны $S^P_{\mathrm{tot}}[B, C, X, \varphi, \hat{g}_{ab}]$, является суммой трех слагаемых

$$S^P_{\mathrm{tot}}[B, C, X, \varphi, \hat{g}] = S_P[X^{\mu}, \hat{g}] + S_{\mathrm{Gh}}[B, C, \hat{g}] + \frac{26-D}{48\pi}W[\varphi, \hat{g}]. \tag{335}$$

Последний член в формуле (335), появляющийся из-за учета конформной аномалии, описывает динамику гравитационного поля. Зависимость функционального интеграла (334) от $\hat{g}$ является кажущейся, поскольку в исходной формулировке интегрирование происходит по всем метрикам и никакая метрика не является выделенной. Это можно проверить явным вычислением.

Формулу (334) можно обобщить, предположив, что роль материи вместо D-мерного скалярного безмассового поля X^{μ}, играет некоторое поле, также обозначаемое X, динамика которого описывается произвольной Двумерной Конформной Теории Поля с действием $S_M[X, g]$ и центральным зарядом c_{M}.

Изменив нормировку поля φ

$$\varphi \to \sqrt{\frac{24}{26-D}}\,\varphi, \tag{336}$$

получим выражение для действия струны

$$S^P_{\mathrm{tot}}[B, C, X, \varphi, \hat{g}] = S_P[X^{\mu}, \hat{g}] + S_{\mathrm{Gh}}[B, C, \hat{g}] + \tilde{S}_{\mathrm{L}}[\varphi, \hat{g}], \tag{337}$$

где

$$\tilde{S}_L[\tilde{\varphi}, \hat{g}] = \frac{1}{4\pi}\int \left[\hat{g}^{ab}\partial_a\varphi\partial_b\varphi + \tilde{Q}R^{[\hat{g}]}\varphi\right]\sqrt{\hat{g}}d^2x, \tag{338}$$

$$\tilde{Q} = \sqrt{\frac{26-D}{6}}, \quad \tilde{b} = \sqrt{\frac{6}{26-D}}, \tag{339}$$

а выражение для меры (333) приобретет вид

$$\|\delta\varphi\|_P^2 = \int e^{2\tilde{b}\varphi(x)}(\delta\varphi(x))^2\sqrt{\hat{g}}d^2x. \tag{340}$$

3.2 Формулировка Давида - Дистлера - Каваи.

Существует альтернативная формулировка некритической теории струн, принадлежащая Давиду-Дистлеру-Каваи (DDK) [6], которая предполагается эквивалентной исходному подходу Полякова. В формулировке DDK выражение для функционального интеграла в конформной калибровке

$$Z \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int \mathcal{D}_{\hat{g}}\varphi \mathcal{D}_{\hat{g}}(B,C)\mathcal{D}_{\hat{g}}X \exp(-S_M[X,\hat{g}] - S_{\mathrm{Gh}}[B,C,\hat{g}] - S_L[\varphi,\hat{g}]) \qquad (341)$$

отличается тем, что мера интегрирования в пространстве поля φ является линейной

$$\|\delta\varphi\|^2 = \int (\delta\varphi(x))^2 \sqrt{\hat{g}} d^2x, \qquad (342)$$

а действие $S_L[\varphi,\hat{g}]$, называемое действием Лиувилля, принимает вид

$$S_L[\varphi,\hat{g}] = \frac{1}{4\pi} \int \left[\hat{g}^{ab}\partial_a\varphi\partial_b\varphi + QR^{[\hat{g}]}\varphi + 4\pi\mu e^{2b\varphi} \right] \sqrt{\hat{g}} d^2x, \qquad (343)$$

где μ — космологическая постоянная, а Q и b — некоторые константы. Основное предположение состоит в том, что единственным следствием от замены меры интегрирования является конечная перенормировка параметров в $S_{\mathrm{L}}[\varphi,\hat{g}]$. Перенормированные параметры Q и b определяются из условия независимости функционального интеграла от "бэкграунд" метрики $\hat{g}$. Так как при репараметризациях выражение (341) является инвариантным, остается обеспечить инвариантность относительно преобразований Вейля. Поскольку мы знаем, что происходит с функциональными интегралами, описывающими конформную материю и духи при преобразовании $\hat{g}_{ab} \to g_{ab} = e^{\sigma}\hat{g}_{ab}$, остается рассмотреть как изменяется функциональный интеграл по лиувиллевскому полю

$$e^{-S_{\mathrm{L}}^{\mathrm{eff}}[\hat{g}]} = \int \mathcal{D}_{\hat{g}}\varphi e^{-S_{\mathrm{L}}[\varphi,\hat{g}]}. \qquad (344)$$

Для начала обратимся к случаю, в котором экспоненциальный член в формуле (343) отсутствует, то есть $\mu = 0$. Учитывая формулу

$$\sqrt{g}R^{[g]}(x) = \sqrt{\hat{g}}(R^{[\hat{g}]}(x) + \Delta_0^{[\hat{g}]}\sigma(x)),$$
$$\text{где} \quad g_{ab} = e^{\sigma}\hat{g}_{ab}, \quad \Delta_0^{[\hat{g}]} = -\frac{1}{\sqrt{\hat{g}}}\partial_a\hat{g}^{ab}\sqrt{\hat{g}}\partial_b, \qquad (345)$$

для действия (343) получаем

$$S_L[\varphi, e^{\sigma}\hat{g}] = \frac{1}{4\pi} \int \left[\hat{g}^{ab}\partial_a\varphi\partial_b\varphi + QR^{[\hat{g}]}\varphi + Q\hat{g}^{ab}\partial_a\sigma\partial_b\varphi \right] \sqrt{\hat{g}} d^2x, \qquad (346)$$

где мы уже произвели интегрирование по частям

$$\int Q\varphi(x)\Delta_0^{[\hat{g}]}\sigma(x)\sqrt{\hat{g}}d^2x = \int Q\hat{g}^{ab}\partial_a\sigma\partial_b\varphi \ \sqrt{\hat{g}}d^2x. \qquad (347)$$

Теперь перейдем к новому полю $\tilde{\varphi}(x)$, сдвигом поля $\varphi(x)$ на фиксированную функцю $\frac{Q}{2}\sigma(x)$

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) + \frac{Q}{2}\sigma(x). \qquad (348)$$

Выражение (346) в терминах поля $\tilde{\varphi}$ можно записать в виде

$$S_L[\varphi, e^{\sigma}\hat{g}] = \frac{1}{4\pi}\int\left[\hat{g}^{ab}\partial_a\tilde{\varphi}\partial_b\tilde{\varphi} + QR^{[\hat{g}]}\tilde{\varphi} - \frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{2}\hat{g}^{ab}\partial_a\sigma\partial_b\sigma + R^{[\hat{g}]}\sigma\right)\right]\sqrt{\hat{g}}d^2x, \tag{349}$$

или, что эквивалентно,

$$S_{\mathrm{L}}[\varphi, e^{\sigma}\hat{g}] = S_{\mathrm{L}}[\tilde{\varphi}, \hat{g}] - \frac{Q^2}{8\pi}W[\sigma, \hat{g}], \tag{350}$$

где

$$W[\sigma, \hat{g}] = \int\left[\frac{1}{2}\hat{g}^{ab}\partial_a\sigma(x)\partial_b\sigma(x) + R^{[\hat{g}]}(x)\sigma(x)\right]\sqrt{\hat{g}}d^2x. \tag{351}$$

В силу линейности меры поля φ, мы имеем

$$\mathcal{D}_{e^{\sigma}\hat{g}}\varphi = \mathcal{D}_{e^{\sigma}\hat{g}}\tilde{\varphi}. \tag{352}$$

Учет квантовой аномалии в мере приводит к дополнительному слагаемому в соотношении между эффективными действиями теории Лиувилля в метрике $e^{\sigma}\hat{g}$ и $\hat{g}$, в результате чего мы получаем

$$S_{\mathrm{L}}^{\mathrm{eff}}[e^{\sigma}\hat{g}] = S_{\mathrm{L}}^{\mathrm{eff}}[\hat{g}] - \frac{1+6Q^2}{48\pi}W[\sigma, \hat{g}]. \tag{353}$$

Таким образом мы доказали, что теория Лиувилля, задаваемая (344) при $\mu = 0$ является Конформной теорией поля, в смысле определения данного в конце первой лекции, с центральным зарядом

$$c_{\mathrm{L}} = 1 + 6Q^2. \tag{354}$$

Тензор энергии-импульса этой теории в плоском пространстве имеет вид

$$T_{ab} = -\partial_a\varphi\partial_b\varphi + \frac{\hat{g}_{ab}}{2}(\partial_a\varphi)^2 + Q\left(\partial_a\partial_b\varphi - \frac{\hat{g}_{ab}}{2}\partial_a^2\varphi\right). \tag{355}$$

Как обычно в Конформной теории поля существуют две компоненты тензора энергии-импульса

$$T_{zz} = T(z) = -(\partial\varphi)^2 + Q\partial^2\varphi, \tag{356}$$
$$T_{\bar{z}\bar{z}} = \bar{T}(\bar{z}) = -(\bar{\partial}\varphi)^2 + Q\bar{\partial}^2\varphi, \tag{357}$$

которые являются голоморфным и антиголоморфным полями соответственно.

Примарными полями в теории Лиувилля, являются поля $V_a(x) =: e^{2a\varphi(x)} :$. Их операторное разложение с тензором энергии-импульса легко получить, пользуясь теоремой Вика

$$T(u)V_a(z, \bar{z}) = \frac{\Delta_a}{(u-z)^2}V_a(z, \bar{z}) + \frac{1}{u-z}\partial_z V_a(z, \bar{z}) + \text{рег.}, \tag{358}$$

где $\Delta_a = a(Q-a)$ — размерность поля $V_a(z, \bar{z})$.

Составное экспоненциальное поле $V_a =: e^{2a\varphi(x)} :$ требует для своего определения регуляризации и перенормировки. В результате этого возникает зависимость поля V_a от метрики

$$[e^{2a\varphi(x)}]_{e^{\sigma}\hat{g}} = e^{a^2\sigma(x)}[e^{2a\varphi(x)}]_{\hat{g}}. \tag{359}$$

Поэтому при комбинации преобразований

$$\hat{g}_{ab} \to e^{\sigma}\hat{g}_{ab}, \tag{360}$$

$$\varphi(x) \to \varphi(x) - \frac{Q}{2}\sigma(x), \tag{361}$$

поле V_a трансформируется по закону

$$V_a(x) \to e^{-\Delta(a)\sigma(x)}V_a(x). \tag{362}$$

Пусть параметр b таков, что $\Delta(b) = 1$, что эквивалентно

$$Q = b + b^{-1}, \tag{363}$$

тогда поле

$$V_b(x) \to e^{-\sigma(x)}V_b(x). \tag{364}$$

Интеграл

$$\int V_b\sqrt{g}d^2x \tag{365}$$

остается инвариантным при (360) и (361). Отсюда следует, что Квантовая теория Лиувилля [8] с действием (343), в котором присутствует космологический член с $\mu \neq 0$, также преобразуется по закону (353). Иначе говоря, эта теория является Конформной теорией поля с $c_{\mathrm{L}} = 1 + 6Q^2$.

Поэтому теория струны является суммой трех Конформных теорий поля с центральными зарядами равными c_{M}, $c_{\mathrm{Gh}} = -26$ и $c_{\mathrm{L}} = 1 + 6Q^2$. Для достижения независимости статистической суммы струны задаваемой функциональным интегралом (341), теперь достаточно потребовать зануление полного центрального заряда теории

$$c_{\mathrm{tot}} = c_{\mathrm{M}} + c_{\mathrm{Gh}} + c_{\mathrm{L}} = 0. \tag{366}$$

Это соотношение, которое эквивалентно формуле

$$Q = \sqrt{\frac{25 - c_{\mathrm{M}}}{6}}, \tag{367}$$

выражает константу связи Лиувилля b через центральный заряд конформной материи.

Кроме статистической суммы в Теории струн объектом изучения являются также корреляционные функции наблюдаемых. Наблюдаемые или физические поля также должны быть инвариантными относительно преобразований Вейля. Простейшие физические поля определяются следующим образом. Пусть Φ_Δ — некоторое примарное поле из материального сектора с размерностью Δ_{M} . При конформных преобразованиях метрики поле Φ_Δ преобразуется как

$$[\Phi_\Delta]_{e^{\sigma}\hat{g}} = e^{-\Delta_{\mathrm{M}}\sigma}[\Phi_\Delta]_{\hat{g}}. \tag{368}$$

Произведение поля Φ_Δ и "одевающего" экспоненциального поля V_a из лиувиллевского сектора

$$U_a = \Phi_\Delta V_a, \tag{369}$$

при выполнении условия

$$\Delta_{\mathrm{M}} + \Delta(a) = 1, \tag{370}$$

которое равносильно формуле

$$\Delta_{\mathrm{M}} + a(Q - a) = 1, \tag{371}$$

и при растяжении метрики и соответствующем сдвиге поля φ, трансформируется по закону

$$U_a = \Phi_\Delta V_a \to e^{-\sigma(x)}\Phi_\Delta V_a, \tag{372}$$

а наблюдаемые вида

$$O_a = \int \Phi_\Delta V_a \sqrt{g} d^2 x \tag{373}$$

остаются инвариантными. Таким образом мы приходим к определению корреляционных функций

$$\langle O_{a_1} ... O_{a_N} \rangle, \tag{374}$$

которые не меняются при преобразованиях Вейля, поэтому не зависят от "бэкграунд" метрики $\hat{g}$, то есть являются корректно определенными.

3.3 Спектр гравитационных размерностей.

Обратимся теперь к масштабной зависимости коррелятора (374). Он выражается формулой

$$\langle O_{a_1} ... O_{a_N} \rangle = \int \mathcal{D}_{\hat{g}}\varphi e^{-\frac{1}{4\pi}\int\left[\hat{g}^{ab}\partial_a\varphi\partial_b\varphi + QR^{[\hat{g}]}\varphi + 4\pi\mu e^{2b\varphi}\right]\sqrt{\hat{g}}d^2x} \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{N}\int d^2x_i e^{2\sum_i a_i\varphi(x_i)} \langle \Phi_1(x_1) ... \Phi_n(x_N) \rangle_{\mathrm{M}}, \tag{375}$$

где $O_{a_i} = \int \Phi_{\Delta_i} V_{a_i} \sqrt{\hat{g}} d^2 x$, а $\langle \Phi_1(x_1) ... \Phi_n(x_N) \rangle_{\mathrm{M}}$ является N-точечной корреляционной функцией материальной теории.

В формуле (375) есть только один размерный параметр — это космологическая постоянная μ. Поэтому зависимость корреляционной функции от μ и представляет ее масштабную зависимость. Посмотрим, как изменяется коррелятор (375) при растяжении μ

$$\mu \to e^{\rho}\mu, \tag{376}$$

где ρ константа. Очевидно, чтобы компенсировать растяжение в космологическом члене, нам необходимо сделать сдвиг поля $\varphi(x)$ по формуле

$$\varphi(x) \to \varphi(x) - \frac{\rho}{2b}. \tag{377}$$

Так как мера в функциональном интеграле (375) линейна

$$\mathcal{D}_{\hat{g}}\left(\varphi - \frac{\rho}{2b}\right) = \mathcal{D}_{\hat{g}}\varphi, \tag{378}$$

изменение действия $S_{\mathrm{L}}[\varphi, \hat{g}]$ при таком сдвиге произойдет лишь из-за члена с кривизной. Учитывая теорему Гаусса- Бонне

$$\frac{1}{4\pi}\int R^{[\hat{g}]}\sqrt{\hat{g}}d^2x = \chi_E = 2 - 2h, \tag{379}$$

где χ_E — эйлерова характеристика, а h — количество ручек, а также изменение полей $e^{2a\varphi}$ при сдвиге (377), получим связь между коррелятором от $e^{\rho}\mu$ и коррелятором от μ

$$\langle O_{a_1}...O_{a_N}\rangle(e^{\rho}\mu) = e^{\rho\left(\frac{\chi_E Q}{2b} - \sum_i \frac{a_i}{b}\right)}\langle O_{a_1}...O_{a_N}\rangle(\mu). \tag{380}$$

Из этой формулы следует, что масштабная зависимость $\langle O_{a_1}...O_{a_N}\rangle$ дается выражением

$$\langle O_{a_1}...O_{a_n}\rangle(\mu) = \mu^{\left(\frac{\chi_E Q}{2b} - \sum_i \frac{a_i}{b}\right)} F(a_1, ..., a_N, b), \tag{381}$$

где $F(a_1, ..., a_N, b)$ — функция которая уже не зависит от μ. Коэффициенты

$$\delta_i = -\frac{a_i}{b} \tag{382}$$

называются гравитационными размерностями. Они описывают вклад от преобразования полей O_{a_i} при масштабном преобразовании. Величина

$$\Gamma_{\text{str}} = 2 - \frac{Q}{b} \tag{383}$$

называется струнной восприимчивостью и показывает, как изменяется статистическая сумма при масштабном преобразовании.

Выполним преобразование Лапласа корреляционной функции физических полей (374) по космологической постоянной

$$\langle O_{a_1}...O_{a_N}\rangle = \int_0^{\infty} \langle O_{a_1}...O_{a_N}\rangle_A e^{-\mu A} dA. \tag{384}$$

Образ Лапласа $\langle O_{a_1}...O_{a_N}\rangle_A$ является корреляционной функцией от полей, задаваемой функциональным интегралом по поверхностям с фиксированной площадью

$$\begin{aligned}\langle O_{a_1}...O_{a_N}\rangle_A &= \\ &= \int \langle O_{a_1}...O_{a_N}\rangle_{\text{M}} e^{-S_0[\varphi,\hat{g}]}\delta\left(A - \int e^{2b\varphi(x)}\sqrt{\hat{g}}d^2x\right)\mathcal{D}_{\hat{g}}\varphi,\end{aligned} \tag{385}$$

а $S_0[\varphi, \hat{g}]$ — действие Лиувилля (343) без экспоненциального члена

$$S_0[\varphi, \hat{g}] = \frac{1}{4\pi}\int [\hat{g}^{ab}\partial_a\varphi\partial_b\varphi + QR^{[\hat{g}]}\varphi]\sqrt{\hat{g}}d^2x. \tag{386}$$

Зависимость коррелятора (385) от площади поверхностей A, также является степенной

$$\langle O_{a_1}...O_{a_N}\rangle_A \sim A^{-\frac{\chi_E Q}{2b} - 1 + \sum_{i=1}^{N}\frac{a_i}{b}}. \tag{387}$$

3.4 Минимальная 2-мерная Гравитация Лиувилля.

Вариант некритической Теории Струн, в которой конформная материя описывается одной изминимальных моделей, упомянутых в конце второй лекции, называется Минимальной теорией струн или Минимальной гравитацией Лиувилля (MLG) [7, 9, 10].

Значение центрального заряда конформной материи в этом случае

$$c_{\mathrm{M}} = 1 - 6q^2, \quad q = \beta^{-1} - \beta. \tag{388}$$

Выражение же для конформной размерности примарного поля Φ_{mn} в Обобщенной Минимальной Модели удобно записать в виде

$$\Delta^{\mathrm{M}}_{mn} = \alpha_{mn}(\alpha_{mn} - q), \tag{389}$$

где

$$\alpha_{mn} = \frac{(n-1)\beta - (m-1)\beta^{-1}}{2}. \tag{390}$$

Поэтому требование зануления полного центрального заряда струны

$$c_{\mathrm{L}} + c_{\mathrm{M}} = 26, \quad \text{где} \quad c_{\mathrm{L}} = 1 + 6(b^{-1} + b)^2, \tag{391}$$

эквиваелентно соотношению

$$\beta = b, \tag{392}$$

а условие баланса размерностей $\Delta^{\mathrm{M}} + \Delta^{\mathrm{L}} = 1$, то есть

$$\Delta_{mn} + a(Q - a) = 1, \tag{393}$$

эквивалентно

$$a = a_{m,-n}, \quad \text{где} \quad a_{k,l} = \frac{(1-k)b^{-1} + (1-l)b}{2}. \tag{394}$$

Таким образом физические наблюдаемые в Минимальной теории струн задаются выражением

$$O_{mn} = \int \Phi_{mn}(x) e^{2a_{m,-n}\varphi(x)} d^2x. \tag{395}$$

Из формул (382) и (383) тогда следует, что струнная восприимчивость в MLG(b)

$$\Gamma_{\mathrm{str}} = 1 - \frac{1}{b^2}, \tag{396}$$

а спектр гравитационных размерностей имеет вид $\delta_{mn} = -\frac{a_{m,-n}}{b}$ или

$$\delta_{mn} = \frac{(m-1)}{2} b^{-2} - \frac{n+1}{2}. \tag{397}$$

Замечательно, что в то время как Минимальные Модели Конформной теории поля описывают различные типы критического поведения на плоскости, Минимальные Модели гравитации Лиувилля описывают критическое поведение тех же самых систем на случайных поверхностях. Этот факт подтвержден сравнением с корреляторами наблюдаемых в Матричных Моделях [11], которые в определенном смысле дают экспериментальную реализацию таких систем.

Благодарности

Мы благодарны О.Алексееву, который предоставил нам свои конспекты лекций, прочитанных одним из авторов в НМУ. Также мы признательны В.Альбе и М.Берштейну за многочисленные полезные обсуждения.

Работа была поддержана грантами RFBR 07-02-00799 и SS-3472.2008.2.

Список литературы

[1] A.Polyakov, "Quantum Geometry of Bosonic Strings Phys.Lett.B103:207-210,(1981).

[2] А.Поляков. ”Калибровочные поля и струны“, Издательский дом ”Удмуртский университет“, 1999.

[3] A.Belavin, A.Polyakov, A.Zamolodchikov, ”Infinite conformal simmetry in two-dimensional quantum field theory“, Nucl.Phys. B241, 333-380, (1984)

[4] А.Б.Замолодчиков, Ал.Б.Замолодчиков. ”Конформная теория поля и 2 - мерные критические явления“, Москва, издательство МЦНМО, 2009.

[5] V. G. Knizhnik, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, “Fractal structure of 2d-quantum gravity,” Mod. Phys. Lett. A **3** (1988) 819.

[6] F.David, "Conformal Field Theories Coupled to 2D Gravity in the Conformal Gauge Mod.Phys.Lett.A3:1651,1988 ;
J.Distler, H.Kawai, "Conformal Field Theory and 2D Quantum Gravity Or Who’s Afraid of Joseph Liouville?"Nucl.Phys.B321:509,(1989)

[7] P.H.Ginsparg and G.W.Moore, "Lectures on 2-D gravity and 2-D string theory arXiv:hep-th/9304011 ;
P.Di Francesco, P.H.Ginsparg, J.Zinn-Justin, "2-D Gravity and random matrices Phys.Rep.254:1-133,(1995), hep-th/9306153

[8] A.Zamolodchikov and Al.Zamolodchikov, ”Structure constants and conformal bootstrap in Liouville field theory“, Nucl.Phys., B477 (1966) 577-605, hep-th/9506136

[9] Al.Zamolodchikov, "Three-point function in the minimal Liouville gravity Theor.Math. Phys.142:183-196,(2005)

[10] A.Belavin, Al.Zamolodchikov, ”Moduli integrals, ground ring and four-point function in minimal Liouville gravity“, Theor.Math.Phys.147:729-754,(2006); hep-th/0510214, pages 16-46

[11] A.Belavin, A.Zamolodchikov, ”On Correlation Numbers in 2D Minimal Gravity and Matrix Models“, arXiv:0811.0450v1 [hep-th] (2008)